Brandes, Heinrich Wilhelm,

Lehrbuch der höhern Geometrie in analytischer Darstellung

Bd.: 1 : mit 11 Kupfertafeln

1822

Coburg, Landesbibliothek -- E I 4/1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11942430-2

19250
E. 1. 4

Lehrbuch

der

höhern Geometrie,

in

analytischer Darstellung

von

H. W. Brandes
Professor an der Universität in Breslau.

Erster Theil.

Mit 11 Kupfertafeln.

Leipzig,
bei Paul Gotthelf Kummer.
1822.

14. 24

[illegible]

[illegible]

V o r r e d e.

Es giebt wohl keinen Gegenstand in der theoretischen Mathematik, der mehr geeignet wäre, die Neigung für diese Wissenschaft zu beleben, als eine analytische Darstellung der höhern Geometrie. Nicht allein deswegen, weil man hier den Gegenstand der Untersuchung vor Augen legen und so jede Dunkelheit völlig beseitigen kann, hat die höhere Geometrie etwas sehr Anziehendes, sondern sie bietet auch, bei analytischer Darstellung, so ungemein viel Ueberraschendes dar, zeigt die Gewalt der Analysis und die Sicherheit ihrer Schlüsse in einem so schönen Lichte, dass selbst der Anfänger ihren hohen Werth empfindet und es ahnet, wie sie Mittel zur Erforschung der Natur und zu Untersuchung alles dessen, was messbar ist, darbieten möge. Je mehr es ihm zu Anfang fremd vorkömmt, wenn man behauptet, eine Gleichung, eine blosse Reihe von Buchstaben lehre uns alle Eigenschaften der durch diese Gleichung dargestellten

Linie kennen, ja es bedürfe nicht einmal der Zeichnung, um uns den Gang der Curve, ihre Durchschnittspunkte, ihre Spitzen u. s. w. mit Gewissheit nachzuweisen, — dieses alles sage schon die Gleichung; desto mehr findet er sich froh überrascht, wenn nun in der That aus der nähern Betrachtung dieser Gleichung alles das hervorgeht, wenn er rechnend Eigenschaften der Curve entdeckt, die sein Auge nicht einmal gewahr geworden wäre, und die sich nun erst seinem durch die Rechnung geschärften Auge als wahr, als vollkommen gewiss zeigen. Es bedarf nicht vieler Kunst, um, wenigstens beim mündlichen Vortrage, durch diese Entwickelungen den Schüler mit warmem Eifer für eine so tief eindringende und so sichre Ueberzeugung gewährende Wissenschaft zu erfüllen und ihm den Entschluss einzuflössen, dass er ihr alle seine Kräfte unermüdet widmen wolle.

Aber nicht bloss, um die Liebe für die Mathematik zu wecken und zu befestigen, dient die analytisch dargestellte höhere Geometrie, sondern sie gewährt auch eine so gute Vorbereitung für die höhere Analysis, macht so vertraut mit den Principien der Differentialrechnung und zerstreut alle Dunkelheit, die man sonst in diesen Lehren zu finden pflegt, so vollkommen, dass es nachher der Erläuterungen und der Rechtfertigungen kaum noch bedarf, die man gewöhnlich bei der Einleitung in die höhere Analysis nöthig zu finden pflegt. Um dieses wichtigen Vortheils willen, scheint es mir nothwendig, die analytische Geometrie der höhern Analysis voranzuschicken, und das ist auch der Grund,

warum ich diesen ersten Theil meines Buches so eingerichtet habe, dass er nichts von Kenntniss der Differentialrechnung voraussetzt. Die Betrachtungen, welche in der Geometrie uns auf die Differenzenrechnung führen, welche sodann (im Uebergange von der Sehne zur Berührungslinie u. s. w.) uns nöthigen, ganz das zu gebrauchen, was man Differentiale nennt, sind so einleuchtend, dass niemand an der Richtigkeit der Schlüsse zweifeln kann, — jeder die Berechtigung, bei dem ersten Gliede der Differenzreihe stehen zu bleiben, anerkennen muss. Sie führen uns also zu dem Bedürfnisse hin, die Differentialrechnung zu erfinden und zu gebrauchen, und unter dem Bilde der Tangente werden wir mit dem vertraut, was uns dunkel vorkömmt, wenn es ohne geometrische Anwendung als Verhältniss unendlich kleiner Grössen angekündigt wird. So erhalten wir auch hier eine eben so befriedigende, als klare Entscheidung über das $\frac{o}{o}$ und ähnliche Gegenstände.

Doch ich verweile zu lange bei Betrachtungen, die ich nur berühren wollte, um meine Anordnung, nach welcher hier im ersten Theile die Bestimmung der Tangenten u. s. w. aus den vollständigen Differenzreihen entwickelt wird, zu rechtfertigen; ich halte mich überzeugt, dass man sehr dabei gewinnt, wenn man hier noch immer auf die Begründung zurücksieht, und dann erst, wenn man mit dem Gegenstande ganz vertraut ist, die Vortheile unbekümmert benutzt, welche die Differentialrechnung darbietet.

Was den Inhalt dieses ersten Bandes im Einzelnen betrifft, so habe ich alle Lehren, die sich hier schon vortragen liessen, so vollständig abzuhandeln gesucht, dass dem Leser über wesentliche Gegenstände nicht leicht etwas zu wünschen übrig bleiben wird. Ich habe mich dabei bemüht, neben dem Bekannteren, was freilich hier nicht fehlen durfte, zugleich eine bedeutende Reihe ganz neuer Untersuchungen beizufügen, die, wie ich hoffe, wohl verdienen, die Aufmerksamkeit der Leser zu beschäftigen. So viel als möglich habe ich mit immer gleicher Vollständigkeit jeden einzelnen Gegenstand gründlich abgehandelt und bin von diesem Gesetze der Gleichförmigkeit nur sofern abgewichen, als ich allerdings bei der Untersuchung der krummen Flächen nicht so viel einzelne Lehrsätze mitgetheilt habe, wie bei den krummen Linien. Dieses schien mir indess darum angemessen, weil theils die Lehre von den krummen Flächen, so wie sie hier abgehandelt werden konnte, nicht von der ungemeinen Wichtigkeit ist, theils weil die Grundprincipien, die früher vorgekommen sind, auch hier ihre Anwendung finden.

Der zweite Theil wird alle die geometrischen Lehren umfassen, die ohne Kenntniss der Differentialrechnung und Integralrechnung nicht verständlich sind. Dort wird also zuerst alles, was die Rectification und Quadratur der Curven betrifft, die Bestimmung der Curven aus Eigenschaften, welche zu einer Differentialgleichung des ersten oder höhern Grades führen, die

Betrachtung der Trajectorien u. s. w. vorkommen. Sodann aber scheint es mir zweckmässig, dort bei Betrachtung der krummen Flächen länger zu verweilen und nicht bloss von ihrer Quadratur, von ihren Krümmungshalbmessern u. s. w. zu handeln, sondern vorzüglich der Bestimmung krummer Flächen durch Eigenschaften, die auf partielle Differentialgleichungen führen, eine genauere Betrachtung zu widmen. Die schwierigen und doch so höchst wichtigen Untersuchungen über die Integration partieller Differentialgleichungen können am besten durch geometrische Anwendungen dem Lernenden klar gemacht werden; auf keinem andern Wege wird er so leicht in Stand gesetzt werden, das dunkel ausgesprochene Resultat der Integration, was die unbestimmten Functionen angeben, auf einzelne Fälle anzuwenden, und die Form dieser Functionen mit Hülfe gegebener Bestimmungen im einzelnen Falle aufzufinden u. s. w.

Obgleich ich auf die Ausarbeitung dieses Buches den grössten Fleiss gewandt habe, obgleich ich besonders da, wo ich neue Gegenstände vorzutragen hatte, mich bemüht habe, die Richtigkeit der Schlüsse von allen Seiten zu prüfen und mich vor allen Fehlschlüssen und Irrthümern gesichert zu haben hoffe, so weiss ich doch sehr wohl, dass ich Ursache habe, die Nachsicht der Leser zu erbitten. Jede Belehrung über bessere Anordnung oder Darstellung, über manche, vielleicht mögliche, bequemere Einrichtung der Rechnung werde ich mit

Dank annehmen; doch hege ich die Hoffnung, dass man im Ganzen mein Bemühen, den Freunden der Mathematik ein nützliches Buch in die Hände zu geben, nicht als misslungen tadeln wird.

Breslau, am 22. März 1822.

H. W. Brandes.

Einleitung.

§. 1. Die Geometrie beschäftiget sich überhaupt mit Bestimmungen der Lage von Punkten, Linien und Flächen gegen einander. Um aber die Lage irgend eines Gegenstandes im Raume zu bestimmen, muss man von Punkten oder Linien, deren Lage als bekannt angenommen wird, ausgehen, und durch Vergleichung mit diesen die Lage des erstern Gegenstandes anzugeben suchen.

§. 2. Dass die analytische Geometrie alle solche Bestimmungen auf Formeln zurück führt, dass sie eben deshalb auch dienen kann, um aus geometrischen Bestimmungen, die in Zahlen gegeben sind, andre abgeleitete Bestimmungen in Zahlen zu finden, ist zwar ein im Allgemeinen richtiger Begriff von der analytischen Geometrie, lässt aber das noch nicht ahnen, wodurch sie ihre eigentliche Wichtigkeit erhält.

§. 3. Das ist schon aus der allgemeinen Anwendbarkeit der Algebra und Analysis auf Grössen aller Art bekannt, dass die Grössen, die man algebraisch bestimmt, auch geometrische seyn können, dass es also wenigstens eine Anwendung der Analysis auf die Geometrie geben kann.

Selbst Aufgaben, die rein arithmetisch sind, lassen sich oft in geometrischer Form darstellen, wie folgende Beispiele zeigen:

Die Aufgabe, es sollen zwei Zahlen x, y bestimmt werden, deren Summe $= a$ und deren Product $= b^2$ ist, lässt sich in die geometrische Aufgabe, ein rechtwinkliges Parallelogramm zu finden, dessen Umfang $= 2a$, Inhalt $= b^2$ ist, verwandeln.

Die Aufgabe, zwei Zahlen x, y zu finden, deren Quadrate die Summe $= a^2$ geben, und deren Product $= b^2$ ist, fällt völlig mit der geometrischen Aufgabe, eines rechtwinkligen Dreiecks Hypotenuse und Inhalt sind gegeben, man sucht beide Catheten, — zusammen. Denn nenne ich die Catheten x, y,

die gegebne Hypotenuse $= a$, Inhalt des Dreiecks $= \frac{1}{2} b^2$, so ist $x^2 + y^2 = a^2$, und $xy = b^2$.

§. 4. Wenn man so die Algebra auf die Geometrie anwenden, das ist, bestimmte geometrische Aufgaben durch sie auflösen will, so kömmt es nur darauf an, aus geometrischen Eigenschaften der Figur oder der angegebenen Construction so viele Gleichungen herzuleiten, als unbekannte Grössen da sind, und aus diesen das Unbekannte, z. B. die Lage eines anzugebenden Punktes zu bestimmen. Die Auflösung ergiebt dann einen, auch wohl zwei oder drei bestimmte Werthe für jede der unbekannten Grössen, und damit ist die ganze Untersuchung beendigt.

§. 5. Eine weit grössere Mannigfaltigkeit von Untersuchungen, als diese bestimmten geometrischen Aufgaben, bieten die unbestimmten geometrischen Aufgaben dar. Bei ihnen nämlich finden unzählige verschiedene Auflösungen, die jedoch alle unter einem allgemeinen Gesetze enthalten sind, statt, so dass, wenn zum Beispiel die Lage eines Punktes durch eine zu geringe Anzahl von Bedingungen bestimmt werden soll, diese unendlich mannigfaltig seyn kann, doch aber keinesweges ganz willkürlich ist, sondern gewissen Beschränkungen unterworfen bleibt. Der verlangte Punkt kann z. B. sich auf dem Umfange eines Kreises befinden, und jeder in diese Kreislinie selbst fallende Punkt thut der Aufgabe Genüge; und auf ähnliche Weise bestimmt sich bei Aufgaben dieser Art allemal irgend eine gerade oder krumme Linie, oder auch eine ebne oder krumme Fläche, in welcher der verlangte Punkt nothwendig gefunden werden muss.

§. 6. Die so gefundenen krummen Linien oder Flächen werden nun durch eine Gleichung bestimmt. Sie sind, so wie wir sie hier abgeleitet annehmen, dadurch bestimmt, dass man *eine* Eigenschaft als bekannt voraus setzte, oder jeden Punkt in der krummen Linie oder Fläche, als einer gegebenen Bedingung entsprechend, anerkannte und daraus einen analytischen Ausdruck für sie bestimmte. Hieran aber knüpft sich nun die eigentliche Haupt-Aufgabe der ganzen analytischen Geometrie, — die Eigenschaften dieser Linien und Flächen vollständig kennen zu lernen.

§. 7. Was wir unter Eigenschaften einer bestimmten krummen Linie (und auf ähnliche Weise unter Eigenschaften einer krummen Fläche) verstehen, lässt sich hier nur oberflächlich erklären; doch wird Folgendes einen Begriff davon geben.

Wir lernen in der Geometrie zuerst die Kreislinie als eine solche kennen, deren sämmtliche Punkte vom Mittelpunkte gleich entfernt sind. Später aber finden wir, dass der Winkel im Halbkreise ein rechter ist, dass die im Kreise sich durchschneidenden geraden Linien sich so schneiden, dass das aus den Stücken der einen gebildete Rechteck gleich ist dem aus den Stücken der andern gebildeten Rechtecke u. s. w. Dieses sind also Eigenschaften der Kreislinie.

Auf ganz ähnliche Art entdecken wir auch an andern krummen Linien, die wir etwa als einer einzigen Bedingung entsprechend kennen gelernt haben, andre Eigenthümlichkeiten, und es ist nun das eigentliche Geschäft der analytischen Geometrie, diese in der Gleichung für die Curve zu finden, aus ihr gleichsam herauszulesen. Die analytische Geometrie muss daher Mittel angeben, um aus der Gleichung für die Curve zu bestimmen, welche Richtung diese in jedem Punkte habe, wo sie mehr oder minder gekrümmt sey, ob sie Durchschnittspunkte habe, in welchen nämlich ein Theil der Curve die Curve selbst durchschneidet, ob sie einen Raum ganz umschliesse u. s. w. Diese und ähnliche Bestimmungen, selbst Mittel, um die krumme Linie zu zeichnen, und andre, oft bei der ersten Auffindung der Curve gar nicht zu vermuthende Eigenthümlichkeiten lassen sich aus dem analytischen Ausdrucke für die Curve herleiten.

Für krumme Flächen finden ähnliche Untersuchungen statt.

§. 8. Da unter diesen Betrachtungen diejenigen die leichtesten sind, wo alle zu bestimmende Linien oder Punkte sich in einer Ebne befinden, so machen diese den ersten Haupttheil der analytischen Geometrie aus; erst im zweiten Haupttheile werden wir die Fälle abhandeln können, wo Punkte oder Linien vorkommen, die nicht in derselben Ebene liegen, und da erst kömmt auch die Lehre von krummen Flächen vor.

§. 9. Hiermit wäre zwar die Haupt-Eintheilung nach der Natur der Sache gegeben, aber es ist für die Erlernung der analytischen Geometrie zugleich eine Rücksicht auf die Vorkenntnisse des Schülers nöthig; daher fasse ich in diesem ersten Theile nur diejenigen Untersuchungen zusammen, welche ohne höhere Analysis verständlich sind, und behalte die höchst mannigfaltigen und wichtigen Untersuchungen, die nur mit Hülfe der Differential- und Integral-Rechnung ausführbar sind, einem zweiten Theile vor.

Sollte dieses unsystematisch scheinen, da hierdurch allerdings wohl einmal Lehren, die sich aneinander anschliessen, getrennt werden, weil die schwierigeren dem Anfänger nicht verständlich sind, so glaube ich doch diese Anordnung durch den unstreitig grossen Nutzen, den sie gewährt, rechtfertigen zu können. Es giebt keine bessere, alle Schwierigkeiten so gänzlich hebende Vorbereitung zur Differentialrechnung, als eine umständliche Entwickelung der leichtern Gegenstände der analytischen Geometrie, und es würde mir daher unpassend scheinen, wenn man die Darstellung dieser Lehren nicht so einrichten wollte, dass sie zu einer solchen Vorbereitung dienen könnte. — Hierzu ist dieser ganze erste Theil bestimmt; der zweite wird durch die mannigfaltigsten Anwendungen der höhern Analysis auf die Geometrie dem, welcher sich mit der Differential- und Integral-Rechnung zu beschäftigen anfängt, nicht bloss eine vielfache Uebung gewähren, sondern ihm auch bei manchen Lehren erst eine recht gründliche Einsicht in sie dadurch, dass sie ihm dieselben in geometrischer Form anschaulich darlegt, verschaffen.

Erste Abtheilung.

Untersuchungen über geometrische Bestimmungen, wo alle zu betrachtende Linien und Punkte in einer Ebne liegen.

Erster Abschnitt.

Ueber die Mittel, durch welche man, aus gegebnen Formeln, gerade Linien, bloss ihrer Länge nach, ohne Rücksicht auf eine bestimmte Lage, darstellen kann.

§. 1. Bemerkungen. Wenn die Länge einer Linie durch Formeln ausgedrückt wird, so kann dieses entweder so geschehen, dass jedes Glied der Formel selbst ganz einfach eine Linie angiebt, z. B. $x = a + b$; $z = a - b$, oder es kann durch Glieder geschehen, die aus Factoren, Divisoren, Wurzelgrössen u. s. w. zusammen gesetzt sind. In jenem Falle ist gar keine Schwierigkeit vorhanden, indem unsre gesuchte Linie sogleich als Summe oder Unterschied gegebner Linien bestimmt wird; in dem letztern Falle muss jedes einzelne Glied der Formel durch eine Linie dargestellt werden können, weil ja doch die verlangte Linie nur durch Verbindung mehrerer Theile, die selbst Linien sind, entstehen kann.

§. 2. Lehrsatz. Wenn a, b, c Linien bedeuten und es soll $x = \frac{b \cdot c}{a}$ seyn, so ist die gesuchte Linie das vierte Glied in der Proportion $a : b = c : x$; sie kann also geometrisch (nach Geom. §. 278.) construirt werden.

§. 3. Lehrsatz. Wenn $x = \sqrt{(a \cdot b)}$, so ist x die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen a und b, und lässt sich durch Zeichnung eines Kreises bestimmen (Geom. §. 294.).

§. 4. Aufgabe. Wenn alle vorkommende Buchstaben Linien bedeuten, und es soll $x = \frac{a\,b\,c}{d \cdot e}$ seyn, diese Linien geometrisch darzustellen.

Auflösung. Man suche zu d, a, b die dritte Proportionallinie, die z heissen mag, so ist $d : a = b : z$; suche dann das vierte Glied der Proportion $e : c = z : x$, oder die vierte Proportionallinie zu den drei Linien e, c, z, so ist x die verlangte Linie; denn es ist $z = \frac{a\,b}{d}$ und $x = \frac{c\,z}{e} = \frac{a\,b\,c}{d\,e}$.

§. 5. Es erhellt von selbst, dass Ausdrücke, wie $\frac{a^2 b^2}{c^2 d} = x$ eben so durch Bestimmung von drei Linien z, y, x construirt werden, wenn man $c : a = a : z$; $c : z = b : y$; $d : b = x : y$ sucht.

§. 6. Bemerkung. In allen diesen Ausdrücken hat der Zähler einen linearischen Factor mehr als der Nenner, und so wird es immer in richtig dargestellten Ausdrücken, welche die Länge einer Linie angeben sollen, statt finden. Gleichungen, wie $x = ab$, können freilich vorkommen, namentlich da, wo man für eine oder einige Linien schon Zahlen in die Rechnung eingeführt hat; in solchen Fällen müsste man, wenn a, b Linien sind, sich eine schon bestimmte Längen-Einheit denken, auf welche alles zurückgeführt wäre, und nun sagen, $x = a.b$ heisse, es solle sich jene Einheit zu a, wie b zu x verhalten. In gut angeordneteten allgemeinen Formeln kann so etwas nicht vorkommen.

§. 7. Erklärung. Man sagt von Gleichungen, wo im Zähler ein linearischer Factor mehr als im Nenner vorkömmt, sie haben nur eine Dimension. Gleichungen wie $x^2 = \frac{a^3 b}{c^2} + d^2$ haben, wenn alle Grössen Linien bedeuten, zwei Dimensionen u. s. w. Offenbar dagegen enthält der Ausdruck $\sqrt{ab}$ oder $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ auch nur eine Dimension. Geometrisch nämlich bedeutet $\sqrt{ab}$ die Seite des Quadrates, dessen Inhalt gleich ist dem Rechtecke, welches die Seiten a, b hat.

§. 8. Aufgabe. Wenn alle Buchstaben Linien bedeuten, eine durch $x = \frac{abc}{de + fg}$ gegebne Linie zu zeichnen.

Auflösung. Man sucht zu e, f, g die vierte Proportionallinie $= z$, damit $f.g = e.z$ sey, so ist $x = \frac{abc}{e.(d+z)}$ und x wird, wie in §. 4., durch Aufsuchung zweier vierter Proportionallinien gefunden.

§. 9. Aufgabe. Die Linie $x = \frac{abcd}{efg + hik}$ zu zeichnen.

Auflösung. Man suche zu g, i, k die vierte Proportionallinie z, damit $ik = g.z$ sey; dann suche man zu f, h und z die vierte Proportionallinie y, um $y.f = hz$ zu erhalten. Dadurch ist x auf den Ausdruck $x = \frac{abcd}{efg + hik} = \frac{abcd}{g(ef + hz)} = \frac{abcd}{f.g(e+y)}$ gebracht, und wenn man nun nach §. 5. $f : a = b : u$; ferner $g : c = u : v$ setzt, so wird $x = \frac{ucd}{g(e+y)} = \frac{vd}{e+y}$, und x ist die vierte Proportionallinie zu $(e+y)$, v und d.

§. 10. Eben so verfährt man, wenn der Nenner mehrere aus drei Factoren zusammen gesetzte Theile enthält, nur wird das Verfahren da umständlicher. Wie ganz ähnliche Umgestaltungen auch da, wo die Glieder des Nenners vier Factoren enthalten, statt finden, lässt sich leicht übersehen.

§. 11. Lehrsatz. Wenn $x^2 = a^2 + b^2$, so ist x die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Catheten $= a$ und $= b$ sind. Wenn $x^2 = c^2 - d^2$, so ist x die Cathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse $= c$ und andre Cathete $= d$ ist (Geom. §. 177.).

§. 12. Hiernach construirt man leicht Ausdrücke wie $x = a + \sqrt{(b^2 + c^2 - d^2)}$. Man zeichnet nämlich zuerst ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Catheten b und c sind; die Hypotenuse $= z$ dieses Dreiecks wird durch $z^2 = b^2 + c^2$ bestimmt. Zeichnet man nun zweitens ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse $= z$ und Cathete $= d$, so ist das verlangte x gleich der Summe der Linien a und der andern Cathete des zuletzt erwähnten Dreiecks.

§. 13. Kämen Ausdrücke wie $\sqrt{(a^2 + bc)}$ vor, so müsste man zuerst statt des Rechtecks aus den Linien b, c ein eben so grosses Quadrat, dessen Seite $z = \sqrt{bc}$, suchen, um dann den Ausdruck $\sqrt{(a^2 + z^2)}$ zu construiren.

Aehnliche Veränderungen muss man vornehmen, wenn die unter dem Wurzelzeichen stehenden Ausdrücke zusammen gesetzter sind, indem man jedes einzelne Glied den von §. 4. an gegebnen Regeln gemäss behandelt.

Es sey $x = b + \sqrt{\left(\frac{amcd}{de + ac} + \frac{d^2 f}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}\right)}$, so muss zuerst $\frac{mcd}{de + ac}$ nach §. 8. als Linie $= z$ dargestellt und eben so $\frac{d^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$ als Linie $= y$ dargestellt werden; alsdann verwandelt man die Rechtecke, deren Inhalt durch $= az$ und $= f.y$ ausgedrückt ist, in Quadrate und hat dann nach §. 11. die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks zu suchen. Und auf ähnliche Art in allen Fällen.

§. 14. Bemerkung. Gleichungen, in welchen Cubikwurzeln oder höhere Wurzeln vorkommen, lassen sich nicht durch Regeln der Elementargeometrie construiren; diese müssen wir daher von unsrer jetzigen Betrachtung ganz ausschliessen.

Zweiter Abschnitt.

Wie man die Lage eines Punktes gegen bekannte Linien durch Coordinaten oder durch Winkel und Abstand bestimmt. — Gleichungen für verschiedene Systeme von Coordinaten.

§. 15. Bemerkung. Wenn man die Lage eines Punktes, der sich in einer gegebnen Ebne befindet, angeben will, so geschieht dieses am bequemsten, indem man eine gerade Linie in derselben Ebne als bekannt annimmt, und jenes Punktes Lage in Vergleichung gegen sie bestimmt. Diese erhält man dadurch, dass man des Punktes Abstände von jener geraden Linie angiebt, und zugleich bestimmt, neben welchem Punkte jener Linie sich der zu bestimmende Punkt befindet. Zu diesem Zwecke nimmt man auf jener geraden Linie AB (Fig. 1.) einen willkürlichen Punkt A als Anfangspunkt an, von welchem die auf AB zu messenden Abstände an gerechnet werden. Zieht man nun von einem zu bestimmenden Punkte X die Abstandslinie XZ gegen jene Linie unter einem bestimmten Winkel XZB geneigt, so ist die Lage des Punktes X gegen jene Linie bekannt, wenn AZ, XZ und der Winkel XZB gegeben sind.

§. 16. Erklärung. Man nennt AB die Abscissenlinie, auch wohl die Axe, A den Anfangspunkt der Abscissen, AZ die Abscisse für den zu bestimmenden Punkt X, ZX die Ordinate desselben, beide Linien AZ, ZX auch die Coordinaten des Punktes X oder seine einander zugeordneten Abstände, endlich XZB den Coordinatenwinkel.

§. 17. Bemerkung. Da der zu bestimmende Punkt X sowohl einer von A gegen B hin gerechneten Abscisse, als einer von A gegen C hin gerechneten Abscisse entsprechen kann; da er ferner eben so gut an der andern Seite der Linie CB liegen kann: so tritt hier die Nothwendigkeit ein, die Abscissen und Ordinaten in jedem einzelnen Falle als positiv oder negativ anzugeben. Man setzt daher fest, nach welcher Seite von dem Anfangspunkte A man die positiven Abscissen rechnen will, und nennt die nach der entgegengesetzten Richtung genommenen Abstände negative Abscissen; und eben so werden die auf der einen Seite von CB liegenden Ordinaten als positiv, die auf der andern Seite von CB liegenden, mit den vorigen parallel gezogenen Ordinaten als negativ angesehen.

§. 18. Bemerkung. Ist ein Punkt X (Fig. 1.) einmal durch Coordinaten in Beziehung auf eine Linie AB bestimmt, so kann man auch die Lage eben dieses Punktes gegen eine andre Abscissenlinie bestimmen, und überhaupt seine Lage auf mancherlei Art angeben. Am leichtesten ist das, wenn der Coordinatenwinkel ein rechter ist.

§. 19. Aufgabe. Es ist (Fig. 2.) des Punktes X Lage durch rechtwinklige Coordinaten $AZ = x$, $ZX = z$ angegeben; wird nun eine neue Ab-

scissenlinie CD in bekannter Lage gegen die vorige AB gezogen, so soll eine Bestimmung für die Abscissen auf dieser und für die zugehörigen Ordinaten gefunden werden.

Vorbereitung zur Auflösung. Da die Lage der neuen Abscissenlinie gegen die vorige bekannt seyn soll, so muss sowohl der Winkel DFB, den beide mit einander machen, als die Entfernung des Durchschnittspunktes F von dem Anfangspunkte A der Abscissen bekannt seyn. Es sey also $BFD = \alpha$, $AF = f$. Um nun die Lage des Punktes X in Beziehung auf die Linie CD zu bestimmen, sey XU gegen CD senkrecht gezogen, und man nenne $FU = u$, $UX = v$, so werden diese bestimmt durch Hülfe zweier, durch Z mit FD und mit UX parallel gezogener Linien, deren erste die verlängerte XU in V, die andre dagegen die CD in W schneidet.

Auflösung. Da $AZ = x$, $AF = f$, also $FZ = x - f$, u. $ZX = z$, $DFZ = \alpha$, so ist $FU = u = FW + WU = (x - f)\ Cos\ \alpha + z\ .\ Sin\ \alpha$, weil $WU = ZV = ZX\ .\ Sin\ ZXV$, und $ZXV = \alpha$ ist. Dagegen $UX = v = VX - VU = z\ .\ Cos\ \alpha - (x - f)\ Sin\ \alpha$.

Wollte man umgekehrt x und z durch u und v bestimmen, so zeigen die durch U mit x und z parallel gezogenen Linien US, UT, dass

$$x = f + u\ .\ Cos\ \alpha - v\ .\ Sin\ \alpha$$

und $z = u\ .\ Sin\ \alpha + v\ .\ Cos\ \alpha$ ist.

§. 20. Diese Gleichungen für Coordinaten, die sich auf eine andre Abscissenlinie beziehen, sind zwar nur aus Betrachtung eines einzigen Falles hergeleitet, sie gelten aber, wenn wir die Begriffe des Positiven und Negativen richtig anwenden, und die trigonometrischen Ausdrücke richtig gebrauchen, für jede andre Lage des Punktes X. Um diese richtigen Beziehungen zu erhalten, müssen wir bei jeder Lage, welche X haben mag, dabei fest beharren, dass wir, so wie es hier bisher geschehen ist, die positiven x und u auf den Schenkeln des Winkels α selbst nehmen, dass wir die z positiv nennen, wenn sie an derselben Seite von AB liegen, wo sich der Winkel α befindet, und die v positiv nennen, wenn der Punkt X an der Seite von FU liegt, welche wir als ausserhalb des Winkels α liegend angeben würden. Für einen Punkt wie Y wäre also x positiv, weil der Punkt an der Seite von A, auf AB gerechnet, liegt, wohin wir die positiven Abscissen rechnen; z ist negativ, weil Y sich nicht mit X an einerlei Seite von AB befindet. Aus eben dem Grunde ist v negativ, weil Y an der andern Seite der Linie CD liegt; und auch u ist negativ, weil die Senkrechte von Y auf CD nicht an derselben Seite des Anfangspunktes F einschneidet, wo sich XU befand, also FR als eine negative Abscisse anzusehen ist.

§. 21. Haben wir auf diese Weise die Lage eines Punktes X als Normalfall angenommen, wo x, z, u, v positiv sind, so würden wir, bloss durch

Betrachtung der Formel über jeden andern Fall aus den gegebnen x und z auf folgende Weise entscheiden.

Es sey x negativ und z positiv, so würden die vorhin gefundenen Formeln $u = (x - f)\ Cos\ \alpha + z\ .\ Sin\ \alpha$,
$v = z\ .\ Cos\ \alpha - (x - f)\ Sin\ \alpha$,
übergehen in $u = (-x - f)\ Cos\ \alpha + z\ .\ Sin\ \alpha$,
$v = z\ .\ Cos\ \alpha - (-x - f)\ Sin\ \alpha$,
das heisst, um u zu finden, müsste man von $z\ .\ Sin\ \alpha$ jetzt subtrahiren $(x + f)\ Cos\ \alpha$, und um v zu finden, müsste man jetzt zu $z\ .\ Cos\ \alpha$ addiren $(x + f\ Sin\ \alpha$.

Eben dieses ergiebt die diesem Falle gemäss gezeichnete Figur (Fig. 3.), wo die Buchstaben eben so wie vorhin gebraucht sind; denn hier ist $u = FU = WU - WF$ und $WU = ZV = z\ .\ Sin\ \alpha$; $WF = (x + f)\ Cos\ \alpha$, weil $AZ = x$, und eben so $v = UX = VX + UV = z\ .\ Cos\ \alpha + FZ\ .\ Sin\ \alpha$ und FZ besteht aus f und x.

§. 22. Man kann auch aus der Betrachtung der Formeln

$$u = (x - f)\ Cos\ \alpha + z\ .\ Sin\ \alpha,$$
$$v = z.\ Cos\ \alpha - (x - f)\ Sin\ \alpha,$$

die Fälle sogleich bestimmen, wo u und v positiv oder negativ werden.

Wir wollen α immer als einen spitzen Winkel annehmen, und nun die einzelnen Fälle betrachten. Sind x und z beide positiv, und x grösser als f, so liegt der Punkt zwischen den Schenkeln des rechten Winkels GFB, und es wird u immer positiv, v hingegen kann negativ werden, wenn $(x - f)\ Sin\ \alpha > z\ .\ Cos\ \alpha$. Diesen letztern Fall stellt Fig. 4. vor, wo der Punkt X zwischen den Schenkeln des Winkels $DFB = \alpha$ liegt.

Bleibt sowohl x als z positiv, aber x ist kleiner als f, so ist v gewiss positiv, u aber kann negativ seyn, wenn, wie in Fig. 5., $z\ .\ Sin\ \alpha$ kleiner als $(f - x)\ Cos\ \alpha$ ist.

Für x negativ und z positiv, ist, wie in Fig. 3., v allemal positiv, weil alle Punkte, die zwischen den Schenkeln des rechten Winkels GFZ liegen (wozu auch die eben erwähnten gehören), positiven v entsprechen; u kann positiv oder negativ werden.

Ist z negativ und $(x - f)$ negativ, so ist u gewiss negativ, weil der Werth von u aus zwei negativen Gliedern besteht; v hingegen kann positiv seyn, wenn das Glied $(x - f)\ Sin\ \alpha$ grösser als $z\ .\ Cos\ \alpha$ ist, oder negativ im entgegen gesetzten Falle. Den ersten dieser beiden Fälle stellt Fig. 6. dar, wo $u =$ der Summe der auf der negativen Seite liegenden $FW = (x + f)\ Cos\ \alpha$ und $z\ .\ Sin\ \alpha = ZV = WU$ ist; v hingegen $= WZ - XV$. Der zweite Fall kömmt in Fig. 7. vor, wo XV grösser als WZ ist.

Endlich wenn $(x - f)$ positiv, z negativ ist, so ist v gewiss negativ, weil es aus zwei negativen Theilen besteht, u kann aber positiv oder negativ

werden, je nachdem das Perpendikel von X auf CD, von F gegen D zu oder gegen C zu einschneidet (Fig. 8.).

§. 23. Eben so richtig bleibt unsre Formel, wenn α ein stumpfer Winkel ist.

Ich will bei der Betrachtung dieses Falles, da α stumpf ist, $f = o$ annehmen, oder den Durchschnittspunkt beider Abscissenlinien selbst als Anfangspunkt der x ansehen. Da wir nun im Normalfalle denjenigen Winkel mit α bezeichneten, der zwischen den positiven x und u eingeschlossen ist, so würde, wenn wir noch immer die positiven x als nach der rechten Seite liegend ansehen, Fig. 9. unsern Fall darstellen, und $DAB = \alpha$ seyn.

Die Formeln $u = x \,.\, Cos\,\alpha + z \,.\, Sin\,\alpha;$
$v = z \,.\, Cos\,\alpha - x \,.\, Sin\,\alpha;$

geben nun, da $Cos\,\alpha$ für stumpfe Winkel negativ ist, für v eine Summe zweier negativer Grössen, also einen negativen Werth, so lange x und z selbst positiv sind. Da v negativ heisst, wenn der Punkt X zwischen den Schenkeln des Winkels α oder wenigstens an eben der Seite der Linie CD liegt, wo sich der Winkel α befindet, so ist hier, wo $DAB = \alpha$ ist, in Fig. 9. der Fall, wo $v = UX$ auf der negativen Seite aus den Stücken UV, VX zusammen gesetzt ist.

Die Betrachtung der einzelnen Fälle, wo x und z als positiv oder negativ vorkommen, würde uns auch hier zeigen, wie richtig die Formel immer die Werthe von u und v angiebt. Um nur an einem Falle noch die Betrachtung zu wiederholen, sey x negativ, z positiv; dann bedeutet in der allgemeinen Formel $u = x \,.\, Cos\,\alpha + z \,.\, Sin\,\alpha$ das erste Glied eine positive Grösse, weil zwei negative Grössen x und $Cos\,\alpha$ als Factoren darin vorkommen, und auch das zweite Glied eine positive Grösse; es erscheint also u als Summe zweier positiver Grössen. Dagegen giebt $v = z \,.\, Cos\,\alpha - x \,.\, Sin\,\alpha$ jetzt das erste Glied negativ, das zweite positiv, und v ist nur dann eine positive Grösse, wenn ohne Rücksicht auf die Zeichen $x \,.\, Sin\,\alpha > z \,.\, Cos\,\alpha$ ist. Wir können die Fig. 2. gebrauchen, um diesen Fall zeichnend darzustellen *). Sollen nämlich hier, von F an gerechnet, jetzt die nach der linken Seite liegenden x positiv heissen, und die von F nach D gerechneten u positiv heissen, so ist nun der zwischen diesen eingeschlossene Winkel $AFD = \alpha$ ein stumpfer Winkel. Die hier gezeichnete Lage von X entspricht also, so wie wir jetzt rechnen, einem negativen x und positiven z, und $v = UX$ heisst negativ, so lange X zwischen den Schenkeln des Winkels $AFD = \alpha$ liegt, das heisst, so lange ZW kleiner

*) Anfänger werden wohl thun, nicht bloss hier die übrigen Fälle zu betrachten, sondern auf noch mannigfaltigere Weise die Lage der positiven und negativen Grössen zu verwechseln, um sich nicht an eine einzige Bestimmung des Positiven und Negativen zu gewöhnen.

als VX, oder $x \,.\, Sin\, \alpha$ kleiner als $z \,.\, Cos\, ZXV = z \,.\, Cos\, (180^\circ - \alpha)$ ist; u aber ist aus den zwei positiven Stücken FW, WU zusammen gesetzt.

§. 24. Bemerkung. Diese sorgfältige Betrachtung aller einzelner, in der Gleichung enthaltener Fälle, die sich leicht noch weiter durchführen liesse, gewährt die wichtige Ueberzeugung, die sich in der Folge immer bestätigen wird, dass die richtige Einführung des Positiven und Negativen in die Formel uns immer die geometrische Lage richtig angiebt, und dass also die, für einen einzigen Fall richtig hergeleiteten Formeln nun als für alle Fälle geltend können angesehen werden, wenn man sie richtig an jenen Normalfall anknüpft.

§. 25. Aufgabe. Es ist die Lage des Punktes X in Beziehung auf die Abscissenlinie AB (Fig. 10.) durch rechtwinklige Coordinaten $AZ = x$, $ZX = z$ gegeben; man verlangt eine Bestimmung durch schiefwinklige Coordinaten, indem man die Abscissen $AD = u$ auf derselben Abscissenlinie, die Ordinaten $DX = v$ aber unter dem Winkel $XDZ = \beta$ gegen sie geneigt nimmt.

Auflösung. Es ist $v = \frac{z}{Sin\, \beta}$ und $u = x - z \,.\, Cotang\, \beta$. Eben so ist auch $z = v \,.\, Sin\, \beta$ und $x = u + v \,.\, Cos\, \beta$.

§. 26. Hier müsste man β als stumpf ansehen, wenn die neue Ordinate so wie EX gezogen ist. Denn habe ich einmal bestimmt, dass β derjenige Winkel seyn soll, welcher zwischen den wachsenden positiven x und der schiefen Ordinate eingeschlossen ist, so darf ich in diesem zweiten Falle nicht den Winkel XEZ mit β bezeichnen, sondern es ist $XEB = \beta$, und da für stumpfe Winkel $Cotang\, \beta$ negativ ist, so giebt unsre Formel u ganz richtig als Summe zweier positiver Grössen an.

Hätte ich XEZ mit β bezeichnen wollen, so wäre das zwar erlaubt; aber dann nähme ich eben dadurch einen neuen Normalfall an, welchem gemäss die Formel eine andre würde. Die hier wiederholt angestellte Betrachtung will also nur sagen, dass man der einmal gewählten Beziehung fortwährend getreu bleiben, und ihr gemäss die ganze Untersuchung durchführen muss.

§. 27. Aufgabe. Es ist die Lage des Punktes X (Fig. 11.) durch schiefwinklige Coordinaten $AZ = x$, $ZX = z$, in Beziehung auf die Abscissenlinie AB gegeben; nun werde eine neue Abscissenlinie AC, unter dem gegebnen Winkel $CAB = \alpha$ gegen die vorigen geneigt, gezogen, und eine Bestimmung der Lage des Punktes in Beziehung auf sie vermittelst schiefwinkliger Coordinaten gesucht.

Vorbereitung zur Auflösung. Wir wollen den Durchschnittspunkt A beider Abscissenlinien zugleich als Anfangspunkt der gegebnen Abscisse $AZ = x$ und der zu bestimmenden Abscisse $AU = u$ annehmen. Der Winkel, unter welchem die gegebne Ordinate $ZX = z$ gegen die Abscissenlinie

AB geneigt ist, muss bekannt seyn, $XZB = \gamma$, und eben so ist der Coordinatenwinkel $XUC = \delta$ für die neuen Coordinaten bekannt.

Zieht man nun durch Z, wo die gegebnen Coordinaten einander treffen, Linien mit den zu bestimmenden Coordinaten parallel, so ergiebt sich leicht der Werth von $AU = u$ und $UX = v$.

Auflösung. Es ist $u = \frac{x \,.\, Sin\,(\alpha + \delta)}{Sin\,\delta} + \frac{z \,.\, Sin\,(\delta + \alpha - \gamma)}{Sin\,\delta}$;

$$v = \frac{z \,.\, Sin\,(\gamma - \alpha)}{Sin\,\delta} - \frac{x \,.\, Sin\,\alpha}{Sin\,\delta}.$$

Beweis. Im Dreieck AWZ ist ZW mit UX parallel, also $AWZ = \delta$, daher $AW : x = Sin\,(\alpha + \delta) : Sin\,\delta$;
$ZW : x = Sin\,\alpha \quad : Sin\,\delta$;
und im Dreieck XZV ist $XZV = \gamma - \alpha$, weil $XZB = \gamma$, $VZB = \alpha$, und $ZXV = \delta - (\gamma - \alpha)$, folglich $ZV : z = Sin\,(\delta - \gamma + \alpha) : Sin\,\delta$;
$VX : z = Sin\,(\gamma - \alpha) : Sin\,\delta$.

§. 28. Diese Formeln kommen, wenn man $\gamma = \delta = 90°$ setzt, auf die in §. 19. (wo jetzt $f = o$ ist) zurück, indem dann
$Sin\,(\alpha + \delta) = Sin\,(90° + \alpha) = Cos\,\alpha$
und $Sin\,(\gamma - \alpha) = Sin\,(90° - \alpha) = Cos\,\alpha$
$Sin\,(\delta + \alpha - \gamma) = Sin\,\alpha$;
aber $Sin\,\delta = 1$ ist.

§. 29. Aus den Formeln $u = \frac{x \,.\, Sin\,(\alpha + \delta) + z \,.\, Sin\,(\alpha + \delta - \gamma)}{Sin\,\delta}$,

$$v = \frac{z \,.\, Sin\,(\gamma - \alpha) - x \,.\, Sin\,\alpha}{Sin\,\delta},$$

lassen sich leicht Ausdrücke herleiten, die x und z angeben, wenn u und v gegeben sind. Da nämlich δ in Beziehung auf u und v fast eben das ist, was γ in Beziehung auf x und z war, so muss man nur diese Grössen auf eine richtige Weise mit einander vertauschen. Indess kann diess wegen einiger Verschiedenheit der Lage nicht so unmittelbar geschehen *); sondern da γ zwischen den Schenkeln des Winkels α liegt, und zwischen der positiven Abscisse und der durch den Raum des Winkels α hindurch gehende Ordinate eingeschlossen ist, so haben $BZX = \gamma$ und $CUV = 180° - \delta$ eine übereinstimmende Lage, die nur in der Bezeichnung noch darin verschieden ist, dass der letztere Winkel nicht v, sondern $-v$ zum Schenkel hat, wie sich das am deutlichsten in Fig. 11. zeigt. Man muss daher γ mit $180° - \delta$, x mit u, z mit $-v$ verwech-

*) Es hätte sich wohl so einrichten lassen, dass die Vertauschung noch mehr unmittelbar statt fände; ich habe dieses aber vermieden, um den Anfänger an Betrachtungen, wie die hier nöthigen, zu gewöhnen.

seln, um aus jenen Gleichungen ohne alle Rechnung die Werthe von x und z abzuleiten, die daher sind $x = \frac{u . Sin(\alpha + 180° - \gamma) - v . Sin(\alpha + 180° - \gamma - 180° + \delta)}{Sin\,(180° - \gamma)}$;

$$- z = \frac{- v . Sin\,(180° - \delta - \alpha) - u . Sin\,\alpha}{Sin\,(180° - \gamma)};$$

$$\text{oder } x = \frac{u . Sin\,(\gamma - \alpha) - v . Sin\,(\alpha + \delta - \gamma)}{Sin\,\gamma};$$

$$z = \frac{v . Sin\,(\alpha + \delta) + u . Sin\,\alpha}{Sin\,\gamma}.$$

Eben das würde eine geometrische Betrachtung ergeben, wenn man (Fig. 12.) US, UT durch U mit den Coordinaten x, z parallel zöge, indem $AT = \frac{u . Sin\,(\gamma - \alpha)}{Sin\,\gamma}$; $SU = \frac{v . Sin\,(\alpha + \delta - \gamma)}{Sin\,\gamma}$; $ZS = \frac{u . Sin\,\alpha}{Sin\,\gamma}$ und $SX = \frac{v . Sin\,(\alpha + \delta)}{Sin\,\gamma}$ ist.

Aber auch bloss durch algebraische Umformung der Werthe

$$u = \frac{x . Sin\,(\alpha + \delta) + z . Sin\,(\alpha + \delta - \gamma)}{Sin\,\delta};$$

$$v = \frac{z . Sin\,(\gamma - \alpha) - x . Sin\,\alpha}{Sin\,\delta},$$

gelangt man zu jenen Ausdrücken. Multiplicire ich nämlich die erste Formel durch $Sin\,\alpha$, die zweite durch $Sin\,(\alpha + \delta)$, so ist die Summe beider

$$u . Sin\,\alpha + v . Sin\,(\alpha + \delta) = \frac{z . Sin\,\alpha . Sin\,(\alpha + \delta - \gamma) + z . Sin\,(\alpha + \delta) . Sin\,(\gamma - \alpha)}{Sin\,\delta}.$$

Es ist aber

$Sin\,\alpha . Sin\,(\alpha + \delta - \gamma) = Sin\,\alpha . Sin\,\delta . Cos\,(\alpha - \gamma) + Sin\,\alpha . Cos\,\delta . Sin\,(\alpha - \gamma)$,
$Sin\,(\alpha + \delta) . Sin\,(\gamma - \alpha) = Sin\,\alpha . Cos\,\delta . Sin\,(\gamma - \alpha) + Sin\,\delta . Cos\,\alpha . Sin\,(\gamma - \alpha)$
und die Summe beider, weil $Sin\,(\gamma - \alpha) = - Sin\,(\alpha - \gamma)$ (Trigon. §. 31.) ist,
$= Sin\,\delta\,(Sin\,\alpha . Cos\,(\alpha - \gamma) - Cos\,\alpha . Sin\,(\alpha - \gamma)) = Sin\,\delta . Sin\,\gamma$.

Hieraus also $u . Sin\,\alpha + v . Sin\,(\alpha + \delta) = z . Sin\,\gamma$,

$$z = \frac{v . Sin\,(\alpha + \delta) + u . Sin\,\alpha}{Sin\,\gamma}.$$

Hätte ich auf ganz ähnliche Weise den Werth von u durch $Sin\,(\gamma - \alpha)$, den Werth von v durch $Sin\,(\alpha + \delta - \gamma)$ multiplicirt, so wäre der Unterschied der so veränderten Gleichungen

$$u . Sin\,(\gamma - \alpha) - v . Sin\,(\alpha + \delta - \gamma) = x . \left(\frac{Sin\,(\alpha + \delta) . Sin\,(\gamma - \alpha) + Sin\,\alpha . Sin\,(\alpha + \delta - \gamma)}{Sin\,\delta}\right)$$

$$= \frac{x .}{Sin\,\delta} \left\{ \begin{array}{l} Sin\,\alpha . Cos\,\delta . Sin\,(\gamma - \alpha) + Sin\,\delta . Cos\,\alpha . Sin\,(\gamma - \alpha) \\ + Sin\,\alpha . Sin\,\delta . Cos\,(\alpha - \gamma) + Sin\,\alpha . Cos\,\delta . Sin\,(\alpha - \gamma) \end{array} \right\}$$

$= x \,.\, (Cos\, \alpha \,.\, Sin(\gamma - \alpha) + Sin\, \alpha \,.\, Cos\, (\gamma - \alpha)) = x \,.\, Sin\, \gamma$,

oder $x = \dfrac{u \,.\, Sin(\gamma - \alpha) - v \,.\, Sin\, (\alpha + \delta - \gamma)}{Sin\, \gamma}$.

§. 30. Bemerkung. Die Bestimmung der Lage eines Punktes gegen eine gegebne gerade Linie und einen darin als bekannt angenommenen Anfangspunkt kann noch auf eine andre Art geschehen, als durch Coordinaten. Ist nämlich (Fig. 13.) X der Punkt, dessen Lage bestimmt werden soll, so ist diese bekannt, wenn man den Abstand $AX = y$ von dem bekannten Punkte A, und den Winkel $XAB = \varphi$ kennt, den jene Abstandslinie mit der bekannten Linie AB macht.

§. 31. Aufgabe. Die Lage des Punktes X (Fig. 13.) ist durch rechtwinklige Coordinaten $AZ = x$, $ZX = z$ bestimmt; man sucht Ausdrücke für den Abstand $AX = y$ und den Winkel $XAB = \varphi$.

Auflösung. Es ist $y^2 = x^2 + z^2$ und $tang\, \varphi = \dfrac{z}{x}$.

§. 32. Wären y und φ gegeben, so hätte man auch $x = y \,.\, Cos\, \varphi$; $z = y \,.\, Sin\, \varphi$.

§. 33. Aufgabe. Die Lage des Punktes X (Fig. 14.) ist durch schiefwinklige, unter dem Coordinatenwinkel $XUB = \beta$ gegen einander geneigte Coordinaten $AU = u$, $UX = v$ bestimmt; man sucht Gleichungen, welche den Abstand $= y$ des Punktes X von einem in der Abscissenlinie liegenden gegebnen Punkte C, und die Richtung der Abstandslinie angeben.

Auflösung. Es sey des Punktes C Abstand von $A = a$, und C befinde sich auf derjenigen Seite des Anfangspunktes A, wo die positiven u liegen, so findet man für den Abstand $CX^2 = y^2 = v^2 + 2v\, (u - a) \,.\, Cos\, \beta + (u - a)^2$ und für den Winkel $XCB = \varphi$,

$$tang\, \varphi = \frac{v \,.\, Sin\, \beta}{u - a + v \,.\, Cos\, \beta}.$$

Beweis. Die erste Formel ist aus Trigon. §. 65. bekannt, nur dass hier β der äussere Winkel am Dreieck ist. Die zweite Formel wird gefunden, indem man die Senkrechte $WX = v \,.\, Sin\, \beta$ und ihren Abstand von U, $= v \,.\, Cos\, \beta$ sucht, und dann $\dfrac{WX}{CW} = tang\, \varphi$ bestimmt.

Hätte ich die Figur so gezeichnet, wie Fig. 15., dass β ein stumpfer Winkel wäre, so würde $tang\, \varphi = \dfrac{WX}{a - u - UW} = \dfrac{v \,.\, Sin\, \beta}{a - u + v \,.\, Cos\, \beta}$ seyn, und die Formel gilt also in beiden Fällen.

§. 34. Umgekehrt könnte u und v durch y und φ bestimmt werden; denn es ist $v = \dfrac{y \,.\, Sin\, \varphi}{Sin\, \beta}$ und $u - a = \dfrac{y \,.\, Sin(\beta - \varphi)}{Sin\, \beta}$.

§. 35. Aufgabe. Zu Bestimmung der Lage von X ist (Fig. 16.) die Entfernung $CX = y$ von dem bekannten Punkte C, und der Winkel $XCB = \varphi$, den diese Abstandslinie mit der bekannten Linie CB macht, gegeben. Man nimmt nun einen andern Punkt D, und eine durch ihn gezogene Linie DE von bekannter Lage an, und verlangt den Abstand $DX = w$ und den Winkel, welchen die Abstandslinie mit DE einschliesst, $XDE = \psi$ zu bestimmen.

Vorbereitung zur Auflösung. Da die Lage des Punktes D und der Linie DE bekannt seyn soll, so ist gegeben die Entfernung des Punktes G, wo DE, CB einander schneiden, von dem Punkte C, sie sey $GC = a$; ferner muss gegeben seyn der Abstand des Punktes D von eben jenem Durchschnittspunkte G, $GD = b$, endlich der Winkel, welchen beide Linien mit einander bilden, $DGB = \gamma$.

Auflösung. Da $GX = \sqrt{(a^2 + y^2 + 2ay \cdot Cos\,\varphi)}$ und $tang\,XGB = \frac{y \cdot Sin\,\varphi}{a + y \cdot Cos\,\varphi}$ gefunden werden kann, folglich auch DGX bekannt ist, so erhält man $tang\,\psi = \frac{-GX \cdot Sin\,XGD}{b - GX \cdot Cos\,XGD}$

und $DX^2 = GX^2 + b^2 - 2b \cdot GX \cdot Cos\,DGX$.

§. 36. Anmerkung. Man könnte zwar noch mehrere Aufgaben, wie eine Bestimmung der Lage zu einer anders angeordneten Bestimmung dienen kann, angeben; die hier mitgetheilten aber reichen fast in allen Fällen völlig aus.

Dritter Abschnitt.

Bestimmung der Lage eines Punktes aus andern Bedingungen.

§. 37. Bemerkung. Wenn die Lage eines Punktes nicht geradezu durch Coordinaten oder durch Winkel und Abstand gegeben ist, so sucht man gewöhnlich aus den gegebenen Bedingungen jene Bestimmungen abzuleiten. Die Bedingungen, durch welche die Lage eines Punktes kann angegeben werden, sind unendlich mannigfaltig; ich werde daher hier nur einige Beispiele betrachten, welche zeigen, wie man ungefähr auch in andern Fällen verfahren muss.

§. 38. Aufgabe. Die Lage eines Punktes X (Fig. 17.) ist durch seine Abstände von zwei Punkten A und B gegeben, deren Entfernung von einander bekannt ist; man verlangt dieses Punktes X Lage durch senkrechte Coordinaten zu bestimmen, indem man die Abscissen auf der durch A und B gezognen geraden Linie und A als Anfangspunkt annimmt.

Auflösung. Es sey $AB = a$, $AX = b$, $BX = c$, von X sey auf AB die Senkrechte ZX gesetzt, und nun $AZ = x$, $ZX = z$ zu bestimmen,

so ist $x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$;

$$z^2 = \frac{(a+b+c).(a+b-c).(a+c-b).(b+c-a)}{4a^2}.$$

Beweis. Da $z^2 = b^2 - x^2 = c^2 (x-a)^2$, so ist $b^2 = c^2 - a^2 + 2ax$ und $x = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$. Dieser Werth in der Gleichung $z^2 = b_2 - x^2 = (b+x).(b-x)$ gebraucht, giebt

$$z^2 = \left(b + \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right).\left(b - \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right);$$

$$\text{oder } z^2 = \left(\frac{(a+b)^2-c^2}{2a}\right).\left(\frac{c^2-(a-b)^2}{2a}\right);$$

$$\text{oder } z^2 = \frac{(a+b+c).(a+b-c).(c+a-b).(c-a+b)}{4a^2}.$$

§. 39. Da z durch eine quadratische Gleichung angegeben wird, so erhält es einen doppelten Werth $z = \pm \sqrt{(b^2 - x^2)}$, um anzuzeigen, dass der Punkt X so gut in eben dieser Tiefe unterhalb, als in eben der Höhe oberhalb AB liegen kann, weil die blosse Angabe zweier Abstände nicht bestimmt, ob der Punkt oberhalb oder unterhalb liege.

§. 40. Aufgabe. Eines Vierecks Seiten (Fig. 18.), worunter zwei einander gleiche $BC = CD$, sind gegeben, nebst demjenigen Winkel, der an keiner der beiden gleichen Seiten anliegt; man sucht die Bestimmung der Lage aller Eckpunkte durch Coordinaten, indem man eine der Seiten, welche den gegebnen Winkel einschliessen, als Abscissenlinie annimmt, und auf sie senkrechte Ordinaten zieht.

Auflösung. Es sey $AB = a$, $BC = b$, $CD = b$, $DA = c$, der Winkel $BAD = \alpha$. Werden nun auf AB von dem gegebnen Winkel A an die Abscissen als positiv gerechnet, so findet man für diese und die auf sie senkrechten Ordinaten folgende Bestimmungen:

Für den Eckpunkt A, Abscisse $= o$, Ordinate $= o$;
für den Eckpunkt B, Abscisse $= a$, Ordinate $= o$;
für den Eckpunkt D, Abscisse $= c \,.\, Cos\, a$, Ordinate $= c \,.\, Sin\, \alpha$;
für den Eckpunkt C,

$$\text{Abscisse} = \tfrac{1}{2}(a + c \,.\, Cos\, \alpha) \pm c \,.\, Sin\, \alpha \sqrt{\left(\frac{b^2 - \frac{a^2+c^2-2ac \,.\, Cos\, \alpha}{4}}{a^2+c^2-2ac \,.\, Cos\, \alpha}\right)},$$

$$\text{Ordinate} = \tfrac{1}{2}\, c \,.\, Sin\, a \pm (a - c \,.\, Cos\, \alpha) \sqrt{\left\{\frac{b^2 - \frac{a^2+c^2-2ac \,.\, Cos\, \alpha}{4}}{a^2+c^2-2ac \,.\, Cos\, \alpha}\right\}}.$$

Beweis. Für die übrigen Eckpunkte ist alles klar, nur für C ist eine nähere Erörterung nöthig. Wenn man BD zieht, so ist offenbar $BD = \surd(a^2 + c^2 - 2ac \,.\, Cos\,\alpha)$; $BE = a - c \,.\, Cos\,\alpha$; $ED = c \;\; Sin\,\alpha$. Da nun $BC = CD$, so ist, wenn CG auf BD senkrecht gezogen wird, $BG = DG = \frac{1}{2}\, BD = \frac{1}{2}\surd(a^2 + c^2 - 2ac \,.\, Cos\,\alpha)$ und $AF = AE + EH + HF = c \,.\, Cos\,\alpha + \frac{1}{2}(a - c \,.\, Cos\,\alpha) + FH$. Aber

$$FH = GI = \frac{CG . DE}{BD} = \frac{\surd(b^2 - \frac{1}{4}(a^2 + c^2 - 2ac \,.\, Cos\,\alpha)) \,.\, c \,.\, Sin\,\alpha}{\surd(a^2 + c^2 - 2ac \,.\, Cos\,\alpha)}$$

und dieses Glied kömmt mit beiden Zeichen vor, weil die Spitze C auch an der andern Seite von BD liegen kann. Die Bestimmung der Ordinate wird auf ganz ähnliche Weise zu Stande gebracht.

§. 41. Wären alle vier Seiten gleich $a = b = c$, so würde des letzten Endpunkts Abscisse $= \frac{1}{2}\, b\,(1 + Cos\,\alpha) \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{2}\, b^2 (1 + Cos\,\alpha)}{2b^2 (1 - Cos\,\alpha)}\right)} . \, b \,.\, Sin\,\alpha$,

oder $= \frac{1}{2}\, b\,(1 + Cos\,\alpha) \pm \frac{1}{2}\, b \,.\, Sin\,\alpha \sqrt{\frac{1 + Cos\,\alpha}{1 - Cos\,\alpha}}$,

oder weil $Sin\,\alpha = \surd((1 - Cos\,\alpha) . (1 + Cos\,\alpha))$ ist

$= \frac{1}{2}\, b\,(1 + Cos\,\alpha) \pm \frac{1}{2}\, b\,(1 + Cos\,\alpha)$.

Diese Abscissen also entweder $= b + b \,.\, Cos\,\alpha$, wenn der Punkt C oberwärts liegt, oder $= o$, wenn er unterhalb BD liegt, in welchem Falle er in A fällt.

Die Ordinate $= \frac{1}{2}\, b \,.\, Sin\,\alpha \pm (b - b \,.\, Cos\,\alpha) . \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1 + Cos\,\alpha}{1 - Cos\,\alpha}}$;

$= \frac{1}{2}\, b \,.\, Sin\,\alpha \pm \frac{1}{2}\, b\,\surd(1 - Cos\,\alpha)\,\surd(1 + Cos\,\alpha)$;

$= \frac{1}{2}\, b \,.\, Sin\,\alpha \pm \frac{1}{2}\, b \,.\, Sin\,\alpha$;

die Ordinate also entweder $= b \,.\, Sin\,\alpha$ oder $= o$, wie es die Natur des Rhombus fordert.

§. 42. Aufgabe. Es ist (Fig. 19.) die Linie $AB = a$ und die Richtung der durch ihren einen Endpunkt gehenden Linie AC gegeben; man soll durch den andern Endpunkt B jener Linie eine gerade Linie gegen AC zu so ziehen, dass sie von der den Winkel CAB halbirenden Linie in Theile, die sich wie m zu n verhalten, getheilt werde, und den Durchschnittspunkt D bestimmen.

Auflösung. Es sey BD die verlangte Linie, AE die Linie, welche den Winkel $CAB = \alpha$ halbirt, so soll $BE : ED = m : n$ seyn. Nenne ich nun den Winkel $ABE = \varphi$, so ist $BE = \frac{a \,.\, Sin\,\frac{1}{2}\,\alpha}{Sin\,(\frac{1}{2}\,\alpha + \varphi)}$ und $BD = \frac{a \,.\, Sin\,\alpha}{Sin\,(\alpha + \varphi)}$.

Es soll nun $BE : BD = m : m + n$,

oder $(m + n) . \frac{a \,.\, Sin\,\frac{1}{2}\,\alpha}{Sin(\frac{1}{2}\,\alpha + \varphi)} = \frac{m \,.\, a \,.\, Sin\,\alpha}{Sin\,(\alpha + \varphi)}$ seyn; also

$(m+n) \cdot Sin\,\tfrac{1}{2}\alpha \cdot (Sin\,\alpha \cdot Cos\,\varphi + Cos\,\alpha \cdot Sin\,\varphi)$
$= m \cdot Sin\,\alpha \cdot (Sin\,\tfrac{1}{2}\alpha \cdot Cos\,\varphi + Sin\,\varphi \cdot Cos\,\tfrac{1}{2}\alpha)$,
oder $m \cdot Sin\,\tfrac{1}{2}\alpha \cdot Cos\,\alpha \cdot Sin\,\varphi + n \cdot Sin\,\tfrac{1}{2}\alpha \cdot Sin\,\alpha \cdot Cos\,\varphi$
$+ n \cdot Sin\,\tfrac{1}{2}\alpha \cdot Cos\,\alpha \cdot Sin\,\varphi = m \cdot Sin\,\alpha \cdot Cos\,\tfrac{1}{2}\alpha \cdot Sin\,\varphi$,
oder $n \cdot Sin\,\tfrac{1}{2}\alpha \cdot Sin\,\alpha \cdot Cos\,\varphi + n \cdot Sin\,\tfrac{1}{2}\alpha \cdot Cos\,\alpha \cdot Sin\,\varphi = m \cdot Sin\,\tfrac{1}{2}\alpha \cdot Sin\,\varphi$,
das ist $n \cdot Sin\,\alpha \cdot Cos\,\varphi + n \cdot Cos\,\alpha \cdot Sin\,\varphi = m \cdot Sin\,\varphi$,

oder $tang\,\varphi = \dfrac{n \cdot Sin\,\alpha}{m - n \cdot Cos\,\alpha}$.

Daraus folgt $Sin\,\varphi = \dfrac{n \cdot Sin\,\alpha}{\sqrt{(m^2 - 2mn \cdot Cos\,\alpha + n^2)}}$;

$$Cos\,\varphi = \frac{m - n \cdot Cos\,\alpha}{\sqrt{(m^2 - 2mn \cdot Cos\,\alpha + n^2)}},$$

$$Sin\,(\alpha + \varphi) = \frac{m \cdot Sin\,\alpha}{\sqrt{(m^2 - 2mn \cdot Cos\,\alpha + n^2)}},$$

und $BD = \dfrac{a}{m}\sqrt{(m^2 - 2mn \cdot Cos\,\alpha + n^2)}$.

Soll also D durch senkrechte Coordinaten bestimmt werden, so ist

$$AF = x = a - \frac{a}{m}(m - n \cdot Cos\,\alpha) = \frac{an}{m} \cdot Cos\,\alpha,$$

$$FD = z = \frac{an}{m} \cdot Sin\,\alpha.$$

§. 43. Folgende Reihe von Schlüssen lässt sich zur Auflösung dieser Aufgabe eben so gut gebrauchen:

Wenn man BD als schon gefunden ansieht, und nun durch D, E die Senkrechten DF, EG zieht, so muss $EG : DF = m : m+n$ und $BG : BF = m : m+n$ seyn, also $(a - BG)\,tang\,\tfrac{1}{2}\alpha = \dfrac{m\,x \cdot tang\,\alpha}{m+n}$, u. $BG = \dfrac{m\,(a-x)}{m+n}$, also $\left(a - \dfrac{m \cdot (a-x)}{m+n}\right) tang\,\tfrac{1}{2}\alpha = \dfrac{m \cdot x \cdot tang\,\alpha}{m+n}$, oder $(n\,a + m\,x) \cdot tang\,\tfrac{1}{2}\alpha$
$= m\,x \cdot tang\,\alpha$;

$$x = \frac{n \cdot a \cdot tang\,\tfrac{1}{2}\alpha}{m \cdot (tang\,\alpha - tang\,\tfrac{1}{2}\alpha)} = \frac{n\,a}{m\left(\dfrac{2}{1 - tang^2\,\tfrac{1}{2}\alpha} - 1\right)} = \frac{n\,a\,(1 - tang^2\,\tfrac{1}{2}\alpha)}{m\,(1 + tang^2\,\tfrac{1}{2}\alpha)},$$

oder $x = \dfrac{n\,a}{m}(Cos^2\,\tfrac{1}{2}\alpha - Sin^2\,\tfrac{1}{2}\alpha) = \dfrac{n\,a \cdot Cos\,\alpha}{m}$ (Trigon. §. 49. 46.).

§. 44. Wenn man sich die Linie BD als schon gefunden denkt, so lässt sich durch rein geometrische Analysis die Bestimmung für DF erhalten. Zieht man nämlich von B auf AD die Senkrechte BC, und von D auf AB die Senkrechte DF, so ist offenbar, als Ausdruck für den doppelten Inhalt

$AD \,.\, BC = AB \,.\, DF$, also $AB : AD = BC : DF$.
Ausserdem aber ist $AB : AD = BE : DE$, weil die Dreiecke ADE, ABE gleiche Höhen haben, wenn man DB als Grundlinie betrachtet, dagegen Höhen haben, die sich wie AD, AB verhalten, wenn man AE als Grundlinie ansieht. Aus jenen beiden Proportionen aber folgt: $BC : DF = BE : DE$, oder $DF = \frac{n}{m} BC = \frac{n}{m} a \,.\, \mathrm{Sin}\, \alpha$.

§. 45. Aufgabe. Es ist die Lage der Mittelpunkte zweier Kreise, ferner der Halbmesser des einen und des andern gegeben; man sucht die Lage der Durchschnittspunkte beider Kreislinien.

Auflösung. Es sey die Abscissenlinie AC (Fig. 20.) durch den Mittelpunkt A des einen Kreises gezogen und des andern Kreises Mittelpunkt durch die Coordinaten $AD = a$, $DB = b$ bestimmt. Des erstern Kreises Halbmesser sey $= R$, des zweiten Kreises Halbmesser $= r$. Soll nun die Lage des Durchschnittspunktes X durch Coordinaten $AZ = x$, $ZX = z$ bestimmt werden, so ist offenbar, wenn man BU parallel mit AD zieht, $(b - z^2) + (a - z)^2 = r^2$ und $x^2 + z^2 = R^2$,

$$\text{also } z^2 = R^2 - x^2 = r^2 + 2bz - b^2 - a^2 - x^2 + 2ax;$$

$$\text{oder } R^2 = 2bz + r^2 - b^2 - a^2 + 2ax;$$

$$\text{das ist } z = \frac{R^2 - r^2 + a^2 + b^2 - 2ax}{2b}.$$

Da nun dieses auch $= \sqrt{(R^2 - x^2)}$ seyn muss, so ist

$$R^2 - x^2 = \frac{(R^2 - r^2 + a^2 + b^2)^2}{4b^2} - \frac{a}{b^2} x\,(R^2 - r^2 + a^2 + b^2) + \frac{a^2 x^2}{b^2},$$

$$\text{oder } x^2\,(a^2 + b^2) - a x\,(R^2 - r^2 + a^2 + b^2) = b^2 R^2 - \tfrac{1}{4}\,(R^2 - r^2 + a^2 + b^2)^2,$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{a x\,(R^2 - r^2 + a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} = \frac{b^2 R^2 - \frac{1}{4}\,(R^2 - r^2 + a^2 + b^2)^2}{a^2 + b^2},$$

$$\text{oder } \left(x - \frac{a\,.(R^2 - r^2 + a^2 + b^2)}{2\,(a^2 + b^2)}\right)^2 = \frac{b^2 R^2}{a^2 + b^2} - \frac{\frac{1}{4}\, b^2\,(R^2 - r^2 + a^2 + b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2},$$

$$\text{also } x = \frac{a}{2}\left(\frac{R^2 - r^2 + a^2 + b^2}{a^2 + b^2}\right) \pm \frac{b}{a^2 + b^2} \sqrt{(R^2 (a^2 + b^2) - \tfrac{1}{4}\,(R^2 - r^2 + a^2 + b^2)^2)}$$

$$\text{und } z = \frac{b}{2}\left(\frac{R^2 - r^2 + a^2 + b^2}{a^2 + b^2}\right) + \frac{a}{a^2 + b^2} \sqrt{(R^2 (a^2 + b^2) - \tfrac{1}{4}\,(R^2 - r^2 + a^2 + b^2)^2)}.$$

§. 46. Die Richtigkeit dieser Formeln erhellt auch durch eine nähere Betrachtung der Figur. Es ist nämlich bekannt, dass die zwischen den beiden Punkten X, Y, wo die Kreislinien sich schneiden, gezogne Sehne durch die Linie AB senkrecht halbirt wird, und offenbar ist die halbe Sehne

$$EX = \sqrt{(R^2 - AE^2)} = \sqrt{(r^2 - BE^2)},$$

$$\text{also } R^2 - AE^2 = r^2 - BE^2 = r^2 - (AB - AE)^2;$$

das ist $R^2 = r^2 - AB^2 + 2AB \cdot AE$,

oder da $AB^2 = a^2 + b^2$; so wird $AE = \frac{R^2 - r^2 + a^2 + b^2}{2\sqrt{(a^2 + b^2)}}$.

Da nun auch $AB : BD = AE : EF$,

oder $\sqrt{(a^2 + b^2)} : b = \frac{R^2 - r^2 + a^2 + b^2}{2\sqrt{(a^2 + b^2)}} : EF$,

so ist $EF = \frac{b \cdot (R^2 - r^2 + a^2 + b^2)}{2(a^2 + b^2)}$, gleich dem rationalen Theile der Grösse z;

und aus ganz ähnlichen Gründen

$$AF = \frac{a \cdot (R^2 - r^2 + a^2 + b^2)}{2(a^2 + b^2)},$$ gleich dem rationalen Theile der Grösse x.

Ferner ist $GXE \backsim DAB$, also

$GX = \frac{EX \cdot a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$, u. $EX^2 = R^2 - AE = \frac{R^2(a^2 + b^2) - \frac{1}{4}(R^2 - r^2 + a^2 + b^2)^2}{a^2 + b^2}$,

also $GX = \frac{a}{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{(R^2(a^2 + b^2) - \frac{1}{4}(R^2 - r^2 + a^2 + b^2)^2)}$ gleich d. irrationalen Theile von z;

und eben so $EG = \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{(R^2)a^2 + b^2) - \frac{1}{4}(R^2 - r^2 + a^2 + b^2)^2)}$ gleich d. irrationalen Theile von x.

§. 47. Die Formel giebt einen doppelten Werth, weil sie zu gleicher Zeit beide Durchschnittspunkte bestimmt. Die Mitte der Sehne oder der Punkt E wird durch eine Abscisse, welche dem rationalen Theile von x gleich ist, und durch eine Ordinate, gleich dem rationalen Theile von z, bestimmt. Man findet daher die beiden Punkte auf der Abscissenlinie, über oder unter welchen sich jene Durchschnittspunkte befinden, wenn man zuerst den rationalen Theil der Abscisse aufträgt, um nach F, als dem senkrecht unter E liegenden Punkt zu gelangen; fügt man nun das mit $+$ bezeichnete Glied addirend hinzu, so gelangt man nach H, als dem Punkte, welcher dem entferntesten Durchschnittspunkte entspricht; fügt man eben das Glied subtrahirend hinzu, so geht man nach Z zurück, zu dem Punkte, welcher dem nächsten Durchschnittspunkte entspricht. Auf ähnliche Weise findet die doppelte Bestimmung der Ordinate für beide Durchschnittspunkte statt.

§. 48. Viel einfacher wird die Formel für $R = r$ oder für zwei Kreise von gleichen Halbmessern; da nämlich ist $x = \frac{1}{2}a \pm b\sqrt{\left(\frac{R^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}\right)}$

$$z = \frac{1}{2}b \pm a\sqrt{\left(\frac{R^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}\right)}.$$

Hier liegt nämlich die Mitte der Sehne in dem Punkte, wo AB halbirt wird, dessen Coordinaten $= \frac{1}{2}a$ und $= \frac{1}{2}b$ sind; die halbe Sehne ist hier

$= \sqrt{(R^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2))}$, und so erhellt nun leicht, wie durch die Formeln beide Punkte angegeben werden.

§. 49. Aufgabe. Von den drei Eckpunkten eines Dreiecks werden Senkrechte AD, BE, CF (Fig. 25. *) auf die entgegen gesetzten Seiten gezogen; man sucht den Punkt X zu bestimmen, wo sie einander schneiden.

Auflösung. Nenne ich die drei Winkel des Dreiecks A, B, C, die ihnen gegen über stehenden Seiten a, b, c, so ist für den Punkt, wo BE und CF einander schneiden, die Entfernung $FX = a \cdot Cos\,B \cdot Cotang\,A$, weil $EBA = 90° - A$; und für den Punkt, wo AD und CF einander schneiden, die Entfernung $FX' = b \cdot Cos\,A \cdot Cotang\,B$, weil $DAB = 90° - B$; aber in jedem Dreiecke ist $a : b = Sin\,A \cdot Sin\,B$, oder $\frac{a}{Sin\,A} = \frac{b}{Sin\,B}$,

also $FX = \frac{a \cdot Cos\,B \cdot Cos\,A}{Sin\,A} = \frac{b \cdot Cos\,B \cdot Cos\,A}{Sin\,B} = FX'$,

also ist $FX = FX'$ und die drei Senkrechten schneiden sich in einem einzigen Punkte, dessen Lage durch $AF = b \cdot Cos\,A$, $FX = \frac{b \cdot Cos\,A \cdot Cos\,B}{Sin\,B}$ bestimmt wird.

§. 49. * Der geometrische Beweis würde ganz ähnlich geführt. Da nämlich die Dreiecke ACF, XBF ähnlich sind, weil $ACF = FBE = 90° - A$, so ist in Beziehung auf den Durchschnittspunkt der Senkrechten BE und CF,

$$CF : AF = BF : XF$$

und aus ganz ähnlichen Gründen in Beziehung auf den Durchschnittspunkt der Senkrechten AD und CF,

$CF : BF = AF : X'F$. Es ist also offenbar $X'F = XF$, weil $CF : AF = BF : XF = BF : X'F$.

§. 50. Aufgabe. Um den Mittelpunkt C (Fig. 21.) sind zwei concentrische Kreise $aA\alpha$, $bB\beta$ gezeichnet, und über AB, dem Abstande beider Kreise von einander, ein rechtwinkliges Parallelogramm $ABDE$, dessen Seiten gegeben sind. Nun wird ein zweiter Radius $C\alpha\beta$ unter bekanntem Winkel $\alpha CA = \alpha$ gegen den vorigen geneigt gezogen und über $\alpha\beta$ ein schiefes Parallelogramm $\alpha\beta\delta\varepsilon$ so gezeichnet, dass es erstlich mit dem vorigen gleichseitig ist, und zweitens seinen einen Eckpunkt δ in der verlängerten DB hat. Man sucht die Lage des andern Eckpunktes ε durch Coordinaten $Cx = x$, $x\varepsilon = z$ zu bestimmen.

Auflösung. 1. Es sey $CA = a$, $AB = b$, $BD = c$, $\alpha CA = \alpha$; nenne ich nun den Winkel $\alpha\beta\delta = \sigma$, ziehe βm mit AB parallel, so ist $\delta\beta m = 180° - \sigma - \alpha$ und $\beta m = c \cdot Cos\,\delta\beta m = - c \cdot Cos\,(\alpha + \sigma)$, weil δ in DB liegen soll; aber wenn man βn parallel mit mD zieht, so erhellt auch, dass

$$\beta m = (a + b)\,(1 - Cos\,\alpha),$$

also $- c \cdot Cos\,(\alpha + \sigma) = (a + b) \cdot (1 - Cos\,\alpha)$ seyn muss, wodurch σ bestimmt ist.

Man findet aber auch $x = CB - xB$, das ist, weil $\varepsilon\delta$ mit $\alpha\beta$ parallel, also $xB = b \,.\, Cos\,\alpha$ ist, $x = + a + b - b \,.\, Cos\,\alpha$

und $z = a \,.\, Sin\,\alpha - c \,.\, Cos\,p\alpha\varepsilon = a \,.\, Sin\,\alpha - c \,.\, Sin\,(\alpha + \sigma)$,

welches folglich ebenfalls bestimmt ist.

Da x auch $= a \,.\, Cos\,\alpha + c \,.\, Sin\,p\alpha\varepsilon = a \,.\, Cos\,\alpha - c \,.\, Cos\,(\alpha + \sigma)$,

also $Cos\,(\alpha + \sigma) = \frac{a}{c} \,.\, Cos\,\alpha - \frac{x}{c}$ ist,

so wird auch $z = a \,.\, Sin\,\alpha - \sqrt{(c^2 - (a \,.\, Cos\,\alpha - x)^2)}$.

2. Hätte man, an der andern Seite von CB, $BCa = \alpha$ genommen, und $abd = \sigma'$ gesetzt, so wäre $- c \,.\, Cos\,(\sigma' - \alpha) = (a + b) \,.\, (1 - Cos\,\alpha)$;

die Abscisse für e ist $= x' = CB - Bx = a + b - b \,.\, Cos\,\alpha$;

die Ordinate $= z' = - a \,.\, Sin\,\alpha - c \,.\, Sin\,(\sigma' - \alpha)$.

3. Die Punkte ε und e liegen also in einerlei auf CB senkrechten Linie, weil sie einerlei Abscisse haben; die Ordinate ist bei dem ersten

$$z = a \,.\, Sin\,\alpha - \sqrt{(c^2 - (a+b)^2\,(1 - Cos\,\alpha)^2)},$$

bei dem zweiten $= - a \,.\, Sin\,\alpha - \sqrt{(c^2 - (a+b)^2\,(1 - Cos\,\alpha)^2)}$.

§. 51. Da bei den Pumpenwerken wohl die Einrichtung statt zu finden pflegt, dass man die an dem Eckpunkte D hängende Kolbenstange vermittelst eines solchen verschiebbaren Parallelogramms in einer immer richtigen Stellung zu erhalten sucht, so verdient diese Betrachtung noch etwas nähere Aufmerksamkeit. Bei den Pumpenwerken ist dem Punkte E sein Weg vorgeschrieben, indem er durch die Contrestange EG, welche sich um den festen Mittelpunkt G dreht, genöthiget ist, einen Kreis zu durchlaufen, und die Frage ist dort eigentlich, ob dann der Punkt D auf der Verticallinie bleibe; hier hingegen habe ich absichtlich die Frage umgekehrt, indem ich annehme, δ, D, d liegen in einer auf CB senkrechten geraden Linie, und nun den Ort des andern Eckpunkts E bestimme.

Um diese Untersuchung durch ein aus wirklichen Fällen hergenommenes Beispiel zu erläutern, sey $a = 79$ Zoll, $b = 65$ Zoll, $c = 42$ Zoll, α derjenige Winkel, dessen Tangente $= \frac{1}{3}$ ist, $tang\,\alpha = \frac{1}{3}$, nämlich für die höchste und tiefste Stellung, welche CB erreicht. Dann ist für die höchste Stellung

$$Cos\,\delta\beta m = - Cos\,(\alpha + \sigma) = \tfrac{24}{7} \,.\left(1 - \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = -\,0{,}17592,$$

$$\alpha + \sigma = 100^\circ.\,8',$$
$$\alpha = 18\,.\,26,$$
$$\sigma = 81^\circ.\,42',$$
$$x = 82{,}33 \text{ Zoll},$$
$$z = 79\,.\,Sin\,18^\circ\,26' - 42\,.\,Sin\,100^\circ\,8',$$
$$z = -\,16{,}365 \text{ Zoll}.$$

Für die tiefste Stellung $- Cos\,(\sigma' - \alpha) = -\,0{,}17592$,

$$\sigma' - \alpha = 100^\circ.\,8',$$
$$\alpha = 18\,.\,26,$$
$$\sigma' = 118^\circ.\,34',$$
$$x = 82{,}33 \text{ Zoll},$$
$$z' = 66{,}325 \text{ Zoll}.$$

Es liegt also ε um 25,635 Zoll oberhalb ED,
e um 24,325 Zoll unterhalb ED.

§. 52. Aufgabe. Den Mittelpunkt des Kreises zu finden, welcher, den Bestimmungen der vorigen Aufgabe gemäss, durch $\varepsilon E e$ geht.

Auflösung. Da εe auf ED senkrecht ist, so ziehe man durch den Halbirungspunkt der εe die Linie HG mit ED parallel. In ihr liegt der Mittelpunkt G und da $GE^2 = G\varepsilon^2$ seyn muss, oder wenn ich von E die Senkrechte EI ziehe und $IG = y$ nenne, und folglich
unter $\frac{1}{2}(z + z') + c$ die Höhe des Punktes I über E,
unter $\frac{1}{2}(z + z') - z$ die Höhe des Punktes I über ε verstehe, so ist

$$(\tfrac{1}{2}(z + z') + c)^2 + y^2 = (\tfrac{1}{2}(z + z') - z)^2 + (y - b(1 - Cos\,\alpha)^2),$$

so wird y aus dem Vorigen leicht gefunden und dann auch GE gefunden.

§. 53. In unserm Beispiele ist $EI = 0{,}655$ Zoll,

$$\text{also } (0{,}655)^2 + y^2 = (24{,}980)^2 + (y - 3{,}33)^2,$$
$$(0{,}655)^2 = (24{,}980)^2 + (3{,}33)^2 - 6{,}66,$$
$$y = 95{,}294;$$

der Radius oder Länge der Contrestange = 95,296.

Wenn also bei den angenommenen Abmessungen der Punkt D bei der mittlern, bei der höchsten und bei der tiefsten Stellung sich in derselben Verticallinie befinden soll, so muss der Endpunkt der Contrestange 0,655 Zoll oberhalb ED liegen und ihre Länge = 95,296 Zoll seyn.

§. 54. Um nun zu sehen, ob die so angenommene Contrestange auch in den zwischen + 18° 26′ und − 18° 26′ liegenden Stellungen des Balanciers die Ecke E in die richtige Stellung führt, sey nun in §. 51. der Winkel $\alpha = 9° 13'$.

$$- Cos(\alpha + \sigma) = - Cos(\sigma' - \alpha) = \tfrac{24}{7}(1 - Cos\, 9° 13') = 0{,}0443,$$
$$\text{also } \alpha + \sigma = \sigma' - \alpha = 92° 32' 20'',$$
$$\sigma = 83° 19\tfrac{1}{3}',$$
$$\sigma' = 101° 45\tfrac{1}{3}',$$
$$x = x' = 79{,}84 \text{ Zoll},$$
$$z = - 29{,}306 \text{ Zoll},$$
$$z' = - 54{,}612 \text{ Zoll}.$$

Wären wir also von diesen Punkten ausgegegangen, um die Lage der Contrestange zu bestimmen, so würde ihr unbeweglicher Endpunkt um 0,036 Zoll oberhalb ED liegen müssen.

Um zu sehen, wiefern es nachtheilig seyn kann, wenn die Contrestange so wie in §. 53. bestimmt wird, wollen wir den Abstand der beiden eben bestimmten Punkte von dem dort gefundenen Centro suchen.

Diese Abstände sind für den obern $= \sqrt{((12{,}039)^2 + (94{,}454)^2)} = 95{,}22$,
für den untern $= \sqrt{((13{,}267)^2 + (94{,}454)^2)} = 95{,}38$.

Unsre für die beste Lage des Punktes D berechneten Lagen des Eckpunktes E sind also von dem festgehaltnen Endpunkte der Contrestange um 0,076 Zoll zu wenig der eine und um 0,084 Zoll zu viel der andre entfernt.

Vierter Abschnitt.

Von den geometrischen Oertern oder denjenigen geometrischen Aufgaben, wo jeder Punkt einer Curve den für die Lage des Punktes gegebenen Bedingungen entspricht.

§. 55. Bemerkung. Wenn die Lage eines Punktes durch die gegebenen Bedingungen nicht vollkommen bestimmt ist, so giebt es allemal eine ganze Folge von Punkten, welche jenen Bedingungen entsprechen. Diese sämmtlichen Punkte liegen dann in irgend einer geraden oder krummen Linie, so dass, welchen Punkt dieser Linie man auch wähle, jeder den angenommenen Bedingungen Genüge thut.

Wäre zum Beispiel bloss der Abstand des verlangten Punktes von einem gegebnen Punkte bestimmt, so könnte der verlangte Punkt sich überall auf dem Umfange des Kreises befinden, welcher mit einem, dem gegebnen Abstande gleichen Halbmesser um den gegebnen Punkt als Mittelpunkt beschrieben wird.

Verlangte man ein Dreieck über gegebner Grundlinie von bestimmtem Inhalte, so müsste die Spitze in bestimmter Höhe liegen; aber sie könnte sich in jedem Punkte der in gehöriger Entfernung von der Grundlinie mit dieser parallel gezognen geraden Linie befinden.

§. 56. Erklärung. Die gerade oder krumme Linie, in welcher sich, den gegebnen Bedingungen zu Folge, der verlangte Punkt befinden muss, heisst der geometrische Ort des Punktes.

So war also in jenem ersten Beispiele die Kreislinie, im zweiten die zur Grundlinie parallel gezogne gerade Linie der geometrische Ort des verlangten Punktes.

§. 57. Bemerkung. Man behandelt die Aufgaben, welche auf geometrische Oerter führen, genau so, wie wir im vorigen Abschnitte die bestimmten Aufgaben behandelten; aber statt des bestimmten, durch lauter bekannte Grössen ausgedrückten Werthes für die Abscisse und Ordinate, welchen wir dort erhielten, bekommen wir hier eine Gleichung, welche Abscisse und Ordinate, oder im Allgemeinen, welche zwei unbestimmte Grössen zugleich enthält. Damit ist also für jeden willkürlich angenommenen Werth der einen die andre bestimmt, z. B. für eine willkürlich angenommene Abscisse die zugehörige Ordinate gegeben; aber da man für die Abscisse sehr verschiedene Werthe annehmen kann (Werthe, die jedoch oft über gewisse Grenzen nicht hinaus gehen dürfen,), so bestimmt sich auf diese Weise eine ganze Folge von Punkten, die sämmtlich den Bedingungen entsprechen, oder man erhält eben jene Linie, in welcher der verlangte Punkt liegen soll, und die sein geometrischer Ort heisst.

§. 58. Die Gleichung zwischen Abscisse und Ordinate, welche man so

findet, heisst auch eine Gleichung für jene gerade oder krumme Linie.

§. 59. Anmerkung. Ein Einwurf, den man ebenfalls hier machen könnte, ist leicht zu heben. Man könnte nämlich sagen, wenn man auch auf diese Weise unzählige Punkte bestimmte, die alle den Bedingungen entsprächen, so bildeten diese noch immer keine stetige Linie, indem die Linie nicht aus Punkten zusammen gesetzt sey. Aber es erhellt leicht, dass sich durch jene in hinreichender Anzahl bestimmten Punkte eine gerade oder krumme Linie ziehen lässt, die wir dann als den richtigen, geometrischen Ort betrachten dürfen, wenn sich bei der Prüfung eines jeden, wo immer auf ihr angenommenen Punktes, findet, dass auch er den gegebnen Bedingungen entspricht. Wir werden also künftig die Linie als völlig bestimmt durch jene Gleichung, die uns zu Zeichnung einer willkürlich grossen Anzahl von Punkten führt, ansehn.

§. 60. Aufgabe. Der Winkel $ABC = \alpha$ ist gegeben (Fig. 23.), man sucht die Lage des Punktes D zwischen den Schenkeln des Winkels so zu bestimmen, dass die Summe der beiden durch D mit den Schenkeln des Winkels parallel gezognen Linien, die sich bis an diese Schenkel erstrecken, $DE + DF = a$ sey.

Auflösung. Wir wollen D als den zu findenden Punkt ansehn, DX auf BC senkrecht ziehn, und $BX = x$, $XD = z$ setzen. Dann ist

$FX = z \,.\, Cotang\ \alpha$, $DF = \dfrac{z}{Sin\ \alpha} = z \,.\, Cosec\ \alpha$. Da nun

$DE + DF = a$ seyn soll, so ist $x - z \,.\, Cotang\ \alpha + z \,.\, Cosec\ \alpha = a$,

oder $x = a - z\,(Cosec\ \alpha - Cotang\ \alpha)$,

oder $x = a - z\left(\dfrac{1 - Cos\ \alpha}{Sin\ \alpha}\right)$,

oder $x = a - z \,.\, \dfrac{2 \,.\, Sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{2\, Sin \frac{1}{2}\alpha \,.\, Cos \frac{1}{2}\alpha} = a - z \,.\, tang \frac{1}{2}\alpha$.

Diese Gleichung ist unbestimmt, so wie es die unbestimmte Aufgabe fordert. Der so gefundene geometrische Ort ist eine gerade Linie. Denn wenn man $BG = a$ auf BC aufträgt, in G die Linie GD unter dem Winkel $DGB = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, gegen GB geneigt, zieht, so ist für jeden Punkt D oder Z die Abscisse $x = a - z\ tang \frac{1}{2}\alpha$, durch die Höhe $= z$ bestimmt. Jeder Punkt der geraden Linie GD entspricht also der Aufgabe.

§. 61. Aufgabe. Der Winkel $ABC = \alpha$ (Fig. 24.) ist gegeben; man sucht den geometrischen Ort des Punktes D, wenn jetzt für die mit den Schenkeln des Winkels parallel gezogenen Linien DE, DF das Verhältniss statt finden soll, dass die eine DE zu der um $a = BH$ verminderten andern, wie $IK : KL$ sey.

Auflösung. Es sey $IK = b$, $KL = c$. Ist nun wieder DX senkrecht auf BX und $BX = x$, $XD = z$, so hat man $DE = x - z \,.\, Cotang\ \alpha$,

$DF = z \,.\, Cosec\ \alpha$;

also soll $(x - z . Cotang\, \alpha) : (z . Cosec\, \alpha - a) = b : c$,

oder $x = z . Cotang\, \alpha + \frac{b\,z}{c}\, Cosec\, \alpha - \frac{a\,b}{c}$ seyn.

Der hierdurch bestimmte geometrische Ort ist wieder eine gerade Linie. Wenn man auf dem mit DF parallelen Schenkel $BH = a$ aufträgt, ferner auf der durch H mit BC parallel gezognen Linie HM, die HN so nimmt, dass $HE : HN = c : b$ sey, dann das Parallelogramm $BEDC$ vollendet und die Diagonale DHP zieht, so ist diese der geometrische Ort des gesuchten Punktes. Denn für jeden Punkt d dieser Linie ist, wenn man df mit DF parallel zieht, und hier $BU = x$, $Ud = z$ nennt, $fU = z\; Cotang\, \alpha$,

$$Pf = \frac{b}{c} . z\; Cosec\, \alpha,$$

$$PB = \frac{a\,b}{c},$$

also $BU = x = z\; Cotang\, \alpha + \frac{b\,z}{c}\; Cosec\, \alpha - \frac{a\,b}{c}$.

§. 62. Aufgabe. Ueber der gegebenen Grundlinie $AB = a$ (Fig. 22.) soll ein Dreieck gezeichnet werden, dessen einer, der Grundlinie gegen über stehender Winkel einem gegebenen gleich, $= \alpha$ ist.

Auflösung. Eine leichte Ueberlegung zeigt, dass des gesuchten Dreiecks Spitze eben so gut rechts als links von der Mitte der Grundlinie liegen kann. Ich theile daher die gegebne Grundlinie $AB = a$ in der Mitte in C und rechne von hier an die Abscissen. Stellt nun AXB das verlangte Dreieck vor, dessen Winkel $AXB = \alpha$ seyn soll, und dessen Spitze durch Coordinaten $CZ = x$, $ZX = z$ bestimmt wird, so ist offenbar

$$tang\; AXZ = \frac{\frac{1}{2}\,a + x}{z},$$

$$tang\; BXZ = \frac{\frac{1}{2}\,a - x}{z}.$$

Weil nun zugleich $AXZ + BXZ = \alpha$ seyn soll,

so ist $tang\, \alpha = \frac{tang\; AXZ + tang\; BXZ}{1 - tang\; AXZ\, .\, tang\; BXZ}$,

oder $tang\, \alpha = \frac{z\,(\frac{1}{2}\,a + x) + z\,(\frac{1}{2}\,a - x)}{z^2 - (\frac{1}{2}\,a + x)\,(\frac{1}{2}\,a - x)}$,

das ist $tang\, \alpha\, (z^2 - \frac{1}{4}\,a^2 + x^2) = a\,z$,

woraus $x^2 = \frac{1}{4}\,a^2 - z^2 + \frac{a\,z}{tang\, \alpha}$ folgt.

Hierdurch ist also bestimmt, über welchem Punkte der Grundlinie die Spitze liegen, oder wie gross ihre Abscisse seyn muss, wenn das Dreieck eine

willkürlich angenommene Höhe $= z$ haben soll. Hätte ich z durch x bestimmen wollen, so wäre $z^2 - a z \,.\, Cotang\,\alpha = \frac{1}{4} a^2 - x^2$,

also $z = \frac{1}{2} a\, Cotang\,\alpha \pm \sqrt{\{\frac{1}{4} a^2\, Cosec^2\,\alpha - x^2\}}$.

Der hierdurch bestimmte geometrische Ort ist ein Kreis (wie auch schon aus Geom. §. 264. bekannt ist), dessen Mittelpunkt senkrecht über dem Punkte C in der Höhe $CD = \frac{1}{2} a\,.\, Cotang\,\alpha$ liegt. Denn wenn ich von dem so bestimmten Punkte D die gerade Linie DX nach der Spitze ziehe, so ist

$$DX^2 = (z - \tfrac{1}{2} a\, Cotang\,\alpha)^2 + x^2,$$

das ist $DX^2 = \frac{1}{4} a^2\, Cosec^2\, a$.

Die Entfernung aller dieser Dreiecksspitzen vom Punkte D ist also gleich gross, immer $= \frac{1}{2} a\, Cosec\,\alpha$; sie liegen daher auf dem Umfange eines mit diesem Halbmesser von dem Mittelpunkt D gezogenen Kreises.

§. 63. Aufgabe. Es ist die Grundlinie $AB = a$ eines Dreiecks gegeben, dessen beide übrige Seiten AX, BX sich zu einander wie $m : n$ verhalten sollen; man sucht die Lage der Spitze dieses Dreiecks (Fig. 25.).

Auflösung. Die Ueberlegung, dass bei einem Dreieck von sehr geringer Höhe, wenn dieses Verhältniss der Seiten statt fände, die Spitze so liegen würde, dass $AV : BV = m : n$ seyn würde, leitet uns dazu, die Linie AB so zu theilen, dass $AU : UB = m : n$ sey, oder $AU : a = m : m + n$,

$$BU : a = n : m + n,$$

$$\text{also } AU = \frac{m\,.\,a}{m+n};\; BU = \frac{n\,.\,a}{m+n}.$$

Von diesem Punkte U an rechne ich die Abscissen $UW = x$, und bestimme dann die Lage der Spitze durch die senkrechten Ordinaten $WX = z$.

Da $AW = \dfrac{m\,a}{m+n} - x$, und $BW = \dfrac{n\,a}{m+n} + x$, so erhellt leicht, dass

$$\text{allgemein } AX^2 = z^2 + \left(\frac{m\,a}{m+n} - x\right)^2,$$

$$BX^2 = z^2 + \left(\frac{n\,a}{m+n} + x\right)^2;$$

folglich den Bedingungen der Aufgabe gemäss

$$m^2 : n^2 = \left(z^2 + \left(\frac{m\,a}{m+n} - x\right)^2\right) : \left(z^2 + \left(\frac{n\,a}{m+n} + x\right)^2\right) \text{ seyn muss.}$$

Hieraus folgt: $m^2 z^2 + \dfrac{m^2 n^2 a^2}{(m+n)^2} + \dfrac{2\, m^2\, n\, a\, x}{m+n} + m^2 x^2$,

$$n^2 z^2 + \frac{m^2 n^2 a^2}{(m+n)^2} - \frac{2\, m\, n^2\, a\, x}{m+n} + n^2 x^2;$$

oder $(n^2 - m^2)\, z^2 = 2 m n a x - (n^2 - m^2)\, x^2$;

$$\text{also } z^2 = \frac{2\, m n a x}{n^2 - m^2} - x^2.$$

Daraus folgt auch $x = \frac{mna}{n^2 - m^2} \pm \sqrt{\left\{\frac{m^2 n^2 a^2}{(n^2 - m^2)^2} - z^2\right\}}$. Hiermit ist die Lage der Spitze, wenn man entweder x oder z als gegeben annimmt, bestimmt. Der so gefundene geometrische Ort ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Verlängerung der Linie BA selbst so liegt, dass für ihn $UZ = \frac{mn\alpha}{n^2 - m^2}$ ist, und dessen Halbmesser zugleich $= \frac{mna}{n^2 - m^2}$ ist.

Nimmt man nämlich $UZ = \frac{mna}{n^2 - m^2}$, und zieht nach irgend einer der Dreiecksspitzen die gerade Linie ZX, so ist $ZX^2 = z^2 + \left(\frac{mna}{n^2 - m^2} - x\right)^2$,

welches $= \frac{m^2 n^2 a^2}{(n^2 - m^2)^2}$, also

ZX immer $= \frac{mna}{n^2 - m^2}$ ist.

Die Spitzen der sämmtlichen gesuchten Dreiecke sind also gleich weit von Z entfernt, oder liegen auf einem Kreisumfange, dessen Mittelpunkt Z und Halbmesser UZ ist.

§. 64. Aufgabe. Es ist die Grundlinie eines Dreiecks gegeben (Fig. 26.), $AB = 2f$ und die Summe der beiden übrigen Seiten $= 2a$; man sucht den geometrischen Ort der Spitze X dieses Dreiecks.

Auflösung. Ich halbire die Grundlinie in C, und nenne die von C an gerechneten Abscissen $CZ = x$, die Ordinaten $ZX = z$, so ist

$$AZ = f - x,\ BZ = f + x,$$
$$AX = \sqrt{(z^2 + (f - x)^2)},$$
$$BX = \sqrt{(z^2 + (f + x)^2)},$$

also $2a = \sqrt{(z^2 + (f + x)^2)} + \sqrt{(z^2 + (f - x)^2)}$;

oder $2a - \sqrt{(z^2 + (f - x)^2)} = \sqrt{(z^2 + (f + x)^2)}$;

oder $4a^2 - 4a\sqrt{(z^2 + (f - x)^2)} + z^2 + (f - x)^2 = z^2 + (f + x)^2$;

das ist $a^2 - a\sqrt{(z^2 + (f - x)^2)} = fx$;

oder $a\sqrt{(z^2 + (f - x)^2)} = a^2 - fx$;

$$a^2 z^2 + a^2 f^2 + a^2 x^2 - 2a^2 fx = a^4 - 2a^2 fx + f^2 x^2;$$
$$a^2 z^2 = a^4 - a^2 f^2 - a^2 x^2 + f^2 x^2;$$
$$z^2 = (a^2 - f^2) - \frac{(a^2 - f^2)x^2}{a^2}.$$

Diese Gleichung für den gesuchten geometrischen Ort zeigt, dass $z = o$ wird für $x = \pm a$, das heisst, dass man von C aus die Entfernung $= a$ nach beiden Enden der Abscissenlinie auftragen muss, um die Punkte zu finden,

wo die krumme Linie die Abscissenlinie schneidet. Dagegen ist Z am grössten für $x = o$, und da wird es $z = \pm \sqrt{(a^2 - f^2)}$. Obgleich also C der Mittelpunkt unsrer Curve ist, indem diese oberhalb und unterhalb der Axe ganz gleich und für positive und negative gleiche Werthe von x ganz gleich ist, so unterscheidet sich doch diese Linie vom Kreise, indem ihr auf AB senkrechter Durchmesser kleiner als der mit AB zusammen fallende ist.

§. 65. Diese Linie heisst die Ellipse.

§. 66. Aufgabe. Ueber der gegebnen Grundlinie $AB = 2f$ ein Dreieck zu errichten, in welchem der Unterschied der beiden andern Seiten $= 2a$ ist (Fig. 27.).

Auflösung. Wenn man wieder die Grundlinie in C halbirt und die Coordinaten der Spitze des Dreiecks $CZ = x$, $ZX = z$ nennt, so ist hier

$$2a = \sqrt{(z^2 + (f+x)^2)} - \sqrt{(z^2 + (f-x)^2)};$$
$$2a + \sqrt{(z^2 + (f-x)^2)} = \sqrt{(z^2 + (f+x)^2)};$$
$$4a^2 + 4a\sqrt{(z^2 + (f-x)^2)} = 4fx;$$
$$(fx - a^2)^2 = a^2 z^2 + a^2 (f-x)^2;$$

und $a^2 z^2 = a^4 - a^2 f^2 + a^2 x^2 + f^2 x^2$.

Weil nun hier der Unterschied der Seiten kleiner als f seyn muss, so ist $f^2 - a^2$ eine positive Grösse und $z^2 = \left(\frac{f^2 - a^2}{a^2}\right) . (x^2 - a^2)$.

Um hier die Natur der Curve, in welcher die Spitzen der gesuchten Dreiecke liegen, näher kennen zu lernen, dient die Ueberlegung, dass aus

$$z = \frac{\sqrt{(f^2 - a^2)}}{a} . \sqrt{(x^2 - a^2)}$$

folgt, z sey unmöglich für alle Werthe von x, die kleiner als a sind. Trägt man also auf der Grundlinie $CE = CF = a$ auf, so liegt neben diesem Theile der Grundlinie keine der Spitzen unsrer Dreiecke. Für grössere, sowohl positive, als negative Werthe von x erhält dagegen z einen möglichen Werth und die Curve erstreckt sich mit immer höher oberhalb und mit immer tiefer unterhalb der Abscissenlinie fortlaufenden Aesten bis ins Unendliche.

§. 67. Diese Linie heisst die Hyperbel.

§. 68. Aufgabe. Es ist eine gerade Linie AB gegeben und ein Punkt A in ihr; man sucht den geometrischen Ort eines Punktes X, dessen senkrechter Abstand XZ von AB zusammen genommen mit seinem geraden Abstande von A die beständige Summe $= a$ mache (Fig. 28.).

Auflösung. Es sey $AZ = u$, $ZX = v$,

so soll $v + \sqrt{(u^2 + v^2)} = a$ seyn,

oder $u^2 = a^2 - 2av$.

Hier wird $u = o$, wenn $v = \frac{1}{2} a$ ist, das heisst, wenn man durch A

eine Linie senkrecht auf AB zieht und darauf $AC = \frac{1}{2} a$ nimmt, so liegt ein Punkt der Curve in C. Es sey nun $CW = \frac{1}{2} a - v = x$, so ist

$v = \frac{1}{2} a - x$ und $u^2 = 2ax$ ist die bequemste Gleichung für die Curve.

§. 69. Diese Curve ist die Parabel.

§. 70. Aufgabe. Die Lage eines Punktes so zu bestimmen, dass das Rechteck aus den beiden Abständen desselben von den gegebnen Punkten A und B, oder dass das Product AX, BX eine bestimmte Grösse $= f^2$ habe (Fig. 29.).

Auflösung. Es sey $AB = 2a$ in C halbirt, und $Z = x$, $ZX = z$, so soll $f^2 = \sqrt{((a-x)^2 + z^2)} \cdot \sqrt{((a+x)^2 + z^2)}$ seyn,

oder $f^2 = \sqrt{\{(a^2 + x^2 + z^2)^2 - 4a^2x^2\}}$,

oder $f^4 = a^4 + x^4 + z^4 + 2a^2z^2 - 2a^2x^2 + 2x^2z^2$,

$z^4 + 2(a^2 + x^2)z^2 = f^4 - a^4 + 2a^2x^2 - x^4$;

$z^2 = -(a^2 + x^2) \pm \sqrt{\{f^4 + 4a^2x^2\}}$;

$z = \pm \sqrt{\{-(a^2 + x^2) \pm \sqrt{\{f^4 + 4a^2x^2\}}\}}$.

Eine Gleichung, welche zeigt, dass z nur zwei mögliche Werthe erhält, indem nicht beide unter dem Wurzelzeichen stehende Glieder negativ werden dürfen. Sie zeigt ferner, dass für $x = o$, $z = \pm \sqrt{\{f^2 - a^2\}}$ die Höhe für den Punkt der Curve angiebt, der über dem Mittelpunkte C liegt.

Hätte man die Gleichung in Beziehung auf x aufgelöst, so wäre

$x^4 + 2(z^2 - a^2)x^2 = f^4 - (a^2 + z^2)^2$ geworden,

also $x^2 = a^2 - z^2 \pm \sqrt{\{f^4 - 4a^2z^2\}}$,

welches für $z = o$, $x = \pm \sqrt{(a^2 \pm f^2)}$ giebt.

§. 71. Bemerkung. Diese Aufgaben, denen sich noch zahlreiche andre beifügen lassen, zeigen, dass, bei der nicht völlig determinirten Lage eines Punktes, es allemal eine gerade oder krumme Linie giebt, auf welcher jener Punkt sich befinden, die er gleichsam durchlaufen kann, während seine Lage immer den angenommenen Bedingungen entsprechend bleibt. So finden wir also krumme Linien, denen eine bestimmte Eigenschaft zukömmt; aber es ist offenbar lehrreich und wichtig, zu wissen, ob bei eben den Curven nicht noch andre merkwürdige Eigenschaften statt finden, und so dient uns dieses zur Veranlassung, die Frage, wie man die mannigfaltigen Eigenschaften krummer Linien weiter untersuchen kann, zu beantworten.

§. 72. Um eine krumme Linie genauer kennen zu lernen, muss man suchen die Punkte, wo sie die Abscissenlinie schneidet, wo die Ordinaten am grössten oder kleinsten werden, zu bestimmen; man muss vor allem auch Mittel suchen, um zu entdecken, ob die Linie einen bestimmten Raum ganz umschliesst, ob sie zwischen bestimmten Grenzen ganz enthalten sey, oder ob sie sich mit unendlichen Aesten unbegrenzt fort führen lässt; man muss die Tangente an jedem Punkte zu ziehen, oder die Richtung der Curve in jedem Punkte zu bestimmen wissen; man muss finden, ob die Curve sich irgendwo selbst durchschneidet, wie stark gekrümmt sie in jedem Punkte ist u. s. w. Viele

dieser Bestimmungen lassen sich schon hier erhalten, und manche besondre Eigenschaften einzelner Curven werden sich an jene geknüpft auffinden lassen; andre Fragen, z. B. wie man den Inhalt des von der Curve umschlossenen Raumes, die Länge ihres Bogens u. s. w. finde, lassen sich nur durch höhere Analysis beantworten.

Fünfter Abschnitt.

Von der Eintheilung der krummen Linien in Ordnungen, und von der Linie der ersten Ordnung insbesondere.

§. 73. Bemerkung. Dass bei unsern gesammten Untersuchungen nur von Curven, die nach einem bestimmten Gesetze beschrieben sind, die Rede seyn kann, versteht sich wohl von selbst und geht auch aus den vorigen Betrachtungen, wo wir Curven einer bestimmten Bedingung entsprechend fanden, hervor. Unregelmässige, ganz willkürlich gezogene Linien können keiner regelmässigen Betrachtung unterworfen werden. Für jede nach irgend einer bestimmten Regel gezogne, gewissen Bedingungen entsprechende Curve lässt sich eine Gleichung zwischen Coordinaten finden, und diese enthält nun, gehörig entwickelt, die vollständigste Hinweisung auf alle Eigenschaften der Curve. Wir ordnen daher hier die Curven nach der Beschaffenheit der für sie aufgefundenen oder allenfalls auch willkürlich angenommenen Gleichungen.

§. 74. Bemerkung. Wir haben im zweiten Abschnitte gesehen, dass bei Veränderung der Coordinaten, wenn nämlich gegen eine andre Abscissenlinie Ordinaten unter irgend einem Winkel gezogen werden, jede der neuen Coordinaten durch die vorigen, vermittelst einer Gleichung vom ersten Grade, ausgedrückt wird. Daraus lässt sich übersehen, dass die Gleichung für eine Curve, wenn sie durch Coordinaten gegeben ist, gleich hohe Potenzen der Coordinaten enthalten wird, wenn man sie auch auf andre Coordinaten zurück führt. Hiessen z. B. die Coordinaten in Beziehung auf die erste Abscissenlinie x und z, und enthielte die Gleichung keine höhern Potenzen von x oder z als die dritte, oder keine Producte aus x, z als solche, worin diese Grössen zu drei Factoren, wie in $a x^2 z$ vorkommen, so wird, wenn man die Gleichung auf andre Coordinaten u, v bringt (wozu §. 27. 28. 29. Anleitung geben), auch diese keine höhere Potenzen und Producte der Grössen u, v enthalten, als die zur dritten Ordnung gehören.

§. 75. Erklärung. Daher nennt man die Linien Linien von der ersten, zweiten, dritten Ordnung, nach dem Grade, zu welchem die für sie gefundene Gleichung zwischen rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten gehörte, wenn man sie völlig rational darstellt.

§. 76. **Bemerkung.** Hierbei ist vorausgesetzt, dass der Ausdruck für die Curve ein algebraischer, in rationaler Form dargestellter sey. Da es aber auch krumme Linien giebt, deren Ordinaten durch logarithmische Functionen oder durch Ausdrücke, die vom Kreise und von trigonometrischen Grössen abhängen, aus der Abscisse bestimmt werden, so machen diese eine ganz neue Classe von Curven aus.

§. 77. **Erklärung.** Diese Curven heissen **transscendente Curven**, weil die Gleichung für sie sich nicht in einer algebraischen Form durch eine endliche und bestimmte Anzahl von Gliedern darstellen lässt.

Beispiele solcher Curven sind: die deren Ordinate $z = b \log \frac{x}{a}$, die Cycloide, die Spirallinien und andre.

§. 78. **Bemerkung.** Die Gleichung für Linien der ersten Ordnung kann offenbar nur aus drei wesentlich verschiedenen Arten von Gliedern bestehen, und ist in der Form

$$z + ax + b = o,$$ vollständig

enthalten, wenn x und z die Coordinaten vorstellen. In der Gleichung für Linien der zweiten Ordnung können Glieder vorkommen, die x^2 oder z^2, Glieder, die xz, Glieder, die x, die z enthalten, und endlich solche, die ganz frei von diesen veränderlichen Grössen sind; daher ist die allgemeinste Gleichung für sie $z^2 + axz + bx^2 + cx + fz + g^2 = o$.

Auf ähnliche Art wird die Gleichung für alle Linien der dritten Ordnung bestimmt.

§. 79. **Lehrsatz.** Eine Linie der n^{ten} Ordnung kann von einer geraden Linie in nicht mehr als n Punkten geschnitten werden.

Beweis. Da wir der Abscissenlinie und den unter irgend einem Winkel gegen sie geneigten Ordinaten jede Lage geben dürfen, so wollen wir setzen, die gerade Linie, deren Durchschnittspunkte mit der Curve bestimmt werden sollen, stimme mit der Ordinate $= z$ überein, die einer bestimmten Abscisse $= x'$ zugehört. Da nun die Gleichung für unsre Curve vom n^{ten} Grade ist, also auch z höchstens in der n^{ten} Potenz vorkömmt, so kann diese Gleichung, in welcher nun x einen bestimmten Werth hat, nur n verschiedene Werthe für z geben, und vielleicht noch wenigere, wenn einige derselben unmöglich werden. Aber die Anzahl der verschiedenen möglichen Werthe, die man für z erhält, zeigt, wie oft die Coordinate die krumme Linie schneidet. Denn der Werth von z giebt ja an, wie weit man sich nach der Richtung der Coordinate von der Abscissenlinie entfernen muss, um die Curve zu erreichen; hat also z mehrere Werthe, so giebt jeder derselben eine solche Entfernung an, oder, wenn man jeden dieser Werthe auf die Ordinate aufträgt, so gelangt man immer zu einem Punkte der Curve. Diese schneidet also die Ordinate so oft, als die

Anzahl der möglichen Werthe von z, welche nie über n betragen kann, angiebt.

§. 80. Aber nicht jede gerade Linie schneidet nothwendig die Linie der n^{ten} Ordnung so oft. Denn erstlich, wenn auch die Gleichung für z, welche die Anzahl der Durchschnittspunkte angeben sollte, vom n^{ten} Grade ist, so kann es ja unmögliche Wurzeln dieser Gleichung geben, und schon dadurch die Anzahl der Durchschnittspunkte als geringer angegeben werden; und zweitens kann auch die Gleichung in Beziehung auf z die Ordinate, deren Einschnittspunkte wir suchen, von einem niedrigern Grade seyn.

Das erstere fand in §. 70. statt, wo eine Linie der vierten Ordnung durch die Gleichung

$$z^4 + 2(a^2 + x^2) z^2 = f^4 - a^4 + 2 a^2 x^2 - x^4,$$

angegeben wurde, wo aber dennoch z nur zwei gleiche und entgegen gesetzte Werthe $z = \pm \sqrt{\{-(a^2 + x^2) + \sqrt{(f^4 + a^2 x^2)}\}}$ bekam. Hier konnte für ein gegebnes x die Ordinate nur zweimal in die Curve einschneiden, einmal oberhalb der Axe und einmal eben so entfernt von derselben unterhalb.

Der zweite Fall tritt bei der Parabel ein, wo $u^2 = 2ax$, oder $x = \frac{u^2}{2a}$ war. Hier ist die Gleichung für die Curve offenbar vom zweiten Grade; aber in Beziehung auf x ist sie nur vom ersten Grade, also giebt jeder Werth von u nur ein einziges ihm entsprechend x, und die mit NC parallel gezognen geraden Linien (Fig. 28.) schneiden die Parabel nur einmal.

§. 81. Erklärung. Man nennt diejenigen Punkte einer Curve doppelte Punkte, wo zwei oder mehrere Aeste der Curve sich einander schneiden, wie in C (Fig. 30.), oder sich einander berühren, wie in D (Fig. 31.).

Da wo das letztere der Fall ist, pflegt die Curve sich nicht über den Punkt D hinaus zu erstrecken, und dieser heisst daher dann ein Rückkehrpunkt oder auch eine Spitze. Solche Punkte wie C, wo zwei Aeste der Curve sich schneiden, heissen Knoten.

§. 82. Erklärung. Wenn eine Curve so gekrümmt ist, dass sie, wenn man sich auf der Curve fortgehend denkt, ihre Concavität zuerst nach der einen, dann nach der andern Seite wendet (wie Fig. 32.), so hat sie einen Wendungspunkt, wie bei E.

§. 83. Erklärung. Eine Tangente der Curve heisst auch hier diejenige gerade Linie, welche einen Punkt mit der Curve gemein hat, aber dennoch sie nicht schneidet, sondern ganz ausserhalb an der convexen Seite der Curve liegt *). Sie ist diejenige gerade Linie, welche die Curve berührt, deren

*) Der besondre Fall, welcher bei dem Wendungspunkte eintritt, mag hier noch unerwähnt bleiben.

Richtung daher mit der Richtung der krummen Linie im Berührungspunkte übereinstimmt. In Fig. 28. ist YT eine Tangente. Errichtet man im Berührungspunkte Y eine Senkrechte YN auf die Tangente, so heisst sie die Normallinie der Curve in Y.

Wenn, wie es am gewöhnlichsten ist, die Curve auf Abscissen und Ordinaten bezogen wird, so heisst das zwischen dem Einschnittspunkte T der Tangente und dem Einschnittspunkte U der Ordinate in die Abscissenlinie enthaltene Stück der letztern die Subtangente. Das zwischen dem Einschnittspunkte N der Normallinie und dem Einschnittspunkte U der Ordinate enthaltene Stück der Abscissenlinie NU heisst die Subnormallinie. Spricht man von der Tangente, als von einer Linie, deren Länge bestimmt ist, so versteht man darunter das zwischen dem Berührungspunkte und der Abscissenlinie abgeschnittene Stück YT der Tangente. Eben so heisst YN, das zwischen der Curve und der Abscissenlinie abgeschnittene Stück der Normallinie, in diesem Sinne die Normallinie.

§. 84. Lehrsatz. Linien der ersten und zweiten Ordnung können keine doppelte Punkte, keine Knoten oder Spitzen haben.

Denn eine gerade Linie, durch den Knoten C oder die Spitze D (Fig. 30. 31.) gezogen, könnte gewiss so angenommen werden, dass sie wie CF, DY die Curve noch irgendwo sonst schnitte; dadurch aber erhielte sie, weil schon in dem doppelten Punkte zwei Aeste der Curve geschnitten werden, drei Durchschnittspunkte, was bei Curven der ersten und zweiten Ordnung nicht statt findet.

Eben so würde bei einem Wendungspunkte allemal eine Linie, wie HI, möglich seyn, die wenigstens dreimal einschnitte.

Von den Linien der ersten Ordnung.

§. 85. Bemerkung. Wenn x und z die Coordinaten einer Linie der ersten Ordnung andeuten, so ist

$$z = ax + f$$

die allgemeinste Gleichung für die Linie der ersten Ordnung. Hier ist offenbar a eine Zahl, f eine Linie, und die Gleichung würde in Worte ausgedrückt heissen, z ist gleich einem gewissen Vielfachen der Abscisse und der daran gefügten gegebnen Linie f. Die Gleichung würde nicht an Allgemeinheit gewinnen, wenn ich sie auch durch

$bz = ax + f$ ausdrücken wollte; denn b könnte doch auch nur eine Zahl bedeuten, und unsre Gleichung käme also auf

$z = \frac{a}{b} x + \frac{f}{b}$ zurück, die z wieder als ein Vielfaches von x addirt zu einer Linie, welche $\frac{1}{b}$ von f wäre, ausdrückte.

§. 86. **Lehrsatz.** Die Linie der ersten Ordnung ist eine gerade Linie.

Beweis. Es sey AB die Abscissenlinie (Fig. 33.), auf welcher die Abscisse $AU = x$ aufgetragen ist; X sey ein Punkt in der Linie der ersten Ordnung, dessen Lage durch eben jene Abscisse $= x$ und die unter dem Winkel $XUB = \alpha$ geneigte Ordinate $UX = z$ gegeben ist. Wenn also die Gleichung für die Linie der ersten Ordnung $z = ax + f$ war, so ist

$$z = f, \text{ für } x = o.$$

Um denjenigen Punkt unsrer Linie, welcher der Abscisse $x = o$ entspricht, aufzutragen, muss man also im Anfangspunkte A eine Ordinate AI mit UX parallel ziehen und sie $= f$, gleich der gegebnen Linie, die ich durch $GH = f$ darstelle, $= AI$ nehmen.

Um ferner den Punkt zu finden, wo unsre Linie in die Abscissenlinie einschneidet, muss man $z = o$ setzen, also $x = -\frac{f}{a}$ von A an auf der Abscissenlinie auftragen. Es sey $AK = \frac{f}{a}$, und diese nach der negativen Richtung aufgetragen, wenn f und a positiv waren.

Verlegt man nun den Anfangspunkt der Abscisse nach K und nennt eben jenes, vorhin betrachteten Punktes X Abscisse $KU = u$, so ist

$$u = \frac{f}{a} + x, \text{ oder } x = u - \frac{f}{a},$$

folglich $ax + f = z = au$, das heisst, jede Ordinate UX ist ein immer gleiches Vielfaches der von K an gerechneten Abscisse; oder, wenn man eine andre Abscisse KV nimmt, und in V eine Ordinate VW bis an die Linie der ersten Ordnung der vorigen Ordinate parallel zieht, so ist $KV : VW = KU : UX$. Es ist aber bekanntlich eine Eigenschaft der geraden Linie, dass sie von den Parallellinien VW, UX Stücke abschneidet, die den Abständen KV, KU proportional sind; die Linie der ersten Ordnung ist also eine gerade Linie.

Zweiter Beweis. Da eine Gleichung zwischen $AU = x$, $UX = z$ gegeben ist (Fig. 33.) und diese Coordinaten unter dem gegebnen Winkel $= \alpha$ gegen einander geneigt sind, so wollen wir uns eine von X ausgehende unter dem Winkel $XZU = \gamma$ gegen die Abscissenlinie geneigte Ordinate XZ denken, und nun eine Gleichung zwischen der Abscisse $AZ = u$, $ZX = v$ suchen. Da $UX = z = \frac{v \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$ und $x = u + \frac{v \cdot \sin(\alpha - \gamma)}{\sin\alpha}$ ist, so geht unsre Gleichung $z = ax + f$, über in $\frac{v \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = \alpha u + \frac{a v \cdot \sin(\alpha - \gamma)}{\sin\alpha} + f$,

oder $v \cdot (\sin\gamma - a \cdot \sin(\alpha - \gamma)) = (au + f) \sin\alpha$.

Nimmt man also γ so an, dass $Sin\,\gamma = a\,.\,Sin\,(\alpha - \gamma)$,
oder dass $tang\,\gamma = \frac{a\,.\,Sin\,\alpha}{1 + a\,.\,Cos\,\alpha}$ ist, so wird für diesen Werth von γ,

$$o = (a\,u + f)\,Sin\,\alpha, \text{ oder } o = a\,u + f$$
$$u = -\frac{f}{a}.$$

Dieser einzige Werth von u entspricht also den sämmtlichen Punkten der ganzen Linie, oder alle Punkte unsrer Linie der ersten Ordnung liegen auf dieser einzigen Ordinate, oder die unter dem angegebnen Winkel γ gezogne Ordinate, die durch den so bestimmten Punkt der Abscissenlinie geht, ist selbst die Linie, die in unsrer Gleichung ausgedrückt war, und kein andrer Werth für u kann, wenn die Ordinaten unter diesem Winkel γ gezogen worden, einen Werth für v geben. In der Figur ist nämlich $AK = -\frac{f}{a}$, und wenn man den Winkel $\gamma = XKB$ nimmt, so würde keine andre unter diesem Winkel gezogne gerade Linie die Linie der ersten Ordnung treffen. KX ist also selbst diese Linie.

Dritter Beweis. Man zeichne (Fig. 33.) eine neue unter dem Winkel γ gegen AB geneigte, durch den vorigen Anfangspunkt gehende Abscissenlinie, und setze auf diese Linie AL die Ordinate LX senkrecht. Nennt man nun $AL = s$, $LX = t$, so ist, wenn man wie in §. 27. 28. 29. die Rechnung führt,

$$z = \frac{s\,.\,Sin\,\gamma + t\,.\,Cos\,\gamma}{Sin\,\alpha};$$
$$x = \frac{s\,.\,Sin\,(\alpha - \gamma) - t\,.\,Cos\,(\alpha - \gamma)}{Sin\,\alpha},$$

also da $z = a\,x + f$ war,

$$s\,.\,Sin\,\gamma + t\,.\,Cos\,\gamma = a\,s\,.\,Sin(\alpha - \gamma) - a\,t\,.\,Cos(\alpha - \gamma) + f\,.\,Sin\,\alpha,$$

woraus $t = \frac{s\,.\,(Sin\,\gamma - a\,.\,Sin\,(\alpha - \gamma)) - f\,.\,Sin\,\alpha}{-(a\,.\,Cos\,(\alpha - \gamma) + Cos\,\gamma)}$ folgt. Nimmt man also hier $Sin\,\gamma = a\,.\,Sin\,(\alpha - \gamma)$, oder zieht die Linie AL so, dass sie unter diesem Winkel γ gegen die vorige Abscissenlinie geneigt ist, so ist

$t = \frac{+ f\,.\,Sin\,\alpha}{a\,.\,Cos\,(\alpha - \gamma) + Cos\,\gamma}$, gleich einer unveränderlichen Grösse. Alle Punkte unserer Linie der ersten Ordnung liegen also in gleichen senkrechten Abständen von AL, das ist, die Linie der ersten Ordnung ist eine unter jenem Winkel γ geneigte, also mit AL parallele gerade Linie, und der senkrechte Abstand ist $t = \frac{f\,.\,Sin\,\alpha}{a\,.\,Cos(\alpha - \gamma) + Cos\,\gamma} = \frac{f\,.\,Sin\,\alpha}{\sqrt{(1 + 2\,a\,.\,Cos\,\alpha + a^2)}} = \frac{f}{a}\,Sin\,\gamma.$

§. 87. Aufgabe. Es sind zwei Punkte gegeben, durch welche die

gerade Linie gehen soll, man sucht eine Gleichung für sie, worin die beständigen Grössen der gegebnen Lage jener zwei Punkte gemäss sind.

Auflösung. Es sey des einen gegebnen Punktes Abscisse $= c$, Ordinate $= g$; des andern gegebnen Punktes Abscisse $= h$, Ordinate $= k$, so muss in der allgemeinen Gleichung

$z = ax + f$, das eine Mal $g = ac + f$,
das andre Mal $k = ah + f$,

also $a = \frac{g - k}{c - h}$ und $f = \frac{ck - gh}{c - h} = \frac{gh - ck}{h - c}$ werden.

Ist also G der Anfangspunkt der Abscissen (Fig. 34.), $GC = c$, $GD = h$, $CA = g$, $DB = k$, so ist $BF = k - g$, $AF = h - c$, also $a = tang\, BAF$ gleich der Tangente des Winkels, unter welchem die gerade Linie gegen die Abscissenlinie geneigt ist, f dagegen giebt an, wie hoch der senkrecht über dem Anfangspunkte der Abscissen befindliche Punkt unserer Linie liegt. Die Gleichung $f = \frac{gh}{h - c} - \frac{ck}{h - c}$ giebt $f = GH - HI$ an; denn es ist

$DC : GD = CA : GH$, also $GH = \frac{gh}{h - c}$, $AF : AL = DB : HI$,
$HI = \frac{ck}{h - c}$.

§. 88. Diese Betrachtungen zeigen, dass die Gleichung des ersten Grades keine andre Linie als die gerade Linie in allen ihren verschiedenen Lagen enthält.

Wird $a = o$ in der Gleichung $z = ax + f$, so ist
$z = f$ die Gleichung für eine mit der Abscissenlinie parallele gerade Linie. Dagegen müsste man in der allgemeinen Gleichung
$bz = ax + f$, $b = o$ setzen, wenn der Coordinatenwinkel $= 90°$ ist und eine auf die Abscissenlinie senkrechte Linie verlangt würde, denn alsdann wäre $x = \frac{f}{\alpha}$ eine beständige Grösse.

Sechster Abschnitt.

Vom Kreise.

§. 89. Bemerkung. Wir wollen hier nur die einzige Eigenschaft des Kreises, dass jeder Punkt seines Umfangs gleich entfernt vom Mittelpunkte sey, als bekannt annehmen, und andre Eigenschaften daraus herzuleiten suchen.

§. 90. Aufgabe. Es ist die Lage des Mittelpunktes und der Halbmesser eines Kreises gegeben, man sucht eine Gleichung für den Kreis zwischen rechtwinkligen Coordinaten.

Aufl. Die Lage des Mittelpunkts A (Fig. 35.) sey durch rechtwinklige Coordinaten $CB = a$, $BA = b$ gegeben, irgend ein Punkt X im Umfange des Kreises soll durch rechtwinklige Coordinaten $CZ = x$, $ZX = z$ bestimmt werden, des Kreises Halbmesser ist $= r$. Offenbar ist, wenn AU mit CZ parallel gezogen wird, $AX^2 = r^2 = (x - a)^2 + (z - b)^2$, die Gleichung für den Kreis.

Aus dieser Gleichung folgt $(z - b)^2 = r^2 - (x - a)^2$,

oder $z = b \pm \sqrt{(r^2 - (x - a)^2)}$.

Jede Ordinate ZX schneidet also die Kreislinie zweimal, wie der doppelte Werth der Ordinate angiebt, und man findet beide Einschnittspunkte, wenn man zuerst die Entfernung $= b = ZU$ aufträgt, dieselbe, in welcher der Mittelpunkt sich befindet, und dann das eine Mal hinaufwärts, das andere Mal herabwärts $UX = UY = \sqrt{(r^2 - (x - a)^2)}$ aufträgt.

Ganz ähnliche Bestimmungen würden sich für x ergeben.

§. 91. Bequemer würden die Gleichungen ausfallen, wenn CZ durch den Mittelpunkt ginge. Alsdann wäre $b = c$,

$z = \pm \sqrt{(r^2 - (x - a)^2)}$,

das ist, die Ordinate erhält dann zwei gleiche entgegen gesetzte Werthe, oder die Einschnittspunkte liegen, der eine so weit oberhalb AU, als der andre unterhalb liegt.

§. 92. Wenn man als einen bestimmtern Fall $a = r$ und $b = o$ annimmt, so liegt der Anfangspunkt der Abscisse in D, und er ist nun $z^2 = 2rx - x^2$ eine Gleichung für den Kreis durch Abscissen, die auf dem Durchmesser genommen und von dessen Endpunkte an gerechnet sind.

Setzt man dagegen $a = o$, so ist $z^2 = r^2 - x^2$ eine Gleichung für senkrechte Ordinaten, wenn die Abscissen vom Mittelpunkte an gerechnet werden.

§. 93. Wenn man in der Gleichung §. 91. $x > r$ setzen wollte, so würde z unmöglich, weil eine Senkrechte, FG, die auf dem verlängerten Halbmesser in einem grössern Abstande $AF > r$ errichtet wird, den Kreis nirgends treffen kann.

Für $x = r$ wird $z = o$; die beiden Werthe $z = + \sqrt{(r^2 - x^2)}$ und $z = - \sqrt{(r^2 - x^2)}$ fallen hier in einen zusammen. Die hier errichtete Senkrechte ist also eine blosse Berührungslinie, die mit der Kreislinie nur einen Punkt gemein hat.

§. 94. Da $z^2 = r^2 - x^2$ war, so ist auch

$r - x : z = z : r + x$, oder $DU : UX = UX : UE$.

Eine bekannte Eigenschaft des Kreises, dass UX die mittlere Proportionallinie zwischen DU und UE ist.

Eben so erhellt leicht, dass $DX^2 = z^2 + (r + x)^2 = 2r^2 + 2rx$, also $r + x : DX = DX : 2r$ sey. Ferner da $EX^2 = z^2 + (r - x)^2 = 2r^2 - 2rx$, und $DX^2 = 2r(r+x)$, so hat man $DX^2 : EX^2 = r + x : r - x = DU : UE$.

§. 95. Aufgabe. Die Lage des Kreismittelpunktes und die Grösse seines Halbmessers sey gegeben, man sucht eine Gleichung zwischen schiefwinkligen Coordinaten für die Kreislinie (Fig. 35.).

Auflösung. Es sey $XSZ = \alpha$ der Winkel, welchen die Ordinaten mit der Abscissenlinie machen, und die Lage des Mittelpunktes durch die Abscisse $CH = a$, und die unter eben jenem Winkel geneigte Ordinate $HA = b$ gegeben. Zieht man nun AF durch den Mittelpunkt des Kreises mit der Abscissenlinie parallel, so würde, wenn $AU = x$ die senkrechte Ordinate $UX = z$ hiess, $z^2 = r^2 - x^2$ seyn. Nenne ich also jetzt die Abscisse $CS = u$, die Ordinate $SX = v$, so ist $u = a + AW = a + x - (v - b) \operatorname{Cos} \alpha$, weil $v = b + WX$ ist, und $z = (v - b) \operatorname{Sin} \alpha$.

Jene Gleichung $z^2 = r^2 - x^2$ giebt also

$$(v - b)^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha = r^2 - (u - a + (v - b) \operatorname{Cos} \alpha)^2,$$

das ist $(v - b)^2 + 2(v - b) \cdot (u - a) \operatorname{Cos} \alpha = r^2 - (u - a)^2$,
oder $v - b = -(u - a) \operatorname{Cos} \alpha \pm \sqrt{\{r^2 - (u - a)^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha\}}$ die verlangte Gleichung zwischen schiefwinkligen Coordinaten.

§. 96. Hier drückt wieder der rationale Theil des Werthes von v aus, was man von der Abscissenlinie an auf der Ordinate auftragen muss, um die Mitte der Sehne XR, die Mitte zwischen beiden Einschnittspunkten der Ordinate zu finden; der irrationale Theil hingegen drückt die halbe Sehne $= TX = \frac{1}{2} XR$ aus. Dieses geht, so wie in §. 47., unmittelbar aus Betrachtung der Gleichung $v = b - (u - a) \operatorname{Cos} \alpha \pm \sqrt{(r^2 - (u - a)^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha)}$ hervor, indem

$$ST = b - (u - a) \operatorname{Cos} \alpha = HA - WT$$

$$TX = TR = \sqrt{(r^2 - (u - a)^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha)}$$ das eine Mal positiv, das andre Mal negativ muss aufgetragen werden; aber auch die geometrische Betrachtung zeigt, weil die Sehne durch AT senkrecht halbirt wird, dass

$$WT = (u - a) \operatorname{Cos} \alpha \text{ und}$$
$$AT = (u - a) \operatorname{Sin} \alpha \text{ ist.}$$

§. 97. Lehrsatz. Wenn zwei gerade Linien WM, WV (Fig. 36.) sich einander in W durchschneiden und die Kreislinie in L, M und in X, V treffen, so ist das Rechteck aus WL, WM, eben so gross an Inhalt, als das Rechteck aus WX, WV.

Beweis. Es sey WD durch des Kreises Mittelpunkt A gezogen, und es sey WM unter dem Winkel $SWM = \alpha$ gegen diesen Durchmesser geneigt, so ist, wenn man $AW = u$, $WL = v$ setzt (nach §. 95.), $v = -u \cdot \operatorname{Cos} \alpha \pm \sqrt{(r^2 - u^2 \cdot \operatorname{Sin}^2 \alpha)}$, denn hier ist $a = b = o$, weil der Anfangspunkt der Abscissen in den Mittelpunkt selbst fällt. Es ist also

der eine Werth von v, $v' = -u \cdot Cos\,\alpha + \sqrt{(r^2 - u^2 \cdot Sin^2\,\alpha)}$,
der andere Werth, $v'' = -u \cdot Cos\,\alpha - \sqrt{(r^2 - u^2 \cdot Sin^2\,\alpha)}$,
also $v' . v''$ oder $WL \cdot WM = (u^2 . Cos^2\,\alpha - (r^2 - u^2 - u^2 . Sin^2\,\alpha)) = (u^2 - r^2)$
$= WD \cdot WE$.

Das Rechteck aus $WL \cdot WM$ ist also gleich dem Rechteck aus $WD \cdot WE$, und genau eben so würde bewiesen, dass das Rechteck aus $WX . WV$, eben so gross als das aus $WD \cdot WE$ ist.

§. 98. Wenn hier, wie in Fig. 36., $SWM = \alpha$ ein stumpfer Winkel ist, so wird $-u . Cos\,\alpha$ eine positive Grösse, und daher ist die eine Ordinate WM die Summe des rationalen Gliedes $= WP$ und des irrationalen Gliedes $= PM$, die andre WL gleich dem Unterschiede beider $= WP - PL$.

Das Rechteck $v' \cdot v''$ wird als negativ angegeben, $= -(r - u) \cdot (r + u)$, so lange u kleiner als r ist, weil alsdann die Einschnittspunkte an entgegen gesetzte Seiten der Abscissenlinie fallen.

§. 99. Wenn $AS = u$ den Werth erlangt hat, dass $r = u . Sin\,\alpha$ ist, so wird die schneidende Linie zu einer bloss berührenden, indem dann die halbe Sehne $= o$ wird. Alsdann sind die beiden Werthe der Ordinate in einen zusammen gefallen, und es ist daher $SR^2 = SE \cdot SD = (u - r) \cdot (u + r)$.

§. 100. Anmerkung. Diesen sehr bekannten Sätzen vom Kreise füge ich noch einige andre bei, deren Beweise ich hier aus den Gleichungen ableite; Beweise für sie, nach der Euclidischen Beweisart geführt, findet man in: *Gregorii a Sto Vincentio opus geometricum de quadratura circuli*, *Libro tertio*, *propos.* 17. 18. 21. 5. 14.

§. 101. Lehrsatz. Wenn zwei Kreise (Fig. 37.) sich von innen in B berühren, und es ist der Durchmesser des kleinern dem Halbmesser des grössern gleich, so ist, wenn man die gemeinschaftliche Tangente beider in B und von E, dem Mittelpunkte des grössern Kreises, aus eine willkürliche, beide Kreise in G, H schneidende Linie EF, von deren Einschnittspunkte G in den kleinern Kreis aber die Senkrechte GI zieht, $EI : EG = EG : EH = EH : EF$, oder die vom Mittelpunkte E an auf der Linie EF abgeschnittene Stücke sind zwei mittlere Proportionallinien zwischen EI und EF, wenn F der Einschnittspunkt in die Tangente ist.

Beweis. Es sey der Halbmesser des kleinern Kreises $= r$, des grössern $= 2r$. Rechnet man nun für den kleinern Kreis die Abscisse $EI = x$ vom Endpunkte seines Durchmessers an, so ist die senkrechte Ordinate

$IG = \sqrt{(2rx - x^2)}$ und folglich $EG^2 = 2rx$;

zugleich ist $EH = 2r$ und $EF = \dfrac{EG \cdot EB}{EI} = \dfrac{2r}{x} \cdot \sqrt{2rx}$,

oder $EF = 2r\sqrt{\dfrac{2r}{x}}$, also haben die Proportionen

$EI : EG = EG : EH = EH : EF$,

folgende Werthe: $x : \sqrt{2rx} = \sqrt{2rx} : 2r = 2r : 2r\sqrt{\frac{2r}{x}}$, welches offenbar richtige Proportionen sind.

§. 102. Lehrsatz. Wenn man (Fig. 38.) in zwei sich von innen berührenden Kreisen eine Senkrechte auf die die Mittelpunkte verbindende Linie errichtet, und von dem gemeinschaftlichen Berührungspunkte A gerade Linie AF, AD nach den Einschnittspunkten dieser Senkrechten in beide Kreislinien zieht, so ist das Verhältniss der Linien $AF : AD$ immer dasselbe, wo immer die Senkrechte HD errichtet war.

Beweis. Es sey der Halbmesser des kleinern Kreises $= r$, des grössern $= R$ und $AH = x$, so ist $FH = \sqrt{(2rx - x^2)}$ und $DH = \sqrt{(2Rx - x^2)}$,

$$AF = \sqrt{2rx}; \quad AD\ \sqrt{2Rx},$$

also $AF : AD = \sqrt{r} = \sqrt{R}$, ein von x gar nicht abhängendes Verhältniss.

§. 103. Lehrsatz. Im Halbkreise ABC (Fig. 39.) sey eine willkürliche Ordinate BD senkrecht auf den Durchmesser gezogen; diese in H halbirt und um H mit dem Halbmesser $HB = HD$ ein Kreis gezogen. Zieht man nun vom Endpunkte C des dem ersten Kreise zugehörigen Durchmessers die Linie CH nach dem Mittelpunkte des zweiten, und von B aus durch den Einschnittspunkt G dieser Linie in den zweiten Kreis die gerade Linie BE, so theilt diese AC so, dass $AD : DE = DE : EC$ ist.

Beweis. Es sey des Kreises ABC Halbmesser $= r$, und $AD = x$, so ist $BD = \sqrt{(2rx - x^2)}$, wofür ich $= 2\varrho$ setzen will. Offenbar ist der Winkel $GHD = 2 . GBD$, und $tang\ GHD = \frac{2r - x}{\varrho}$; $tang\ GBD = \frac{DE}{2\varrho}$. Da nun

$$tang\ 2 . GBD = \frac{2 . tang\ GBD}{1 - tang^2\ GBD}, \text{ so ist } \frac{2r - x}{\varrho} = \frac{\frac{DE}{\varrho}}{1 - \frac{DE^2}{4\varrho^2}}, \text{ oder}$$

$$(2r - x)\frac{(4\varrho^2 - DE^2)}{4\varrho^2} = DE, \text{ also } (4\varrho^2 - DE^2) = \frac{4\varrho^2 . DE}{2r - x}, \text{ oder da}$$

$4\varrho^2 = (2r - x)x$ war, $2rx - x^2 - DE^2 = x . DE$, woraus

$$DE = -\tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{(2rx - \tfrac{3}{4}x^2)}$$

und $EC = 2r - x - DE = 2r - \frac{1}{2}x \mp \sqrt{(2rx - \frac{3}{4}x^2)}$ folgt. Vergleicht man diese Werthe, so ist

$EC . x = DE^2 = + 2rx - \frac{1}{2}x^2 \mp x\sqrt{(2rx - \frac{3}{4}x^2)}$, also die Richtigkeit des Lehrsatzes erwiesen.

§. 104. In Beziehung auf die Angabe des Lehrsatzes gilt nur das obere Zeichen; aber wenn man CG bis F verlängert hätte, wo sie abermals in den zweiten Kreis einschneidet und dann BF gezogen hätte, so wäre wieder

$\frac{DK}{2\varrho} = tang\, KBD$, und $\frac{DC}{\varrho} = tang\,(180^\circ - 2 . KBD) - tang\, 2 . KBD$,

also $- DC = \frac{DK}{1 - \frac{DK^2}{4\varrho^2}} = -(2r - x)$, woraus eben so wie vorhin

$$DK^2 - \frac{4\varrho^2 . DK}{2r - x} = 4\varrho^2 \text{ folgt,}$$

also $DK = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{(2rx - \frac{3}{4}x^2)}$,
diess ist eben dasselbe, was vorhin durch $-\frac{1}{2}x - \sqrt{(2rx - \frac{3}{4}x^2)}$ wegen der entgegen gesetzten Lage in Vergleichung gegen DE angegeben wurde. Es knüpft sich also hieran die zweite Proportion $AD : DK = DK : KC$.

§. 105. Lehrsatz. Wenn man die Summe der Durchmesser zweier sich von aussen berührender Kreise oder die Linie AE (Fig. 40.) in F halbirt, und mit willkürlichem Halbmesser um den Mittelpunkt F einen Kreis zeichnet: so wird jede durch den Berührungspunkt C jener Kreise gezogne gerade Linie GH von den drei Kreisen so geschnitten, dass $GB = DH$, das ist das auf ihr zwischen einem der berührenden Kreise und dem dritten Kreise abgeschnittene Stück bei beiden gleich ist.

Beweis. Es sey $AC = 2R$, $CE = 2r$, also $FC = R - r$; des dritten Kreises Halbmesser sey $= \varrho$, der Winkel $LCH = \varphi$, so ist, wenn FI auf GH senkrecht ist, $CH = \frac{1}{2} GH - IC = \frac{1}{2} GH - (R - r)\, Cos\,\varphi$;
und $GC = \frac{1}{2} GH + (R - r)\, Cos\,\varphi$,
Zugleich $CD = 2r . Cos\,\varphi$ und $CB = 2R . Cos\,\varphi$, also
$CH - CD = \frac{1}{2} GH - (R + r)\, Cos\,\varphi$ und $CG - CB = \frac{1}{2} GH - (R + r)\, Cos\,\varphi$.

§. 106. Lehrsatz. Ueber den Seiten AB, BC, AC (Fig. 41.) eines Dreiecks sind ähnliche Kreisbogen AEB, BHC, $ADGC$ gezeichnet. Zieht man nun durch die Spitze des Dreiecks B eine willkürliche gerade Linie EH, so wird diese von den drei Kreisen so geschnitten, dass $DE = GH$ oder die zwischen den concaven Kreisbogen des ersten und dritten und des zweiten und dritten Kreises abgeschnittenen Stücke gleich werden.

Beweis. Da im Dreiecke ABC alles gegeben ist, so sind die Winkel A, B, C und die Seiten $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ gegebne Grössen. Ueberdas ist die Grösse des über jeder Seite beschriebnen Bogens gegeben; es sey also der Winkel im Abschnitt $= \beta$. Endlich ist die Lage der Linie EH gegeben, es sey also auch der Winkel $CBH = \varphi$ bekannt.

N, M, K sind die Mittelpunkte der Kreise, deren Halbmesser sind:

$\frac{\frac{1}{2}c}{Sin\,\beta}$ für den Kreis AEB,

$\frac{\frac{1}{2}a}{Sin\,\beta}$ für den Kreis BHC,

$\frac{\frac{1}{2}b}{Sin\,\beta}$ für den Kreis $ADGC$.

Ziehe ich BO senkrecht auf AC, so ist $BO = c\,.\,Sin\,A$; $AO = c\,.\,Cos\,A$; $OL = \frac{1}{2}b - c\,.\,Cos\,A$; $KL = \frac{1}{2}b\,.\,Cotang\,\beta$, weil $LKA = \beta$ ist; der Winkel $OBG = 90° - C + \varphi$.

Nenne ich nun $BG = x$, so ist $QG = x\,.\,Cos\,(C - \varphi)$,

$$QP = c\,.\,Sin\,A - x\,.\,Sin\,(C - \varphi) - \tfrac{1}{2}b\,.\,Cotang\,\beta,$$

und $KG^2 = PQ^2 + (QG - LO)^2 = \left(\frac{b}{2\,.\,Sin\,\beta}\right)^2$, weil KG der Halbmesser des Kreises $ADGC$ ist, also

$$\frac{b^2}{4\,.\,Sin^2\beta} = [c\,.\,Sin\,A - \tfrac{1}{2}b\,.\,Cotg\,\beta - x\,.\,Sin\,(C - \varphi)]^2$$
$$+ [x\,.\,Cos\,(C - \varphi) - (\tfrac{1}{2}b - c\,.\,Cos\,A)]^2.$$

Diese Gleichung giebt entwickelt

$$x^2 + 2x\left\{\tfrac{1}{2}b\,\frac{Sin\,(C - \varphi - \beta)}{Sin\,\beta} + c\,.\,Cos\,(A + C - \varphi)\right\} = \frac{b\,c\,.\,Sin\,(A + \beta)}{Sin\,\beta} - c;$$

also
$$x = -\tfrac{1}{2}b\,.\,\frac{Sin\,(C - \varphi - \beta)}{Sin\,\beta} - c\,.\,Cos\,(A + C - \varphi)$$
$$\pm \sqrt{\left\{- c^2\,.\,Sin^2\,(A + C - \varphi) + \tfrac{1}{4}\,\frac{b^2\,.\,Sin^2\,(C - \varphi - \beta)}{Sin^2\,\beta} + \frac{b\,c}{Sin\,\beta}\,[Sin\,(A + \beta) + Sin\,(C - \varphi - \beta)\,.\,Cos\,(C - \varphi + A)]\right\}}.$$

Dieser doppelte Werth giebt sowohl BG, als BD an, und wenn ich also die Wurzelgrösse $= l$ setzte, so ist

$$BG = \tfrac{1}{2}b\,.\,\frac{Sin\,(\varphi + \beta - C)}{Sin\,\beta} - c\,.\,Cos\,(A + C - \varphi) + l;$$

$$BD = -\tfrac{1}{2}b\,.\,\frac{Sin\,(\varphi + \beta - C)}{Sin\,\beta} + c\,.\,Cos\,(A + C - \varphi) + l.$$

Der Werth von BH ist, weil der Bogen $BHC = 360° - 2\beta$ und $CH = 2\varphi$, durch $\frac{a}{Sin\,\beta}\,.\,Sin\,(\beta + \varphi)$, und

BE durch $\frac{c}{Sin\,\beta}\,.\,Sin\,(A + C + \beta - \varphi)$ ausgedrückt.

Es ist also

$$GH = \frac{a\,.\,Sin\,(\beta + \varphi)}{Sin\,\beta} - \frac{\frac{1}{2}b\,.\,Sin\,(\varphi + \beta - C)}{Sin\,\beta} + c\,.\,Cos\,(A + C - \varphi) - l,$$

$$DE = \frac{c . Sin(A + C + \beta - \varphi)}{Sin\, b} + \frac{\frac{1}{2} b . Sin(\varphi + \beta - C)}{Sin\, \beta} - c . Cos(A + C - \varphi) - l,$$

oder $DE = \frac{c . Sin(A + C - \varphi) . Cos\beta}{Sin\, \beta} + \frac{\frac{1}{2} b . Sin(\varphi + \beta - C)}{Sin\, \beta} - l.$

Daraus würde sich ergeben

$$GH - DE = \frac{a . Sin(\beta + \varphi) - b . Sin(\beta + \varphi - C) + c . Sin(\beta + \varphi - A - C)}{Sin\, \beta},$$

oder $GH - DE$

$$= \frac{Sin(\beta + \varphi) . \{a - b . Cos\, C + c . Cos(A + C)\} + Cos(\beta + \varphi) . \{b . Sin\, C - c . Sin(A + C)\}}{Sin\, \beta}.$$

Da nun $Sin(A + C) = Sin\, B$ und $b . Sin\, C = c . Sin\, B$, zugleich auch $Cos(A + C) = - Cos\, B$ und $a = b . Cos\, C + c . Cos\, B$ ist, so wird $GH - DE = 0$, wie der Lehrsatz angiebt.

Siebenter Abschnitt.

Von der Parabel.

§. 108. **Bemerkung.** Wir haben schon oben (§. 68.) die Parabel als eine krumme Linie kennen gelernt, in welcher (Fig. 28.) für jeden Punkt X die Summe des Abstandes von dem Punkte A und des senkrechten Abstandes von der Linie AB eine unveränderliche ist, oder $XA + XZ = a$.

Wir fanden für sie, wenn $CW = x$, $WX = u$ hiess, $u^2 = 2ax$, als die Gleichung, welche die Natur der Curve ausdrückt.

Die Curve erstreckt sich (Fig. 28.) über die Linie AB hinaus; aber die senkrechten Abstände von der Linie AB müssen offenbar als negativ angesehen werden, wenn der Punkt auf der Parabel, so wie Y, an der andern Seite liegt; dann also ist $AY - RY = a$, und wenn nun $CU = x = \frac{1}{2}a + RY$ heisst, UY aber $= u$, so ist $\sqrt{(u^2 + RY^2)} - RY = a$, also $u^2 = 2a . (x - \frac{1}{2}a) + a^2$, das ist $u^2 = 2ax$, wie vorhin, und die ganze Curve wird richtig durch diese Gleichung bestimmt.

§. 109. **Lehrsatz.** Die Parabel besteht aus zwei ganz gleichen, ins Unendliche fortlaufenden Theilen, die an den Seiten der Abscissenlinie so liegen, dass die ganze Curve in Beziehung auf diese symmetrisch ist.

Beweis. Da für die Ordinate u, $u^2 = 2ax$, also $u = \pm \sqrt{2ax}$ gefunden wird, so entspricht jeder Abscisse $= x$ eine gleich grosse negative und positive gegen die Axe senkrechte Ordinate, die ganze Curve besteht also aus zwei gleichen und ähnlichen Hälften, und da u möglich bleibt für alle, selbst

unendlich wachsende positive Werthe von x, so gehen diese beiden Aeste ins Unendliche fort.

§. 110. Erklärung. Diese Abscissenlinie, welche die ganze Parabel in zwei symmetrische Hälften theilt, heisst die Hauptaxe der Parabel. In ihr liegt der Punkt A, auf welchen sich die Abstände XA bezogen, und dieser heisst der Brennpunkt. Die durch den Brennpunkt senkrecht auf die Hauptaxe gezogne Sehne, welche $= 2AB = 2a$ ist, heisst der Parameter der Parabel, und der Einschnittspunkt der Axe in die Curve ihr Scheitel.

§. 111. Lehrsatz. In der Parabel ist jede auf die Hauptaxe senkrechte Ordinate die mittlere Proportionallinie zwischen dem Parameter und der vom Scheitel an gerechneten Abscisse $= x$.

Beweis. Für die Abscisse $x = CA = \frac{1}{2}a$ wird $u = a$ gleich dem halben Parameter; heisst also der Parameter $= p$, so ist $p = 2a$ und allgemein $u^2 = px$, worin der Beweis des Satzes liegt.

§. 112. Diese Eigenschaft leitet zu einem Mittel, um viele einzelne Punkte in der Parabel durch Zeichnung zu bestimmen. Trägt man nämlich (Fig. 42.) auf der Axe $AB = \frac{1}{4}p$; $AC = p$; $AD = \frac{9}{4}p$; $AE = 4p$ auf, und errichtet in ihren Endpunkten die Senkrechten $BF = \frac{1}{2}p$; $CG = p$; $DH = \frac{3}{2}p$; $EI = 2p$, so liegen die Punkte F, G, H, I in der Parabel. Oder allgemein nimmt man die Abscissen den Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, 25 proportional, so sind die zugehörigen Ordinaten der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 proportional.

§. 112. * Zu noch einer andern Zeichnungsmethode führt schon die erste Bestimmung, dass (Fig. 42.) $BG - GK = a = \frac{1}{2}p$ seyn soll, oder $BG = \frac{1}{2}p + GK = \frac{1}{4}p + x$. Nimmt man nämlich vom Scheitel A an auf der Hauptaxe $AP = AB = \frac{1}{4}p$, und zieht PQ senkrecht auf die Hauptaxe, so ist für jeden Punkt G in der Parabel der senkrechte Abstand GQ von dieser Linie gleich dem Abstande GB vom Brennpunkte. Will man also einen Punkt in der Parabel bestimmen, so trägt man PQ willkürlich auf, zieht QB nach dem Brennpunkte und QG mit der Axe parallel; nimmt man dann den Winkel $QBG = GQB$, so durchschneiden sich QG, BG in einem auf der Parabel liegenden Punkte G.

Die Linie PQ pflegt man die Directrix zu nennen.

§. 113. Erklärung. Die Linien vom Brennpunkte der Parabel bis an irgend einen Punkt in der Parabel selbst heissen Radien oder Radien Vectoren.

§ 114. Aufgabe. Eine Gleichung für die Parabel zu finden, welche den Abstand XB eines Punktes X vom Brennpunkte durch den Winkel $XBA = \varphi$ angiebt, wenn AB die Hauptaxe der Parabel ist (Fig. 42.).

Auflösung. Wenn $BX = \varrho$ heisst, so war es eine der ersten Eigenschaften der Parabel, dass die Summe der Abstände $BX + XU = \frac{1}{2}p$, unver-

änderlich sey. Diese Eigenschaft giebt sogleich $\varrho\,(1 + Cos\,\varphi) = \frac{1}{2}\,p$;

$$\varrho = \frac{p}{2\,(1 + Cos\,\varphi)} = \frac{p}{4\,.\,Cos^2\,\frac{1}{2}\,\varphi}.$$

§. 115. Die Summe der Abstände geht in eine Differenz über, wenn, wie bei G (Fig. 42.), der betrachtete Punkt über den Parameter hinaus liegt. Dieses zeigt auch unsre Formel richtig an, indem für $\varphi > 90°$, $Cos\,\varphi$ negativ wird.

§. 116. Aufgabe. Es sind (Fig. 42.) zwei Radien $BX = \varrho'$, $BH = \varrho''$ der Parabel und der Winkel $XBH = \alpha$, den sie am Brennpunkte B einschliessen, gegeben; man sucht die Lage der Hauptaxe und den Parameter der Parabel.

Auflösung. Es sey der gesuchte Winkel, welchen die Hauptaxe mit XB macht, $XBA = \varphi$, also $HBA = \varphi + \alpha$, so soll

$$\varrho'\,(1 + Cos\,\varphi) = \tfrac{1}{2}\,p = \varrho''\,(1 + Cos\,(\varphi + \alpha)),$$

also $Cos\,\varphi = \dfrac{\frac{1}{2}\,p - \varrho'}{\varrho'}$ und zugleich

$$\tfrac{1}{2}\,p = \varrho'' + \varrho''\,.\,Cos\,\varphi\,.\,Cos\,\alpha - \varrho''\,.\,Sin\,\varphi\,.\,Sin\,\alpha \text{ seyn;}$$

also $\frac{1}{2}\,p - \varrho'' = \varrho''\,.\,Cos\,\alpha\left(\dfrac{\frac{1}{2}\,p - \varrho'}{\varrho'}\right) - \varrho''\,.\,Sin\,\alpha\,\sqrt{(p\varrho' - \frac{1}{4}\,p^2)}$.

Wenn man diese Gleichung gehörig ordnet und quadrirt, so giebt sie

$$\tfrac{1}{4}\,p^2\,(\varrho'^2 - 2\,\varrho'\,\varrho''\,.\,Cos\,\alpha + \varrho''^2) - p\,.\,\varrho'\,.\,\varrho''\,(\varrho' + \varrho'')\,.\,(1 - Cos\,\alpha) = -\,\varrho'^2\,.\,\varrho''^2\,(1 - Cos\,\alpha)^2,$$

oder da $1 - Cos\,\alpha = 2\,.\,Sin^2\,\frac{1}{2}\,\alpha$ ist

$$p^2 - \frac{8\,p\,.\,\varrho'\,.\,\varrho''\,(\varrho' + \varrho'')\,Sin^2\,\frac{1}{2}\,\alpha}{(\varrho'^2 - 2\,\varrho'\,.\,\varrho''\,.\,Cos\,\alpha + \varrho''^2)} = -\,\frac{16\,\varrho'^2\,.\,\varrho''^2\,.\,Sin^4\,\frac{1}{2}\,\alpha}{(\varrho'^2 - 2\,\varrho'\,.\,\varrho''\,.\,Cos\,\alpha + \varrho''^2)}.$$

Diese Gleichung giebt aufgelösst:

$$p = \frac{4\,\varrho'\,\varrho''\,(\varrho' + \varrho'')\,.\,Sin^2\,\frac{1}{2}\,\alpha \pm 8\,\varrho'\,.\,\varrho''\,\sqrt{(\varrho'\,.\,\varrho'')}\,.\,Sin^2\,\frac{1}{2}\,\alpha\,.\,Cos\,\frac{1}{2}\,\alpha}{\varrho'^2 - 2\,\varrho'\,.\,\varrho''\,.\,Cos\,\alpha + \varrho''^2};$$

oder $p = \dfrac{4\,\varrho'\,.\,\varrho''\,.\,Sin^2\,\frac{1}{2}\,\alpha\,.\,\{\varrho' + \varrho'' \pm 2\,\sqrt{(\varrho'\,.\,\varrho'')}\,.\,Cos\,\frac{1}{2}\,\alpha\}}{\varrho'^2 - 2\,\varrho'\,.\,\varrho''\,.\,Cos\,\alpha + \varrho''^2}$.

Es erhält also p zwei verschiedene Werthe, entweder

$= \dfrac{4\,\varrho'\,.\,\varrho''\,.\,Sin^2\,\frac{1}{2}\,\alpha}{\varrho' + \varrho'' - 2\,\sqrt{(\varrho'\,.\,\varrho'')}\,.\,Cos\,\frac{1}{2}\,\alpha}$, oder $= \dfrac{4\,\varrho'\,.\,\varrho''\,.\,Sin^2\,\frac{1}{2}\,\alpha}{\varrho' + \varrho'' + 2\,\sqrt{(\varrho'\,.\,\varrho'')}\,.\,Cos\,\frac{1}{2}\,\alpha}$, und

daraus findet sich dann $Cos\,\varphi = \dfrac{p}{2\,\varrho'} - 1$. oder $Cos^2\,\frac{1}{2}\,\varphi = \dfrac{p}{4\,\varrho'}$.

§. 117. Der Werth von p wird doppelt bestimmt, weil es ungewiss ist, ob die Radien beide an derselben Seite der Hauptaxe liegen, oder an verschiedenen Seiten. Wäre z. B. $\varrho' = \frac{1}{3}$, $\varrho'' = \frac{1}{2}$ und $\alpha = 30$ Grad, so ist für die Parabel, worin beide auf derselben Seite der Axe liegen, $p = 1$, $\varphi = 60°$; sollen

sie dagegen auf verschiedenen Seiten der Axe liegen, so ist $p = \frac{0{,}04466}{1{,}6220} = 0{,}02753$ und $Cos\,\varphi = -0{,}95870$, $\varphi = 163^\circ\,29'$. $\varphi = 163^\circ\,30'$ und $\varphi + \alpha = 193^\circ\,29'$.

§. 117. * Ich kann nicht unterlassen, hier einen nahe verwandten Gegenstand zu erwähnen, der bei wirklich vorkommenden Fällen Anwendung findet, und der nur in sofern hier vielleicht nicht ganz an seinem Platze scheint, als er mehr Vorkenntnisse voraussetzt, als ich hier sonst voraus zu setzen pflege.

Wenn der Brennpunkt einer Parabel gegeben ist, und es sind mehr als zwei Punkte der Parabel durch die Lage und Grösse der vom Brennpunkte ausgehenden Radien Vectoren gegeben, so ist die Aufgabe, diese Parabel zu finden, durch zu viele Bedingungen bestimmt. Sind nun alle diese Radien ganz genau richtig angegeben, so hat man nur nöthig, zwei derselben mit dem eingeschlossenen Winkel in Rechnung zu nehmen, und ist überzeugt, dass die Parabel dann durch die übrigen Punkte (deren einen man noch gebrauchen kann, um unter den §. 116. gefundenen beiden Auflösungen die richtige zu wählen), nothwendig gehen wird. Häufiger aber tritt, wenn z. B. die Parabel durch Beobachtungen bestimmt ist, der Fall ein, dass alle Radien ein wenig fehlerhaft sind, und man nun diejenige Parabel zu haben verlangt, welche sich den sämmtlichen gegebnen Punkten am besten anschliesst.

Wenn die gegebnen Punkte wirklich wenig von einer Parabel abweichen, so kann man, indem man für zwei derselben die Rechnung, so wie in § 116., anstellt, die Lage der Axe und der Parameter einer Parabel finden, die diesen zwei Punkten genau entspricht, die aber nicht gerade die ganz richtige seyn wird, weil jene zwei Punkte nicht ganz als fehlerfrei angegeben, anzusehen sind, und man diejenige Parabel wählen soll, die sich allen Punkten am nächsten anschliesst.

Nenne ich also den Parameter der eben gefundenen Parabel $= p$, so wird der Parameter der gesuchten Parabel davon nur wenig verschieden $= p + \Delta p$ seyn, und wenn ich die Lage der Axe in jener Parabel durch den Winkel $= \varphi$, den sie mit einem der Radien einschloss, bestimmte, so wird für die gesuchte Parabel dieser Winkel etwas anders $= \varphi + \Delta\varphi$ seyn, diese Grössen Δp, $\Delta\varphi$ aber werden, da die erste Bestimmung schon der Wahrheit nahe kömmt, gewöhnlich so klein seyn, dass man ihre höhern Potenzen nicht zu berücksichtigen braucht.

Die Regel der kleinsten Quadrate, deren Grund hier zu entwickeln nicht der Ort ist, findet nun hier folgende Anwendung.

1. Wenn für irgend einen der gegebnen Punkte der Winkel, den der Radius mit der Axe der berechneten Parabel macht $= \varphi'$, der Radius selbst $= \varrho'$ ist, so wird der Winkel mit der Axe der gesuchten Parabel $= \varphi' + \Delta\varphi$, und

der wahre Radius Vector einer Parabel vom Parameter $p + \Delta p$ ist durch $= \frac{\frac{1}{2}(p + \Delta p)}{1 + Cos(\varphi' + \Delta\varphi)}$ bestimmt; der Unterschied zwischen dem gegebnen Radius und dem, der hier für die Parabel statt findet, ist also

$$\varrho' - \frac{\frac{1}{2}(p + \Delta p)}{1 + Cos(\varphi' + \Delta\varphi)}.$$

Da der Winkel, welcher die Axe der richtigen Parabel mit der Axe der schon berechneten Parabel macht, ein und derselbe bleibt, bei der Rechnung für alle gegebne Punkte, so erhellt, dass, wenn man φ'' den Winkel des Radius mit der Axe der gegebnen Parabel, und ϱ'' den Abstand vom Brennpunkte, für den zweiten gegebnen Punkt, nennt

$$\varrho'' - \frac{\frac{1}{2}(p + \Delta p)}{1 + Cos(\varphi'' + \Delta\varphi)}$$

das Stück des Radius seyn werde, welches über die Parabel, die sich am besten anschliesst, hinaus liegt.

Nimmt man diese Differenzen für alle Punkte, so besteht das Gesetz der kleinsten Quadrate darin, dass man die Summe

$$\left(\varrho' - \frac{\frac{1}{2}(p + \Delta p)}{1 + Cos(\varphi' + \Delta\varphi)}\right)^2 + \left(\varrho'' - \frac{\frac{1}{2}(p + \Delta p)}{1 + Cos(\varphi'' + \Delta\varphi)}\right)^2 + \left(\varrho''' - \frac{\frac{1}{2}(p + \Delta p)}{1 + Cos(\varphi''' + \Delta\varphi)}\right)^2 + \text{etc.}$$

zu einem Kleinsten macht.

Um dieses bequem zu erreichen, entwickle ich

$$\frac{\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\Delta p}{1 + Cos(\varphi' + \Delta\varphi)} = \frac{\frac{1}{2}(p + \Delta p)}{1 + Cos\,\varphi' - \Delta\varphi . Sin\,\varphi'},$$

weil höhere Potenzen wegbleiben, so dass die Glieder nach den Potenzen von Δp, $\Delta\varphi$ geordnet werden, wodurch $\frac{\frac{1}{4}p}{Cos^2\frac{1}{2}\varphi'} + \frac{\frac{1}{4}\Delta p}{Cos^2\frac{1}{2}\varphi'} - \frac{\frac{1}{8}p\,\Delta\varphi . Sin\,\varphi'}{Cos^4\frac{1}{2}\varphi'}$ hervor geht. Man müsste also in Beziehung auf jeden Punkt die Glieder

$$\varrho' - \frac{1}{4}\frac{p}{Cos^2\frac{1}{2}\varphi'} - \frac{\Delta p}{4\,Cos^2\frac{1}{2}\varphi'} - \frac{p . \Delta\varphi . Sin\,\varphi'}{8\,Cos^4\frac{1}{2}\varphi'}$$

entwickeln und die Quadrate nehmen, deren Summe dann diejenige ist, die ein Kleinstes werden sollte. Drücke ich jene eben entwickelten Glieder kurz durch

$$l' - m'\Delta p - n'\Delta\varphi$$

in Beziehung auf den ersten Punkt, durch $l'' - m''\Delta p - n''\Delta\varphi$ für den zweiten Punkt aus u. s. w., so soll demnach

$$(l' - m'\Delta p - n'\Delta\varphi)^2 + (l'' - m''\Delta p - n''\Delta\varphi)^2 + (l''' - m'''\Delta p - m'''\Delta\varphi)^2 + \text{etc.}$$

ein Kleinstes seyn, also, indem man die Differentialrechnung auf die bekannte Weise anwendet,

$$(l' - m'\Delta p - n'\Delta\varphi)\,m'\,d.\Delta p + (l'' - m''\Delta p - n''\Delta\varphi)\,m''\,d.\Delta p + (l''' - m'''\Delta p - n'''\Delta\varphi)\,m'''\,d.\Delta p + \text{etc.} = o,$$

und auch $(l' - m'\,\Delta p - n'\,\Delta\varphi)\,n'\,d\,\Delta\varphi + (l'' - m''\,\Delta p - n''\,\Delta\varphi)\,n''\,d\,\Delta\varphi$
$+ (l''' - m'''\,\Delta p - n'''\,\Delta\varphi)\,n'''\,d\,\Delta\varphi +$ etc. $= o$
seyn; und diese zwei Gleichungen dienen, um $\Delta\varphi$ und Δp zu finden.

Beispiel. Es sey für $\varphi' = 10^\circ,\quad \varrho' = 1{,}03 \cdot \tfrac{1}{4}\,p;$
$\varphi'' = 20^\circ,\quad \varrho'' = 1{,}065 \cdot \tfrac{1}{4}\,p;$
$\varphi''' = 40^\circ,\quad \varrho''' = 1{,}101 \cdot \tfrac{1}{4}\,p;$
$\varphi^{IV} = 60^\circ,\quad \varrho^{IV} = 1{,}305 \cdot \tfrac{1}{4}\,p;$
$\varphi^{V} = 70^\circ,\quad \varrho^{V} = 1{,}510 \cdot \tfrac{1}{4}\,p;$
$\varphi^{VI} = 90^\circ,\quad \varrho^{VI} = 2{,}012 \cdot \tfrac{1}{4}\,p;$
$\varphi^{VII} = 100^\circ,\quad \varrho^{VII} = 2{,}491 \cdot \tfrac{1}{4}\,p,$
wo die Abstände schon als mit dem Parameter der beinahe richtigen Parabel verglichen angenommen werden. Dann ist für den ersten Punkt $\varrho' - \tfrac{1}{4}\,\dfrac{p}{Cos^2\,\tfrac{1}{2}\,\varphi'} = 0{,}02234 \cdot \tfrac{1}{4}\,p = l;$

$$\frac{1}{4\,Cos^2\,\tfrac{1}{2}\,\varphi'} = 0{,}25191 = m';$$

$$\frac{p\,.\,Sin\,\varphi'}{8\,.\,Cos^4\,\tfrac{1}{2}\,\varphi'} = 0{,}02204\,.\,p = n'.$$

Für den ersten Punkt wird also die nach der Richtung des Radius gemessene Entfernung von der Parabel

$$= \tfrac{1}{4}\,p\,.\,0{,}02234 - 0{,}25191\,.\,\Delta p - 0{,}02204\,.\,p\,.\,\Delta\varphi.$$

Für die folgenden Punkte sind diese Abstände:

$$\begin{array}{ll}
\text{für } \varphi'' = 20^\circ \ldots & \tfrac{1}{4}\,p\,.\,0{,}03391 - 0{,}25777\,.\,\Delta p - 0{,}04545\,.\,p\,.\,\Delta\varphi; \\
\varphi''' = 40^\circ \ldots & -\tfrac{1}{4}\,p\,.\,0{,}03148 - 0{,}28312\,.\,\Delta p - 0{,}10305\,.\,p\,.\,\Delta\varphi; \\
\varphi^{IV} = 60^\circ \ldots & -\tfrac{1}{4}\,p\,.\,0{,}02833 - 0{,}33333\,.\,\Delta p - 0{,}19245\,.\,p\,.\,\Delta\varphi; \\
\varphi^{V} = 70^\circ \ldots & +\tfrac{1}{4}\,p\,.\,0{,}01971 - 0{,}37257\,.\,\Delta p - 0{,}26088\,.\,p\,.\,\Delta\varphi; \\
\varphi^{VI} = 90^\circ \ldots & \tfrac{1}{4}\,p\,.\,0{,}01200 - 0{,}50000\,.\,\Delta p - 0{,}50000\,.\,p\,.\,\Delta\varphi; \\
\varphi^{VII} = 100^\circ \ldots & \tfrac{1}{4}\,p\,.\,0{,}07072 - 0{,}60507\,.\,\Delta p - 0{,}72109\,.\,p\,.\,\Delta\varphi.
\end{array}$$

Es soll nun die Summe der Quadrate aller dieser Abstände ein Kleinstes seyn, also folgende zwei Gleichungen statt finden, die man durch Differentiirung der Summe der Quadrate erhält, wenn man die in allen Gliedern vorkommenden gleichen Factoren weglässt.

$$\begin{array}{rl}
\text{I.}\quad 0 = & (\tfrac{1}{4}\,p\,.\,0{,}02234 - 0{,}25191\,.\,\Delta p - 0{,}02204\,.\,p\,.\,\Delta\varphi)\,.\,0{,}25191; \\
+ & (\tfrac{1}{4}\,p\,.\,0{,}03391 - 0{,}25777\,.\,\Delta p - 0{,}04545\,.\,p\,.\,\Delta\varphi)\,.\,0{,}25777; \\
+ & (-\tfrac{1}{4}\,p\,.\,0{,}03148 - 0{,}28312\,.\,\Delta p - 0{,}10305\,.\,p\,.\,\Delta\varphi)\,.\,0{,}28312; \\
+ & (-\tfrac{1}{4}\,p\,.\,0{,}02833 - 0{,}33333\,.\,\Delta p - 0{,}19245\,.\,p\,.\,\Delta\varphi)\,.\,0{,}33333; \\
+ & (\tfrac{1}{4}\,p\,.\,0{,}01971 - 0{,}37257\,.\,\Delta p - 0{,}26088\,.\,p\,.\,\Delta\varphi)\,.\,0{,}37257; \\
+ & (\tfrac{1}{4}\,p\,.\,0{,}01200 - 0{,}50000\,.\,\Delta p - 0{,}50000\,.\,p\,.\,\Delta\varphi)\,.\,0{,}50000; \\
+ & (\tfrac{1}{4}\,p\,.\,0{,}07072 - 0{,}60507\,.\,\Delta p - 0{,}72109\,.\,p\,.\,\Delta\varphi)\,.\,0{,}60507,
\end{array}$$

oder in eine Summe vereinigt:

$$0 = \tfrac{1}{4}\,p\,.\,0{,}052147 - 1{,}076090\,.\,\Delta p - 0{,}894099\,.\,p\,.\,\Delta\varphi;$$

und als zweite Gleichung

$$\begin{array}{rl}
\text{II.}\quad 0 = & (\tfrac{1}{4}\,p\,.\,0{,}02234 - 0{,}25191\,.\,\Delta p - 0{,}02204\,.\,p\,.\,\Delta\varphi)\,.\,0{,}02204; \\
+ & (\tfrac{1}{4}\,p\,.\,0{,}03391 - 0{,}25777\,.\,\Delta p - 0{,}04545\,.\,p\,.\,\Delta\varphi)\,.\,0{,}04545; \\
+ & (-\tfrac{1}{4}\,p\,.\,0{,}03148 - 0{,}28312\,.\,\Delta p - 0{,}10305\,.\,p\,.\,\Delta\varphi)\,.\,0{,}10305; \\
+ & (-\tfrac{1}{4}\,p\,.\,0{,}02833 - 0{,}33333\,.\,\Delta p - 0{,}19245\,.\,p\,.\,\Delta\varphi)\,.\,0{,}19245; \\
+ & (\tfrac{1}{4}\,p\,.\,0{,}01971 - 0{,}37257\,.\,\Delta p - 0{,}26088\,.\,p\,.\,\Delta\varphi)\,.\,0{,}26088; \\
+ & (\tfrac{1}{4}\,p\,.\,0{,}01200 - 0{,}50000\,.\,\Delta p - 0{,}50000\,.\,p\,.\,\Delta\varphi)\,.\,0{,}50000; \\
+ & (\tfrac{1}{4}\,p\,.\,0{,}07072 - 0{,}60607\,.\,\Delta p - 0{,}72109\,.\,p\,.\,\Delta\varphi)\,.\,0{,}72109.
\end{array}$$

Diese zweite Gleichung giebt, wenn man die Glieder gehörig in eine Summe vereinigt: $0 = 0{,}055475 \cdot \frac{1}{4} p - 0{,}894099 \cdot \Delta p \cdot - 0{,}888237 \cdot p \, \Delta p$.

Um hieraus Δp zu finden, eliminire ich $\Delta \varphi$. Beide Gleichungen geben nämlich:

$$0 = 0{,}049600 \cdot \tfrac{1}{4} p - 0{,}799414 \cdot \Delta p - (0{,}88823693) \cdot (0{,}89409925) \cdot p \cdot \Delta \varphi,$$

$$\text{und } 0 = 0{,}046319 \cdot \tfrac{1}{4} p - 0{,}955823 \cdot \Delta p - (0{,}88823693) \cdot (0{,}89409925) \cdot p \cdot \Delta \varphi,$$

also $-0{,}003281 \cdot \frac{1}{4} p = 0{,}1564095 \cdot \Delta p$,

und $\Delta p = -0{,}020977 \cdot \frac{1}{4} p$;

$\Delta \varphi = 0{,}02090 = 1^\circ\, 12'$.

Die Parabel also, für welche die Summe jener Quadrate am kleinsten wird, hat eine Axe, die einen Winkel von $1^\circ\, 12'$ mit der Axe der zuerst angenommenen Parabel macht, und ihr Parameter ist $= 0{,}99476 \cdot p$.

Sätze, welche die Sehnen und Durchmesser der Parabel betreffen.

§. 118. **Lehrsatz.** Wenn man Sehnen der Parabel unter sich parallel, unter irgend einem Winkel geneigt gegen die Hauptaxe zieht, so werden diese von der Hauptaxe so geschnitten, dass der Inhalt des aus beiden Stücken der Sehne gebildeten Rechtecks proportional ist der Abscisse, oder dem Abstande des Punktes, wo die Sehne in die Hauptaxe einschneidet, vom Scheitel.

Beweis. Es sey (Fig. 43.) die Ordinate HV unter dem Winkel $HVE = \alpha$ gegen die Hauptaxe geneigt, und $AV = v$, $VH = w$, so ist für die senkrechten Coordinaten

$$AD = x = v + w \cdot \mathit{Cos}\,\alpha,$$

$$\text{und } DH = u = w \cdot \mathit{Sin}\,\alpha,$$

also aus der Gleichung $u^2 = px$ (§. 111.)

$$w^2 \cdot \mathit{Sin}^2\,\alpha = p\,v + p\,w \cdot \mathit{Cos}\,\alpha,$$

$$\text{das ist } w = \frac{\frac{1}{2} p \cdot \mathit{Cos}\,\alpha}{\mathit{Sin}^2\,\alpha} \pm \frac{\sqrt{(p\,v \cdot \mathit{Sin}^2\,\alpha + \frac{1}{4} p^2 \cdot \mathit{Cos}^2\,\alpha)}}{\mathit{Sin}^2\,\alpha}.$$

Der hier ausgedrückte doppelte Werth giebt die beiden Stücke der Sehne

$$HV = \frac{\frac{1}{2} p \cdot \mathit{Cos}\,\alpha + \sqrt{(p\,v \cdot \mathit{Sin}^2\,\alpha + \frac{1}{4} p^2 \cdot \mathit{Cos}^2\,\alpha)}}{\mathit{Sin}^2\,\alpha},$$

$$VL = \frac{\frac{1}{2} p \cdot \mathit{Cos}\,\alpha - \sqrt{(p\,v \cdot \mathit{Sin}^2\,\alpha + \frac{1}{4} p^2 \cdot \mathit{Cos}^2\,\alpha)}}{\mathit{Sin}^2\,\alpha}$$ an, und das aus beiden gebildete Rechteck hat den Inhalt $= \frac{-p\,v}{\mathit{Sin}^2\,\alpha}$, welcher der Abscisse v proportional ist.

§. 119. Der Inhalt des Rechtecks wird negativ ausgedrückt, so lange v positiv ist, weil, so lange das eine Stück der Sehne an der einen, das andere Stück an der andern Seite der Axe liegt.

Wenn v negativ wird, wie AW, so liegen beide Einschnittspunkte der Ordinate WN an derselben Seite der Axe, und das eben betrachtete Rechteck

hat nun die Seiten WF, WN. Für diesen Fall müsste der Lehrsatz etwas anders ausgedrückt werden, denn jetzt ist nicht mehr die Sehne in zwei Stücke getheilt, sondern es sind die Abstände ihrer Endpunkte von dem Einschnittspunkte in die Axe, welche hier die Seiten des Parallelogramms geben.

§. 120. Man hätte eben diese Folgerung aus der Gleichung

$$w^2 . Sin^2 \alpha = p\,v + p\,w . Cos\,\alpha, \text{ oder } w^2 - \frac{p\,w . Cos\,\alpha}{Sin^2 \alpha} - \frac{p\,v}{Sin^2 \alpha} = o$$

unmittelbar herleiten können. Die Theorie der Gleichungen nämlich lehrt, dass das Glied, welches die unbekannte Grösse w nicht enthält, ein Product aus den Werthen ist, welche, als Wurzeln der Gleichung, für die unbekannte Grösse w sich ergeben; also, wenn diese w', w'' heissen, $w' . w'' = - \frac{p . v}{Sin^2 \alpha}$.

§. 121. Auch hier, und so in allen ähnlichen Fällen, giebt der (§. 118.) gefundene rationale Theil des Werthes der Ordinate an, wie weit die Mitte der Sehne M von der Axe entfernt ist, nämlich $VM = \frac{\frac{1}{2} p . Cos\,\alpha}{Sin^2 \alpha}$; der irrationale Theil giebt die Grösse der halben Sehne an. So also ist

$$w' = VM + MH \text{ und } w'' = VM - ML.$$

§. 122. Der Werth der Ordinate wird unmöglich, wenn v einen so grossen negativen Werth erhält, dass

$$p\,v . Sin^2 \alpha + \tfrac{1}{4} p^2 . Cos^2 \alpha \text{ negativ wird.}$$

Für $v = - \frac{1}{4} p . Cotang^2 \alpha$ verschwindet die Sehne, und die Ordinate berührt nur noch die Parabel.

§. 123. Lehrsatz. Wenn man Sehnen der Parabel, die alle unter dem Winkel $= \alpha$ gegen die Hauptaxe geneigt sind, zieht, so werden diese von einer in der Entfernung $= \frac{1}{2} p . Cotang\,\alpha$ von der Hauptaxe mit ihr parallel gezogene Linie sämmtlich halbirt.

Beweis. Da für jede Sehne der Abstand ihrer Mitte vom Einschnitte in die Hauptaxe $= \frac{\frac{1}{2} p . Cos\,\alpha}{Sin^2 \alpha}$ ist (§. 121.), so ist der senkrechte Abstand der Mitte der Sehne von der Hauptaxe $= \frac{1}{2} p . Cotang\,\alpha$ für alle unter dem Winkel $= \alpha$ gegen sie geneigte Sehnen.

§. 124. Erklärung. Die mit der Hauptaxe parallele Linie, welche solche parallele Sehnen sämmtlich halbirt, heisst der diesen Sehnen zugeordnete oder conjugirte Durchmesser, oder die ihnen zugeordnete Axe der Parabel. Der Winkel, unter welchem sie gegen diesen Durchmesser geneigt sind, heisst ihr Conjugationswinkel. Diese Durchmesser oder Axen der Parabel sind also sämmtlich mit der Hauptaxe parallel.

§. 125. Lehrsatz. Wenn man auf dem, einer Sehne oder Ordinate zugeordneten Durchmesser RW (Fig. 43.) die Abscissen vom Einschnitte R in

die Parabel an rechnet, so ist das Quadrat dieser halben Sehne der Abscisse proportional.

Beweis. Nenne ich die halbe Sehne $= t$, so ist (§. 118.) $t^2 = \frac{p \cdot v}{Sin^2 \alpha} + \frac{\frac{1}{4} p^2 \cdot Cos^2 \alpha}{Sin^4 \alpha}$. Die Sehne verschwindet aber da, wo der conjugirte Durchmesser in die Parabel eintrifft, weil da jede der immer unter sich gleichen Hälften verschwindet, und es ist also für den Punkt R, $v' = - \frac{1}{4} p \cdot Cotang^2 \alpha$, mithin $AS = \frac{1}{4} p \cdot Cotang^2 \alpha$, und da allgemein $t^2 = \frac{p}{Sin^2 \alpha} (v + \frac{1}{4} p \cdot Cotang^2 \alpha) = \frac{p}{Sin^2 \alpha} (v + AS)$, so ist offenbar, weil $AV = v$, $t^2 = \frac{p}{Sin^2 \alpha} \cdot SV$, oder $t^2 = \frac{p \cdot RW}{Sin^2 \alpha}$, weil VX, RS einander parallel sind.

§. 126. Jede halbe Sehne ist also die mittlere Proportionallinie zwischen $\frac{p}{Sin^2 \alpha}$, welche auch hier der Parameter für diesen Durchmesser heisst, und der Abscisse RW, die auf dem diesen Sehnen conjugirten Durchmesser vom Ende desselben an gerechnet wird. Für die Hauptaxe ist $Sin \alpha = 1$, und folglich ist bei gleichen Abscissen auf verschiedenen Durchmessern die der Hauptaxe zugeordnete Ordinate am kleinsten. Dem Viertel dieses Parameters gleich $\frac{\frac{1}{4} p}{Sin^2 \alpha}$ ist der Abstand des Brennpunktes B von dem Einschnittspunkte R der neuen Axe in die Parabel, denn es ist $SR = \frac{\frac{1}{2} p \cdot Cos \alpha}{Sin^2 \alpha}$ (nach §. 123.), $SA = \frac{1}{4} p \cdot Cotang^2 \alpha$, $AB = \frac{1}{4} p$, wenn B den Brennpunkt vorstellt, also

$$BR^2 = \frac{\frac{1}{4} p^2 \cdot Cos^2 \alpha}{Sin^4 \alpha} + \frac{1}{16} p^2 (1 + Cotang^2 \alpha)^2 - \frac{p \cdot Cos \alpha}{Sin^2 \alpha} \cdot \frac{p}{4} (1 + Cotang^2 \alpha) \cdot Cos \alpha$$

$$= \frac{1}{16} \frac{p^2}{Sin^4 \alpha}, \text{ und } BR = \frac{1}{4} \frac{p}{Sin^2 \alpha}.$$

§. 127. Lehrsatz. Wenn man gegen einen Durchmesser RW der Parabel, der in R in die Parabel einschneidet, Ordinaten unter einem willkürlichen Winkel $= \gamma$ geneigt zieht, so ist auch hier das Rechteck aus den beiden Werthen der von diesem Durchmesser an gerechneten Ordinate der zugehörigen Abscisse auf RW proportional (Fig. 43.).

Beweis. Es sey WX die der Axe RW richtig zugeordnete unter dem Winkel $= \alpha$ gegen sie geneigte Ordinate, oder PX die von eben diesem Durchmesser RW halbirte Sehne, dagegen sey ZX unter dem Winkel $= \gamma$ gegen die Axe geneigt. Nenne ich nun $WX = t$, $RW = s$, $RZ = w$, $ZX = y$, so ist

$$t^2 = \frac{p\,s}{Sin^2\,\alpha};\; t = \frac{y\,.\,Sin\,\gamma}{Sin\,\alpha};\;\; s = w - \frac{y\,.\,Sin\,(\gamma - \alpha)}{Sin\,\alpha},$$

also $y^2\,.\,Sin^2\,\gamma = p\,w - \frac{p\,y\,.\,Sin\,(\gamma - \alpha)}{Sin\,\alpha}$;

$$y = - \frac{p\,.\,Sin\,(\gamma - \alpha)}{2\,.\,Sin\,\alpha\,.\,Sin^2\,\gamma} \pm \sqrt{\left\{\frac{p\,w}{Sin^2\,\gamma} + \tfrac{1}{4}\,\frac{p^2\,.\,Sin^2\,(g - \alpha)}{Sin^2\,\alpha\,.\,Sin^4\,\gamma}\right\}}.$$

Die beiden Ordinaten ZX, ZY werden also durch den eben angegebenen doppelten Werth ausgedrückt, und das Rechteck aus beiden ist $= - \frac{p\,w}{Sin^2\,\gamma}$, das ist, der Abscisse direct und dem Quadrate des $Sin\,\gamma$ umgekehrt proportional.

§. 128. Lehrsatz. Wenn irgend ein Durchmesser der Parabel RZ (Fig. 44.) gezogen ist, mit welchem die ihm richtig zugeordneten den Winkel $XWZ = \alpha$ einschliessen, so trifft die unter dem Winkel $XRZ = \frac{1}{2}\,\alpha$ vom Endpunkte des Durchmessers an gezogene Sehne die Parabel in X so, dass sie durch X, dem Durchmesser RZ richtig zugeordnete Ordinate XW gleich der Abscisse RW und gleich dem Parameter für diesen Durchmesser ist.

Beweis. Da hier (§. 127.) $\gamma = \frac{1}{2}\,\alpha$ ist, und $w = o$, so wird $RX = \frac{p}{Sin\,\frac{1}{2}\,\alpha\,.\,Sin\,\alpha}$ u. folglich weil $WRX = RXW = \frac{1}{2}\,XWZ = \frac{1}{2}\,\alpha$ ist,

$$RW = WX = \frac{p}{Sin^2\,\alpha}.$$

§. 129. Lehrsatz. Wenn man auf zwei Durchmessern der Parabel RZ und ST (Fig. 44.) gleiche Abscissen vom Einschnittspunkte derselben an gerechnet, $RV = ST$, nimmt, so wird die durch T, V gezogene Sehne AU der Parabel durch den einen Durchmesser in eben solche Stücke, wie durch den andern getheilt.

Beweis. Nenne ich den gegen beide Durchmesser gleichen Neigungswinkel der Sehne $= \gamma$, so ist $UT\,.\,AT = \frac{p\,.\,RV}{Sin^2\,\gamma} = UV\,.\,VA$, weil $RV = ST$ ist. Man hat also $UT\,.\,(AV + VT) = AV\,.\,(VT + TU)$, also $UT = AV$.

§. 130. Lehrsatz. Wenn man (Fig. 44.) zwei Durchmesser der Parabel, AB und CD, zieht, und die Sehne AC zwischen ihren Einschnittspunkten in die Parabel, so wird jede der ersten AB richtig Zugeordnete KH durch die Sehne AC und durch die andre Axe CD oder deren Verlängerung in M und L so geschnitten, dass $HM : HK = HK : HL$.

Beweis. Ziehe ich CN in der Richtung der mit dem Durchmesser AB zusammen gehörigen Ordinaten und nenne $CN = a$, so ist $AN = \frac{a^2}{p}$, wenn

ich unter p' den Parameter für den Durchmesser AB oder $\frac{p}{Sin^2 \alpha}$ verstehe (§. 126.). Da nun $HL = CN = a$, $HM = \frac{CN \,.\, AH}{AN} = \frac{a \,.\, AH \,.\, p'}{a^2}$ und die Ordinate $HK = \sqrt{p' \,.\, AH}$ ist, so ist offenbar $HK^2 = p' \,.\, AH = HL \,.\, HM$.

Ein zweiter Fall, wo die Ordinate FG den Durchmesser CD innerhalb, die verlängerte Sehne AC dagegen ausserhalb der Parabel schnitte, führt zu eben den Folgerungen, und giebt $FP : FG = FG : FO$.

§. 131. Lehrsatz. Wenn man (Fig. 45.) zwei Sehnen IK, LM der Parabel unter sich parallel zieht, und wiederum zwei andre unter sich parallele Sehnen NO, PQ, so haben die Durchschnittspunkte R, S der ersten mit der dritten, und der zweiten mit der vierten eine solche Lage, dass folgende Rechtecke eine Proportion bilden:

$$IR \,.\, RK : NR \,.\, RO = LS \,.\, SM : PS \,.\, SQ,$$

oder in Worten, das Rechteck aus den Stücken der durch die dritte getheilten ersten, zu dem Rechteck aus den Stücken der durch die erste getheilten dritten, wie das Rechteck aus den Stücken der durch die vierte getheilten zweiten, zu dem Rechteck aus den Stücken der durch die zweite getheilten vierten.

Beweis. Zieht man durch R und S die Linien RT, SC mit der Hauptaxe parallel, so ist (§. 127.) $IR \,.\, RK : RN \,.\, RO = \frac{1}{Sin^2\, IRT} : \frac{1}{Sin^2\, NRT}$

und $LS \,.\, SM : PS \,.\, SQ = \frac{1}{Sin^2\, LSC} : \frac{1}{Sin^2\, PSC}$.

Hieraus erhellt die Richtigkeit des Lehrsatzes, da $IRT = LSC$ und $NRT = PSC$ ist.

§. 132. Schneidet die erste Sehne IK die vierte in V, so ist auch $LS \,.\, SM : PS \,.\, SQ = IV \,.\, VK : PV \,.\, VQ$.

§. 133. Wenn einer der Durchschnittspunkte oder auch beide ausserhalb lägen, so würde eine ganz ähnliche Proportion statt finden. Es ist z. B. (Fig. 46.) $RK \,.\, RI : RN \,.\, RO = LS \,.\, SM : PS \,.\, SQ$. Der Beweis ist dem vorigen ganz gleich.

§. 134. Aufgabe. Es sind vier Punkte (Fig. 47.) A, B, C, D gegeben; man verlangt die Bestimmungen für eine durch diese vier Punkte gehende Parabel.

Auflösung. Wenn man zwischen zweien dieser Punkte A, B eine gerade Linie zieht, so ist dieses eine Sehne der Parabel. Diese sey in E halbirt und aus E auf die durch C, D mit AB parallel gezogenen Linien eine Senkrechte EG gesetzt. Da die Lage der vier Punkte gegeben ist, so können wir $AE = EB = a$, $CF = b'$, $EF = c'$, $DG = -b''$, $EG = c''$, als gegebene

Grössen ansehen. Stellt nun *HK* den der Sehne *AB* zugeordneten Durchmesser, welcher in *H* die Parabel treffe, vor, so ist, wenn ich $AEK = \alpha$, $EH = w$ und den Parameter der gesuchten Parabel $= p$ nenne (nach §. 125.), $a^2 = \frac{p \cdot w}{Sin^2 \alpha}$, und ferner, da $EI = \frac{c'}{Sin\,\alpha}$, $CI = b' - c' \cdot Cotang\,\alpha$ ist,

$$(b' - c' \cdot Cotang\,\alpha)^2 = \frac{p}{Sin^2 \alpha}\left(w + \frac{c'}{Sin\,\alpha}\right);$$

und eben so $(b'' + c'' \cdot Cotang\,\alpha)^2 = \frac{p}{Sin^2 \alpha}\left(w + \frac{c''}{Sin\,\alpha}\right)$.

Wenn man in die beiden letzten Gleichungen den Werth von $pw = a^2 \cdot Sin^2 \alpha$ setzt, so ist

$$(b' \cdot Sin\,\alpha - c' \cdot Cos\,\alpha)^2 = a^2 \cdot Sin^2 \alpha + \frac{p\,c}{Sin\,\alpha},$$

und $(b'' \cdot Sin\,\alpha + c'' \cdot Cos\,\alpha)^2 = a^2 \cdot Sin^2 \alpha + \frac{p\,c''}{Sin\,\alpha}$,

daraus folgt, wenn p eliminirt,

$$c''(b' \cdot Sin\,\alpha - c' \cdot Cos\,\alpha)^2 - c'(b'' \cdot Sin\,\alpha + c'' \cdot Cos\,\alpha)^2 = (c'' - c')\,a^2 \cdot Sin^2 \alpha,$$

oder, da α nun die einzige zu bestimmende Grösse ist,

$$tang^2 \alpha - 2 \cdot tang\,a\,\frac{c' \cdot c''(b' + b'')}{c''(b'^2 - a^2) - c'(b''^2 - a^2)} = \frac{c' \cdot c''(c'' - c')}{c''(b'^2 - a^2) - c'(b''^2 - a^2)},$$

und $tang\,\alpha = \frac{c' \cdot c''(b'' + b') \pm \sqrt{\{c' \cdot c''[(c''b' + c'b'')^2 - a^2(c'' - c')^2]\}}}{c''(b'^2 - a^2) - c'(b''^2 - a^2)}$.

Daraus wird dann weiter $pw = a^2 \cdot Sin^2 \alpha$,

und $p = \frac{(b'^2 - a^2) \cdot Sin^3 \alpha}{c'} - 2\,b' \cdot Sin^2 \alpha \cdot Cos\,\alpha + c' \cdot Sin\,\alpha \cdot Cos^2 a$ gefunden.

§. 135. **Beispiel.** Es sey $a = 65$; $b' = 75$; $-b'' = -158$; $c' = 59$; $c'' = 142$; so ergiebt sich entweder $\alpha = 105^\circ\,26'$; $p = 62{,}37$. $w = 62{,}9$;
oder $\alpha = 169^\circ\,24'$; $p = 15{,}62$. $w = 9{,}15$.

Die 47. Figur ist nach diesen Zahlenangaben gezeichnet, und zeigt beide Parabeln, die sich in den gegebnen vier Punkten schneiden.

Wenn die Punkte so lägen, dass keine Parabel durch alle möglich wäre, so würden die gefundenen Ausdrücke unmöglich werden.

§. 136. An die bisherigen Lehren knüpfen sich eine grosse Menge einzelner merkwürdiger Sätze, von denen ich hier nur einige wenige mittheile.

§. 137. **Lehrsatz.** Wenn (Fig. 48.) *BD* ein Durchmesser der Parabel und *GC*, *FD* zwei derselben richtig zugeordnete Ordinaten der Parabel sind, so

wird, wenn man FG zieht, welche den Durchmesser in E schneidet,
$BC : BE = BE : BD$ seyn.

Beweis. Es sey $BC = w'$, $BD = w''$, p' der für diesen gehörige Parameter, so ist $CG^2 = p'.w'$, und $DF^2 = p'.w''$ offenbar auch

$$CE = \frac{CD \cdot CG}{CG + FD} = \frac{w'' - w'}{1 + \sqrt{\frac{w''}{w'}}} = \sqrt{w'} \cdot (\sqrt{w''} - \sqrt{w'})$$

und $BE = w' + (\sqrt{(w' \cdot w'')} - w') = \sqrt{w' \cdot w''}$.

§. 138. **Lehrsatz.** Wenn eine Sehne Fg der Parabel irgend einen Durchmesser derselben ausserhalb der Parabel in I schneidet (Fig. 48.), so ist, wenn man die richtig conjugirten Ordinaten FD, gC zieht,
$BC : BI = BI : BD$.

Beweis. Es sey $BC = w'$, $BD = w''$, $CG^2 = p'.w'$, $DF^2 = p'.w''$; so ist $CI^2 : (CI + (w'' - w'))^2 = w' : w''$, daher $CI = w + \sqrt{w' \cdot w''}$,
also $CI - w' = BI = \sqrt{(w' \cdot w'')}$.
Eben das gilt offenbar für die Sehne GH, die durch eben den Punkt I geht.

§. 139. **Lehrsatz.** Wenn man (Fig. 48.) auf irgend einem Durchmesser eine Abscisse AB gleich dem zu diesem Durchmesser gehörigen Parameter nimmt, dann die richtig zugeordnete Sehne LM durch A zieht, so bilden die von L und M nach dem Endpunkte B des Durchmessers gezognen Linien einen rechten Winkel.

Beweis. Da $AB = w = p'$ ist, so ist $AL = AM = p'$ (§. 125. 126.) also $BAM = 2.LBD$ und $BAL = 2.MBD$.

§. 140. **Lehrsatz.** Wenn (Fig. 49.) auf der Hauptaxe der Parabel die Abscisse $EF = x = p$, dem Parameter der Hauptaxe gleich genommen, und nun durch F irgend eine Sehne CD, von ihrem Endpunkte aber die Linien nach der Parabelscheitel CE, DE gezogen werden, so ist CED ein rechter Winkel.

Beweis. Nach §. 118. ist hier $CF \cdot DF = \frac{p^2}{Sin^2\, EFD}$, und zugleich $CF - FD = \frac{p \cdot Cos\, \alpha}{Sin^2\, \alpha}$, indem dieses der doppelte Abstand des mittlern Punktes der Sehne vom Einschnittspunkte ist. Da nun offenbar, wenn ich $CEF = E'$ und $FED = E''$, $EFD = \alpha$ nenne, $tang\, E' = \frac{CF \cdot Sin\, \alpha}{p + CF \cdot Cos\, \alpha}$ und $tang\, E'' = \frac{FD \cdot Sin\, \alpha}{p - FD \cdot Cos\, \alpha}$ ist, so müsste, wenn $E' + E'' = 90°$ wäre,

$tang\, E' = \frac{1}{tang\, E''}$ seyn. Suche ich aber $tang\, E' . tang\, E''$, so ist

dieses Product $= \dfrac{CF \, . \, FD \, . \, Sin^2 \alpha}{p^2 + p \, . \, Cos\,\alpha \, (CF - FD) - CF \, . \, FD \, . \, Cos^2 \alpha}$, das ist, wenn ich für $CF \, . \, FD$ und $CF - FD$ die gehörigen Werthe setze

$$= \frac{p^2}{p^2 + \frac{p^2 \, . \, Cos^2 \alpha}{Sin^2 \alpha} - \frac{p^2 \, . \, Cos^2 \alpha}{Sin^2 \alpha}} = 1, \text{ also wirklich } E' + E'' = 90°.$$

§. 141. Lehrsatz. Wenn (Fig. 49.) auf der Hauptaxe der Parabel die Abscisse $EF = p$ genommen und durch F die willkürliche Sehne CD gezogen ist, so findet für die von C und D nach dem Scheitel E der Parabel gezogne Sehne die Proportion statt, dass $ED^2 : EC^2 = DF^3 : CF^3$.

Beweis. Es ist $EC^2 = p^2 + CF^2 = 2\,p \, . \, CF \, . \, Cos\,\alpha$

$ED^2 = p^2 + FD^2 = 2\,p \, . \, FD \, . \, Cos\,\alpha$,

wenn $\alpha = EFD$ ist. Da aber $p^2 = CF \, . \, DF \, . \, Sin^2 \alpha$

und $p \, . \, Cos\,\alpha = (CF - DF) \, Sin^2 \alpha$ war,

so wird nun auch $EC^2 = CF^2 + Sin^2 \alpha \, (2\,CF^2 - CF \, . \, DF)$;

$ED^2 = DF^2 + Sin^2 \alpha \, (2\,DF^2 - CF \, . \, DF)$.

Aber die beiden Gleichungen (§. 140.) $CF \, . \, DF = \dfrac{p^2}{Sin^2 \alpha}$, und $(CF - DF) = \dfrac{p \, . \, Cos\,\alpha}{Sin^2 \alpha}$, geben auch $tang^2 \alpha = \dfrac{CF \, . \, DF}{(CF - DF)^2}$, und $Sin^2 \alpha = \dfrac{CF \, . \, DF}{CF^2 + DF^2 - CF \, . \, DF}$, und hierdurch wird

$$EC^2 = \frac{CF^3 \, (CF + DF)}{CF^2 + DF^2 - CF \, . \, DF} \text{ und } ED^2 = \frac{DF^3 \, (CF + DF)}{CF^2 + DF^2 - CF \, . \, DF}.$$

Von der Tangente uud Normallinie der Parabel.

§. 142. Bemerkung. In der Gleichung §. 118. und der ihr ähnlichen §. 127., welche den Werth der schief gegen irgend einen Durchmesser geneigten Coordinaten angiebt, kömmt vorzüglich noch der merkwürdige Fall zu betrachten vor, wo die Endpunkte beider Ordinaten zusammen fallen, das ist, wo die Sehne $= o$ ist, oder der irrationale Theil der Formel verschwindet. In diesem Falle ist die Sehne zur Tangente der Parabel geworden, und aus der Betrachtung des irrationalen Gliedes in §. 127. zeigt sich, dass alsdann $w = - \dfrac{p \, . \, Sin^2 (\gamma - \alpha)}{4\,Sin^2 \gamma \, . \, Sin^2 \alpha}$ seyn muss, das heisst, wenn (Fig. 50.) AB irgend ein Durchmesser der Parabel und CD unter dem Winkel $= \gamma$ gegen denselben geneigt ist, α aber den Neigungswinkel der richtig Zugeordneten bedeutet, so schneidet die Tangente CD so weit entfernt vom Endpunkte A des Durchmessers ausserhalb der Parabel in

diesen ein, dass $CA = -w = \frac{1}{4} p \,.\, \frac{Sin^2 (\gamma - \alpha)}{Sin^2 \gamma \,.\, Sin^2 \alpha}$ ist, und es ist dann

$CD = y = \frac{p \,.\, Sin (\alpha - \gamma)}{2\, Sin^2 \gamma \,.\, Sin \alpha}$; gleich dem rationalen Theile des §. 127. gefundenen Werthes.

§. 143. Es erhellt schon von selbst, dass, wenn man ein grösseres negatives W nehmen wollte, die unter demselben Winkel geneigten Ordinaten unmöglich würden, weil sie gar nicht mehr die Parabel treffen könnten.

§. 144. Lehrsatz. Wenn man von einem willkürlichen Punkte D der Parabel die, irgend einem Durchmesser AB richtig Zugeordnete DI, zugleich aber an D die Tangente DC (Fig. 50.) zieht, so liegen die Einschnittspunkte I und C beider Linien in dem Durchmesser AB gleich entfernt von dem Punkte, wo AB die Parabel schneidet, oder es ist $AC = AI$.

Beweis. Da (§. 142.) $CD = \frac{p \,.\, Sin (\alpha - \gamma)}{2\, Sin^2 \gamma \,.\, Sin^2 \alpha}$ ist, so wird

$CI = \frac{CD \,.\, Sin (\alpha - \gamma)}{Sin \alpha} = \frac{\frac{1}{2} p \,.\, Sin^2 (\alpha - \gamma)}{Sin^2 \gamma \,.\, Sin^2 \alpha} = 2 \,.\, CA$, wie der (in §. 142.) für CA gefundene Werth ergiebt.

§. 145. Für jeden Durchmesser der Parabel ist also, in Beziehung auf die ihm zugeordnete Ordinate des Berührungspunktes, die Subtangente (§. 83.) doppelt so gross, als die Abscisse. Hieraus erhellt auch, dass zwei Tangenten an den Endpunkten der Sehne DE (Fig. 50.) gezogen, sich einander in C da schneiden, wo die Axe AB, welche die Sehne halbirt, beide trifft.

§. 146. Für die Hauptaxe wird $\alpha = 90°$, die Subtangente $= \frac{1}{2} p \,.\, Cotang^2 \gamma$, und die Länge der Tangente $= \frac{1}{2} p \,.\, \frac{Cos \gamma}{Sin^2 \gamma}$.

Es erhellt schon aus dem vorigen, dass jede Tangente parallel ist denjenigen Ordinaten, welche dem durch den Berührungspunkt gehenden Durchmesser zugeordnet sind. Auch die Gleichung (§. 144.) zeigt, dass für $\gamma = \alpha$, $CD = o$, der Abstand des Berührungspunktes von der Axe $= o$ ist.

§. 147. Lehrsatz. Wenn man (Fig. 50.) für irgend einen Punkt D der Parabel die Normallinie DF und zugleich die auf die Hauptaxe HF senkrechte Ordinate DG zieht, so ist die auf der Hauptaxe abgeschnittene Subnormallinie GF allemal $= \frac{1}{2} p$, die Normallinie $= \sqrt{(\frac{1}{4} p^2 + px)}$.

Beweis. Es sey $HG = x$, $DG^2 = px$, so ist die Subtangente (§. 144.) $KG = 2x$, und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $DKG \backsim FDG$ ist $FG = \frac{DG^2}{KG} = \frac{1}{2} p$. Die Normallinie ist $= \sqrt{(\frac{1}{4} p^2 + px)} = \sqrt{(\frac{1}{4} p^2 + z^2)} = DF$, wenn $GD = z$ ist.

§. 148. Wenn man in Beziehung auf einen andern Durchmesser AB (Fig. 50.) die Subnormallinie IL, das ist, das auf der Abscissenlinie zwischen der Normallinie und der richtig Zugeordneten abgeschnittene Stück bestimmt, so ist, da $DCL = \gamma$ hiess, und $DI = \frac{CD \cdot Sin\,\gamma}{Sin\,\alpha}$ war, die Subnormallinie

$$IL = \frac{DI \cdot Sin\,(90^\circ + \gamma - \alpha)}{Cos\,\gamma} = \frac{CD \cdot Sin\,\gamma \cdot Cos(\alpha - \gamma)}{Sin\,\alpha \cdot Cos\,\gamma} = \frac{\frac{1}{2}p \cdot Sin^2(\alpha - \gamma)}{Sin^2\gamma \cdot Sin^2\alpha},$$

welches für $\alpha = 90^\circ$ in $= \frac{1}{2}p$ übergeht.

Für einen andern Durchmesser wird die Subnormallinie nur dann dem halben zugehörigen Parameter gleich $= \frac{1}{2}p \cdot \frac{1}{Sin^2\alpha}$, wenn $\gamma = \frac{1}{2}\alpha$ ist. Das findet für irgend einen bestimmten Durchmesser nur an einem einzigen Punkte statt, nämlich da, wo das Dreieck (Fig. 50.) GID, gleichschenklich ist, wo $CI = ID = IL$ ist.

§. 149. **Lehrsatz.** Wenn (Fig. 50.) eine Tangente DC der Parabel gezogen wird, welche mehrere der Hauptaxe parallele Durchmesser CB in C, HF in K trifft, so ist $DC^2 : DK^2 = CA : HK$.

Beweis. In §. 144. war $CD = \frac{p \cdot Sin\,(\alpha - \gamma)}{2\,Sin^2\gamma \cdot Sin\,\alpha}$ und

$CA = \frac{1}{4}p \cdot \frac{Sin^2(\alpha - \gamma)}{Sin^2\gamma \cdot Sin^2\alpha} = \frac{CD^2}{p'}$, wenn $p' = \frac{p}{Sin^2\gamma}$ derjenige Parameter ist, welcher dem der Tangente zugeordneten Durchmesser entspricht; also ist für alle Durchmesser, die CA der CD^2 proportional, folgl. auch $HK = \frac{KD^2}{p'}$.

§. 150. **Bemerkung.** Auf diesem Satze beruht es, dass die in geneigter Richtung geworfnen Körper, auf welche bloss die Schwere wirkt, eine Parabel beschreiben. Der Körper würde nämlich, vermöge der ihm zu Anfang in D, nach der Richtung DC ertheilten Geschwindigkeit, immer gleiche Wege in gleichen Zeiten durchlaufen, oder wenn der Körper in irgend einem Zeitpunkte bis D gekommen ist, so würde CD der verflossenen Zeit proportional seyn. Aber wenn CA die verticale Richtung vorstellt, so zieht die Schwere ihn herab, und der in irgend einer Zeit hervorgebrachte Abstand von der anfänglichen Richtungslinie (dieser Abstand nämlich nach der verticalen Richtung gemessen), ist dem Quadrate der Zeit, also dem Quadrate der DC proportional. Da dieses bei der Parabel eben so der Fall ist, so beschreibt der geworfne Körper eine Parabel, deren Tangente die Richtungslinie des anfänglichen Wurfes ist.

§. 151. **Lehrsatz.** Wenn man (Fig. 51.) eine Tangente CB der Parabel und den ihr zugeordneten Durchmesser CD zieht, dann aber von C aus zwei Sehnen, so dass $BCA = KCH$, so treffen die aus A und H parallel mit der Tangente gezognen Ordinaten AI, HK so in den Durchmesser ein, dass

die mittlere Proportionallinie zwischen CI, CK gleich dem diesem Durchmesser zugehörigen Parameter ist.

Beweis. Nenne ich wieder den Winkel, welchen die Tangente mit dem vom Berührungspunkte aus gezognen Durchmesser macht, $= \alpha$, dagegen $HCK = \gamma$, $ACK = \gamma' = \alpha - \gamma$, so ist

$$AI = \frac{CI \,.\, Sin\,(\alpha - \gamma)}{Sin\,\gamma} \text{ und } HK = \frac{CK \,.\, Sin\,\gamma}{Sin\,(\alpha - \gamma)}, \text{ od. } AI : CI = CK : HK.$$

Aber auch $AI^2 = p' \,.\, CI$, und $HK^2 = p' \,.\, CK$; also $CI : p' = p' : CK$, wenn p' den Parameter für diesen Durchmesser bedeutet.

§. 152. Aufgabe. An irgend einem Punkt D (Fig. 50.) in der Parabel eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. Wenn irgend ein Durchmesser AB der Parabel und für ihn die dem Punkte D zugehörige Ordinate DI der Parabel gegeben ist, so nimmt man auf dem verlängerten Durchmesser $AC = AI$, und zieht CD, welches (§. 144.) die Tangente ist.

Irgend einen Durchmesser der Parabel kann man aber leicht finden, indem man zwei parallele Sehnen halbirt, und durch ihre Mitte den Durchmesser zieht.

§. 153. Aufgabe. Durch einen Punkt A (Fig. 52.) ausserhalb der Parabel eine Tangente an die gegebne Parabel BCD zu ziehen.

Auflösung. Man zieht von A aus eine willkürliche Linie, welche die Parabel in B, D schneidet; theilt diese so, dass $AB : AX = AX : AD$; dann trifft die durch X mit der Hauptaxe der Parabel parallel gezogne Linie CX die Parabel in dem Punkte C, wo die durch A gezogne Tangente berühren muss.

Beweis. Wenn man von B und D die der Axe CX richtig Zugeordneten BE, DF zieht, so ist die Tangente an C ihnen parallel (§. 146.). Für den Einschnittspunkt A dieser Tangente in DB ist also $BA : AX = CE : CX$,

und $DA : AX = CF : CX$,

also $BA \,.\, DA : AX^2 = CE \,.\, CF : CX^2$.

Nun aber ist (§. 137.) $CX^2 = CE \,.\, CF$, also auch $AX^2 = BA \,.\, DA$. Die Tangente geht also durch den gegebnen Punkt A.

§. 154. Lehrsatz. Wenn (Fig. 46.) rn eine Tangente der Parabel, und PQ eine ihr parallele Sehne ist, rKI und LM aber andre unter sich parallele Sehnen, welche in r und S von rn und PQ geschnitten werden, so ist

$$rn^2 : rI \,.\, rK = PS \,.\, SQ : LS \,.\, SM.$$

Der Beweis folgt aus §. 133., wo man RN und RO als gleich geworden ansehen muss.

§. 155. Lehrsatz. Wenn man vom Brennpunkte A einer Parabel aus

(Fig. 53.) den Radius an einen Punkt B zieht, an welchen die Tangente BC gezogen worden, welche die Hauptaxe in C schneidet, so ist $AB = AC$.

Beweis. Es sey der Punkt B durch Coordinaten $DE = x$, $EB = z$ gegen die Hauptaxe bestimmt, also $z^2 = px$, so ist

$$AB = \sqrt{((x - \tfrac{1}{4}p)^2 + z^2)} = x + \tfrac{1}{4}p = CA,$$ weil $CD = x$ ist (§. 144.).

§. 156. Wenn BN die Normallinie ist, so ist auch $AB = AN$, weil $ABN = ANB = 90° - ACB$ ist.

§. 157. Lehrsatz. Wenn AF vom Brennpunkte aus auf die an den Punkt B gezogne Tangente senkrecht ist, so ist das Quadrat der AF dem Radius Vector des Punktes B proportional (Fig. 53. *).

Beweis. Es ist $AF = AC \cdot Sin\, C = \frac{AC \cdot BE}{CB}$, oder da

$AC = x + \frac{1}{4}p$; $BE = \sqrt{px}$; $BC = \sqrt{(4x^2 + px)}$ ist.

$$AF = \tfrac{1}{2}\sqrt{(px + \tfrac{1}{4}p^2)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(p \cdot AC)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(p \cdot AB)}.$$

Hätte man durch den Scheitelpunkt D die auf die Hauptaxe senkrechte Linie gezogen, so träfe diese in F ein, denn offenbar ist die Hypotenuse des bei D rechtwinkligen Dreieckes $= \frac{AD}{Sin\, C} = \frac{p}{4\, Sin\, C} = \frac{\frac{1}{2}p\sqrt{(4x^2 + px)}}{\sqrt{px}}$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{p \cdot AB} = AF.$$

Nimmt man also $FO = AF$, so liegt O in der auf die Hauptaxe senkrechten Linie QM, die wir (§. 112. *) die Directrix nannten.

§. 157. * Aufgabe. Es ist (Fig. 53. *) der Brennpunkt A einer Parabel gegeben, und zugleich bestimmt, dass diese Parabel durch den gegebnen Punkt K gehen, und die gegebne Linie BC berühren soll; man sucht für diese Parabel die Lage der Hauptaxe und des Scheitels.

Auflösung. Um K, als Mittelpunkt, beschreibe man mit dem Halbmesser KA einen Kreis AM; man ziehe AF senkrecht auf die gegebne BC und verlängre sie, bis $OF = AF$ ist, ziehe von O die Tangente OM an den Kreis, so ist diese die Directrix, und folglich die auf sie senkrechte Linie AQ die Axe der Parabel, deren Scheitel D so liegt, dass $AD = QD$ ist.

Beweis. Schon aus §. 112.* wissen wir, dass eines jeden Punktes K der Parabel senkrechter Abstand von der Directrix gleich seinem Abstande vom Brennpunkte ist; aber so eben (§. 157.) haben wir auch gesehen, dass O in der Directrix liegt, wenn BC eine Tangente seyn soll; also ist die berührende OM die Directrix.

* Man könnte auch analytisch den Winkel $FCA = \varphi$ finden, indem $\frac{1}{2}p = KA\,(1 - Sin\, LAK) = KA \cdot (1 - Sin\,(FAK - \varphi))$ und zugleich $AC = \frac{AF}{Sin\, \varphi} = \frac{4\, AF^2}{p}$ ist (wie §. 157. zeigt, da $AB = AC$ ist). Wir haben

also für p und φ, als die beiden einzigen unbekannten Grössen, zwei Gleichungen, aus denen sich alles leicht herleiten lässt.

§. 158. Lehrsatz. Der vom Berührungspunkte B nach dem Brennpunkte gezogene Radius BA (Fig. 53.) macht mit der Tangente an B einen eben so grossen Winkel, als der durch B gezogne Durchmesser mit ihr macht.

Beweis. $AC = AB$, $ABC = ACB = FBG$, wenn BG mit CA parallel ist.

§. 159. Hierauf gründet sich die Eigenschaft des parabolischen Spiegels, alle mit der Axe parallel einfallende Strahlen im Brennpunkte zu sammeln, dort also, wenn die Strahlen zugleich erhitzende sind, ein Brennen zu bewirken, indem jeder mit der Hauptaxe parallel einfallende Strahl wie HB nach A zurück geworfen wird.

§. 160. Aufgabe. Von irgend einem Punkte P der Hauptaxe (Fig. 53.*) wird eine Linie PB an die Parabel gezogen, man sucht den Punkt der Axe, wo eine durch B gehende Linie eintrifft, die mit der Tangente an B einen eben so grossen Winkel als PB macht.

Auflösung. Es sey $DP = a$, und der Punkt B, wo die PB die Parabel trifft, sey durch die Abscisse x bestimmt. Dann ist

$tang\ BPC = \frac{z}{a-x}$; $tang\ BCH = \frac{z}{2x}$, also für den äusseren Winkel

$$tang\ KBP = \frac{z\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{a-x}\right)}{1 - \frac{z^2}{2x(a-x)}} = \frac{z(a+x)}{2ax - 2x^2 - px}.$$

Vermöge der vorausgesetzten Gleichheit der Winkel soll nun $CBH = KBP$ seyn, also $CH = \frac{CB \,.\, Sin\ KBP}{Sin\,(KBP + BCH)} = \frac{CB}{Cos\ BCH + Sin\ BCH \,.\, Cotang\ KBP}$.

Aber es ist $CB = \sqrt{(4x^2 + px)}$, $Sin\ BCH = \frac{z}{\sqrt{(4x^2+px)}}$,

$Cos\ BCH = \frac{2x}{\sqrt{(4x^2+px)}}$; $Cotang\ KBP = \frac{2ax - 2x^2 - px}{z(a+x)}$,

$$\text{also } CH = \frac{4x^2 + px}{2x + \left(\frac{2ax - 2x^2 - px}{a+x}\right)} = \frac{(4x+p)(a+x)}{4a-p},$$

und die Entfernung dieses Punktes vom Scheitel der Parabel ist

$$CH - x = \frac{4x^2 + 2px + ap}{4a - p} = DH.$$

§. 161. Wenn also von einem nicht sehr entfernten Punkte in der Hauptaxe Lichtstrahlen ausgehen, so werden diese nicht alle in einen Punkt der

Hauptaxe gesammelt, sondern DH wird desto grösser, je weiter der Punkt B, wo der Lichtstrahl auffiel, von dem Scheitel entfernt ist. Ist nur ein kleines Stück der Parabel nahe um den Scheitel vorhanden, so ist allemal x nur klein; wenn dieses in dem Grade der Fall ist, dass man x gegen a und p als unbedeutend ansehen kann, so wird für einen sehr kleinen parabolischen Abschnitt die Entfernung DH immer näher $= \frac{ap}{4a - p}$. Ist a überaus gross gegen x und p, so wird $DE = \frac{1}{4} p$, oder die Strahlen gehen durch den Brennpunkt.

Beispiel. Es sey $a = 100$, $p = 16$, $x = 1$, so ist $DH = 4{,}260$; ist dagegen x nur $= 0{,}25$, so ist $DH = 4{,}188$ und $DH = 4{,}166$ ist der kleinste Werth, den DH selbst für die ganz nahe an der Axe einfallenden Strahlen erhalten kann.

§. 162. Wenn von einem sehr entfernten Punkte Strahlen, die folglich als unter sich parallel können angesehen werden, unter dem Winkel $= \beta$ gegen die Axe geneigt einfallen, so wird der im Scheitel B eintreffende Strahl AB (Fig. 54.) so zurück geworfen, dass er die durch den Brennpunkt gezogne senkrechte Ordinate in C schneidet, wo $FC = \frac{1}{4} p \,.\, tang\, \beta$. Man kann also fragen, wo andre zurück geworfne Strahlen die Linie FC schneiden werden.

§. 163. Aufgabe. Ein von D her (Fig. 54.) auf einen Punkt E der Parabel, der zwischen dem Scheitel und dem Parameter liegt, auffallender Strahl wird nach EG zurück geworfen, man sucht auf der durch den Brennpunkt gehenden Ordinate den Abstand FG, wo dieser zurück geworfene Strahl einschneidet.

Auflösung. Es sey $EDB = \beta$, und der Punkt E durch die Coordinaten x, z bestimmt, so wird, wenn EH die Normallinie bedeutet (§. 147.), $tang\, EHB = \frac{2z}{p}$, $EH = \sqrt{(z^2 + \frac{1}{4} p^2)}$, $HI = \frac{EH \,.\, Sin\,(BHE - \beta)}{Sin\,(2\,BHE - \beta)}$, und $FG = (FH - HI)\; tang\,(2\,BHE - \beta$. Da nun $FH = \frac{1}{4} p + x = \frac{\frac{1}{4} p^2 + z^2}{p}$,

$$Sin\,(BHE - \beta) = \frac{2z \,.\, Cos\,\beta - p \,.\, Sin\,\beta}{\sqrt{(p^2 + 4z^2)}};$$

$$Sin\,(2\,BHE - \beta) = \frac{4pz \,.\, Cos\,\beta - (p^2 - 4z^2)\, Sin\,\beta}{p^2 + 4z^2},$$

$$\text{so ist } HI = \frac{(z \,.\, Cos\,\beta - \frac{1}{2} p \,.\, Sin\,\beta)\,(p^2 + 4z^2)}{4pz \,.\, Cos\,\beta - (p^2 - 4z^2)\, Sin\,\beta},$$

$$FH - HI = \frac{(p^2 + 4z^2)^2\, Sin\,\beta}{4p\,(4pz \,.\, Cos\,\beta - (p^2 - 4z^2)\, Sin\,\beta)},$$

$$\text{und } FG = \frac{(p^2 + 4z^2)^2\, Sin\,\beta}{4p\,\{(p^2 - 4z^2)\, Cos\,\beta + 4pz \,.\, Sin\,\beta\}}.$$

Wenn wir diesen Werth von FG nach den Potenzen von z entwickeln, so ist $FG = \frac{1}{4} p . tang \beta - z . tang^2 \beta + \frac{z^2}{p} (3 \, tang \beta + 4 \, tang^3 \beta)$ — etc., woraus man beurtheilen kann, wie viel die Entfernung der in FG eintreffenden Strahlen von dem Punkte C, für welchen $FC = \frac{1}{4} p . tang \beta$ ist, beträgt.

§. 164. Wegen dieses nicht völligen Zusammentreffens der schief gegen die Axe einfallenden Strahlen wird im Reflector das Bild der Gegenstände, die ausser der Axe des Instruments liegen, nicht ganz strenge dargestellt.

Achter Abschnitt.

Von der Ellipse und Hyperbel.

§. 165. **Bemerkung.** Wenn man für ein Dreieck, dessen Grundlinie gegeben ist, auch die Summe der beiden übrigen Seiten kennt, so liegt, wie wir oben gesehen haben (§. 64.), die Spitze des Dreiecks auf einer krummen Linie, welche die Ellipse heisst. Und wenn statt der Summe der Seiten ihr Unterschied gegeben ist, so ist der geometrische Ort der Spitze die Hyperbel (§. 66.). Beide Linien werden durch eine sehr wenig verschiedene Gleichung ausgedrückt, und so sehr ungleich auch die Curven selbst sind, so lassen sich doch viele ihrer Eigenschaften völlig auf gleiche Weise ableiten.

§. 166. Wir fanden (§. 64.) die Gleichung für die Ellipse in Beziehung auf rechtwinklige Coordinaten $z^2 = \left(\frac{a^2 - f^2}{a^2}\right)(a^2 - x^2)$, oder wenn ich $a^2 - f^2 = b^2$ setze, $z^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$. Eben so für die Hyperbel $z^2 = \left(\frac{f^2 - a^2}{a^2}\right)(x^2 - a^2)$, also wenn ich hier $f^2 - a^2 = b^2$ setze, $z^2 = -b^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2}$. Die eine Gleichung geht in die andre über, wenn man $-b^2$ statt $+b^2$ schreibt.

§. 167. **Bemerkung.** In der Ellipse erhält z nur dann mögliche Werthe, wenn $x < a$ ist; für $x = \pm a$ wird $z = o$, und für $x = o$ wird $z = \pm b$ und grösser kann z nie werden.

In der Hyperbel hat z unmögliche Werthe, so lange $x < a$ ist, für $x = a$ ist $z = o$, und für grössere Werthe von x wächst z immer fort und behält immer mögliche Werthe.

§. 168. Erklärung. Daher heisst bei beiden Curven a die halbe Hauptaxe, bei der Ellipse auch b die zweite oder zugeordnete halbe Hauptaxe; bei der Hyperbel hingegen lässt sich b nicht als Axe ansehen, da für $x = o$, z unmöglich ist. Die Endpunkte der ersten Hauptaxe heissen die Scheitel der Curve.

Ich werde hier immer a als die grössere der beiden Hauptaxen der Ellipse ansehen, und x als die auf ihr gerechneten Abscissen.

§. 169. Lehrsatz. Wenn man durch den Anfangspunkt der Coordinaten x, t eine Linie senkrecht auf die Abscissenlinie zieht, so theilen diese beiden Axen die Ellipse in vier völlig gleiche Quadranten (Fig. 55.), und auch bei der Hyperbel, obgleich sie von dieser Senkrechten nicht geschnitten wird, sind doch die innerhalb der vier Winkel liegenden Theile der Curve ganz einander gleich (Fig. 56.).

Beweis. Wenn man für x einen bestimmten Werth annimmt, so wird

in der Ellipse $z = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}$,

in der Hyperbel $z = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(x^2 - a^2)}$.

Die Coordinaten ED, EF (Fig. 55. 56.) werden also gleich; und da sie für gleiche positive und negative Abscissen gleich ausfallen, so sind die vier Quadranten der Ellipse, und die vier Aeste der Hyperbel unter sich in allen Hinsichten gleich.

§. 170. Die Hauptaxen der Ellipse, und so auch bei der Hyperbel die Linie IK nebst der Hauptaxe, verdienen also den Namen der Durchmesser, und ihr Durchschnittspunkt C heisst der Mittelpunkt der Ellipse oder Hyperbel.

§. 171. Lehrsatz. Wenn man über der einen Hauptaxe der Ellipse einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Ellipse, und dessen Durchmesser diese Hauptaxe der Ellipse ist, so verhalten sich für jede Abscisse die senkrecht auf dieser Hauptaxe errichteten Ordinaten des Kreises und der Ellipse wie die Hauptaxen der Ellipse (Fig. 55.).

Beweis. Es sey $CE = x$, $CA = a$, $CI = b$, und durch E die Ordinate, welche beide Curven schneidet, gezogen, für die Ellipse sey $ED = z$, für den Kreis $EL = y$, so ist $z = \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)} = \frac{b\,y}{a}$, indem $y^2 = a^2 - x^2$; also für einerlei Abscisse allemal $z : y = b : a$.

§. 172. Hiernach kann man leicht die Ellipse zeichnen, indem man jede Ordinate EL des Kreises so theilt, dass $EF : EL = b : a$ sey.

§. 173. Die Ellipse geht in den Kreis über, wenn $a = b$ ist. Wird dagegen bei der Hyperbel $b = a$, so erhält man die gleichseitige Hyperbel, deren Gleichung also $z^2 = x^2 - a^2$ ist.

§. 174. Aufgabe. Die Gleichungen für die Ellipse und Hyperbel so zu verändern, dass die Abscissen vom Endpunkte der Hauptaxe an gerechnet werden.

Auflösung. Es sey $BE = u = a + x$, also $x = u - a$, so geht die Gleichung $z^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2$, für die Ellipse in $z^2 = \frac{2b^2}{a} u - \frac{b^2}{a^2} u^2$ über, und eben so die Gleichung für die Hyperbel in $z^2 = \frac{-2b^2 u}{a} + \frac{b^2}{a^2} u^2$.

Setze ich hier $\frac{2b^2}{a} = p$, so ist für die Ellipse $z^2 = pu - \frac{pu^2}{2a}$; für die Hyperbel $z^2 = -pu + \frac{pu^2}{2a}$.

§. 175. Bemerkung. Wenn wir von der Betrachtung ausgingen, dass die Ellipse und die Hyperbel den geometrischen Ort darstellten, in welchem die Spitzen aller über einer gegebnen Grundlinie $= 2f$ beschriebenen Dreiecke sich befinden, für welche das eine Mal die Summe, das andre Mal die Differenz der Seiten eine gegebne $= 2a$ war, so erhielten wir bei der Ellipse $b^2 = a^2 - f^2$, bei der Hyperbel $b^2 = f^2 - a^2$ (§. 166.). Wenn wir hiernach die beiden Endpunkte M, N der Grundlinie auf der Hauptaxe auftragen, bei der Ellipse $= \sqrt{(a^2 - b^2)}$, bei der Hyperbel $= \sqrt{(a^2 + b^2)}$, so bestimmen sich zwei für die ganze Curve merkwürdige Punkte.

§. 175.* Erklärung. Diese beiden Punkte heissen die Brennpunkte der Ellipse oder Hyperbel. Ihr Abstand vom Mittelpunkte, dividirt durch die halbe Hauptaxe $= a$, heisst die Excentricität, und diese ist

$$\text{bei der Ellipse } e = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a};$$

$$\text{bei der Hyperbel } = e = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{a}.$$

§. 176. Bei der Ellipse bestimmt man die Brennpunkte, indem man um den Endpunkt I der kürzeren Axe einen Kreis mit dem Halbmesser $= a$ der halben grössern Axe gleich beschreibt, und seine Einschnittspunkte M, N in die grosse Axe bemerkt; diese sind die Brennpunkte (Fig. 55.).

Bei der Hyperbel würde sich der Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkte ergeben, wenn man im Scheitel A, die Linie $AP = b$ senkrecht errichtete und $CN = CM = CP$ auftrüge (Fig. 56.).

§. 177. Erklärung. Wenn man durch die so bestimmten Brennpunkte M, N eine Sehne senkrecht auf die Hauptaxe zieht, so heisst diese ganze Sehne bei beiden Curven der Parameter der Ellipse oder Hyperbel.

§. 178. Lehrsatz. Der halbe Parameter ist die dritte Proportionallinie zu den beiden halben Axen a, b.

Beweis. Für den Brennpunkt ist in der Ellipse die vom Mittelpunkte an gerechnete Abscisse $= x = \sqrt{(a^2 - b^2)}$, also $z^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 = \frac{b^4}{a^2}$; in der Hyperbel ist die Abscisse für den Brennpunkt $= x = \sqrt{(a^2 + b^2)}$, also die durch ihm gehende senkrechte Ordinate $z = \sqrt{\{-b^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 + b^2)\}} = \frac{b^2}{a}$. Diese Ordinate ist der halbe Parameter; wenn ich sie also $= \frac{1}{2} p$ nenne, so ist $a : b = b : \frac{1}{2} p$, für den Kreis, und für die gleichseitige Hyperbel ist $\frac{1}{2} p = a$.

§. 179. In den Gleichungen §. 174. bedeutet also p den ganzen Parameter, $p = \frac{2 b^2}{a}$.

§. 180. Erklärung. Die Abstände jedes Punktes der Ellipse oder Hyperbel von einem der Brennpunkte heissen auch hier Radien oder Radien Vectoren.

§. 181. Aufgabe. Eine Gleichung sowohl für die Ellipse, als für die Hyperbel zu finden, welche den vom Brennpunkte ausgehenden Radius Vector durch den Winkel, den er mit der Hauptaxe einschliesst, angiebt.

Auflösung. Es sey in der Ellipse (Fig. 55.) N der eine Brennpunkt $NR = r$, $RNA = \varphi$, so ist, wenn M den andern Brennpunkt bezeichnet (§. 64.), $MR = 2a - r$, und $MN = 2\sqrt{(a^2 - b^2)}$, also (Trigonom. §. 65.) $(2a - r)^2 = r^2 + 4(a^2 - b^2) + 4r \,.\, Cos\,\varphi \sqrt{(a^2 - b^2)}$, das ist

$$r = \frac{b^2}{a + \sqrt{(a^2 - b^2)}\, Cos\,\varphi},$$ oder wenn ich die Excentricität

$= e = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}$, und $b^2 = a^2(1 - e^2)$ in die Gleichung setze,

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \,.\, Cos\,\varphi}.$$

Für die Hyperbel würde, weil die Differenz der Abstände von beiden Brennpunkten unveränderlich $= 2a$ ist, wenn auch hier $RNA = \varphi$; $r = \frac{b^2}{+ a + \sqrt{(a^2 + b^2)}\, Cos\,\varphi}$, oder, da hier $e = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{a}$ ist,

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \,.\, Cos\,\varphi}.$$

§. 181.* Für $\varphi = o$ wird $r = a - ae$ der Abstand des Brennpunkts vom nächsten Scheitel der Ellipse; für $\varphi = 180°$ ist bei der Ellipse $r = a + ae$

der Abstand des Brennpunkts vom entferntesten Scheitel; für $\varphi = 90°$ $r = a(1 - e^2) = \frac{b^2}{a} = \frac{1}{2} p$.

Bei der Hyperbel gelten ganz ähnliche Bestimmungen, indem für $\varphi = o$, $r = ae - a$, den Abstand des nächsten Scheitels und zugleich den kleinsten Werth, welchen r überhaupt erhalten kann, angiebt. Wenn φ wächst, so nimmt r immer mehr zu, da $Cos\,\varphi$ abnimmt; ja r wird unendlich für $Cos\,\varphi = -\frac{1}{e} = -\frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$. Dieses zeigt an, dass der Werth von r, welcher immer grösser wird, indem NR in Lagen wie Nr (Fig. 56.) fortrückt, ins Unendliche wachse, und für den eben angegebnen Werth von φ den Ast ARr der Hyperbel nirgends mehr erreiche. Nimmt man φ grösser, so ist $e \,.\, Cos\,\varphi$ eine negative Grösse, die mehr als 1 beträgt, und r wird negativ, das heisst der Radius Nr' trifft nicht bei r', sondern rückwärts verlängert, bei R' die Curve, und die negativen r erhalten ihren kleinsten Werth, wenn $\varphi = 180°$ ist, wo $r = -a\,(e + 1)$, der Abstand des entfernten Scheitels ist. Für $\varphi > 180°$ bleibt r negativ, bis $Cos\,\varphi$ wieder $= -\frac{1}{e}$ ist, und so lange trifft NR'' noch eben die zweite Hälfte der Hyperbel, auf deren Aste BH nun der Einschnittspunkt ins Unendliche hinaus rückt; wenn aber φ grösser wird, also der $Cos\,\varphi$ einen geringern negativen Werth, als $-\frac{1}{e}$ erhält, so schneidet wieder NR''' auf dem zweiten Aste der ersten Hälfte ein.

§. 182. Schon hieraus lässt sich übersehen, dass die Aeste der Hyperbel eine solche Richtung haben, dass die Linie CU (Fig. 58.) die unter einem Winkel UCD, dessen Cosinus $= \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = \frac{1}{e}$, oder Tangente $= \frac{b}{a}$ ist, gegen die Hauptaxe geneigt, gezogen werden, sie nicht trifft.

Diese Linie heisst daher die Asymptote der Hyperbel, oder vielmehr beide Linien CU, CW, die unter gleich grossen Winkeln gegen die Hauptaxe geneigt sind, heissen Asymptoten, und haben die Eigenschaft, dass die Aeste der Hyperbel sich ihnen zwar immerfort nähern, doch aber sie nie erreichen.

Sätze, welche die verschiedenen Durchmesser und Sehnen betreffen.

§. 183. Lehrsatz. Wenn man in der Ellipse oder Hyperbel (Fig. 57. 58.) Sehnen EG, HI unter sich parallel, unter irgend einem Winkel geneigt gegen die Hauptaxe CD zieht, so giebt es allemal eine durch den Mittelpunkt der Curve gehende gerade Linie, welche diese Sehne sämmtlich halbirt.

Beweis. Es sey $CD = x$, $DE = z$, auf sie senkrecht $CF = u$, $FE = v$, und der Winkel $EFD = \beta$, so ist $z = v \,.\, Sin\,\beta$, $x = u + v \,.\, Cos\,\beta$, also in der Ellipse $v^2 \,.\, Sin^2\,\beta = b^2 - \frac{b^2 u^2}{a^2} - \frac{2\, b^2 u\, v \,.\, Cos\,\beta}{a^2} - \frac{v^2 \,.\, Cos^2\,\beta}{a^2}$, daher $v^2 + \frac{2\, v \,.\, u b^2 \,.\, Cos\,\beta}{a^2 \,.\, Sin^2\,\beta + b^2 \,.\, Cos^2\,\beta} = \frac{b^2\,(a^2 - u^2)}{a^2 \,.\, Sin^2\,\beta + b^2 \,.\, Cos^2\,\beta}$; das ist $v = - \frac{u\, b^2 \,.\, Cos\,\beta}{a^2 \,.\, Sin^2\,\beta + b^2 \,.\, Cos^2\,\beta} \pm \frac{ab \,.\, \sqrt{\{a^2 \,.\, Sin^2\,\beta + b^2 \,.\, Cos^2\,\beta - u^2 \,.\, Sin^2\,\beta\}}}{a^2 \,.\, Sin^2\,\beta + b^2 \,.\, Cos^2\,\beta}$. Dieser doppelte Werth von v giebt auch hier beide Ordinaten FE, FG an, und es erhellet leicht, dass auch hier durch das rationale Glied angegeben wird, wie weit man von F auf der Sehne messen muss, um bis zu ihrer Mitte zu gelangen, das irrationale Glied dagegen die Länge der halben Sehne bestimmt. Wenn also K die Mitte der Sehne bezeichnet, so ist $FK = - \frac{u \,.\, b^2 \,.\, Cos\,\beta}{a^2 \,.\, Sin^2\,\beta + b^2 \,.\, Cos^2\,\beta}$, der Grösse u proportional, da für Sehnen, die unter sich parallel sind, β einen immer gleichen Werth hat. Für alle parallele Sehnen also ist $FK : LD = CF : CD$, und die gerade Linie CK trifft die Sehnen alle in ihrer Mitte.

Bei der Hyperbel wird Rechnung und Beweis ganz eben so geführt, nur kömmt da überall b^2 mit dem entgegen gesetzten Zeichen vor, und es ist

$$v = + \frac{u\, b^2 \,.\, Cos\,\beta}{a^2 \,.\, Sin^2\,\beta - b^2 \,.\, Cos^2\,\beta} \pm \frac{ab\, \sqrt{\{- a^2 \,.\, Sin^2\,\beta + b^2 \,.\, Cos^2\,\beta + u^2 \,.\, Sin^2\,\beta\}}}{a^2 \,.\, Sin^2\,\beta - b^2 \,.\, Cos^2\,\beta},$$

Bei der gleichseitigen Hyperbel ist $v = \frac{- u \,.\, Cos\,\beta}{Cos - 2\beta} \pm \frac{\sqrt{\{a^2 \,.\, Cos\, 2b + Sin^2\,\beta\}}}{Cos\, 2\beta}$.

§. 184. Erklärung. Diese durch den Mittelpunkt gehende Linie, welche alle Sehnen, die unter einem bestimmten Winkel $= \beta$ gegen die Hauptaxe geneigt sind, halbirt, heisst die diesen Sehnen conjugirte oder zugeordnete Axe, oder der ihnen zugeordnete Durchmesser. Die halben Sehnen, welche ihr zugehören, nenne ich die ihr richtig Zugeordneten; der Winkel, unter welchem diese Sehnen gegen den halbirenden Durchmesser geneigt sind, heisst der Conjugationswinkel.

§. 185. Die Formel (§. 183.) giebt für die Ellipse einen der Werthe von $v = b$ an, wenn man für die Abscissen den bestimmten Werth $u = (a - b)\, Cos\,\beta$ nimmt. Alsdann nämlich wird die unter dem Wurzelzeichen stehende Grösse $= a^2 \,.\, Sin^2\,\beta + b^2 \,.\, Cos^2\,\beta - (a - b)^2\, Sin^2\,\beta \,.\, Cos\,\beta = (a \,.\, Sin^2\,\beta + b \,.\, Cos^2\,\beta)^2$ und es ist daher $v = \frac{- (a - b)\, b^2 \,.\, Cos^2\,\beta \pm (a^2 b \,.\, Sin^2\,\beta + b^2 a \,.\, Cos^2\,\beta)}{a^2 \,.\, Sin^2\,\beta + b^2 \,.\, Cos^2\,\beta}$, und dieser doppelte Werth ist entweder $= b$,

$$\text{oder} = \frac{- 2\, a\, b^2 \,.\, Cos^2\,\beta + b\,(b^2 \,.\, Cos^2\,\beta - a^2 \,.\, Sin^2\,\beta)}{a^2 \,.\, Sin^2\,\beta + b^2 \,.\, Cos^2\,\beta}.$$

Dieses kann dienen, um die Ellipse zu zeichnen. Zieht man nämlich (Fig. 55.)

die beiden halben Hauptaxen CA, CI; fasst ihren Unterschied $= a - b$ zwischen den Cirkel und nimmt von dem auf der einen Axe willkürlich genommenen Punkte P den Abstand $PQ = a - b$, so dass Q in der andern Axe liegt, so schneidet diese Linie verlängert die Ellipse an der einen Seite so in S, dass $PS = b$ wird.

Da diess für jeden Werth von β richtig bleibt, so kann man dadurch so viele Punkte der Ellipse, als man will, bestimmen.

Bei der Hyperbel findet etwas Aehnliches nicht statt.

§. 185. * Wenn der Winkel $= \beta$ gegeben ist, unter welchem die Sehnen gegen die Hauptaxe geneigt sind, so findet man leicht den Conjugationswinkel $FKL = \alpha$ (Fig. 57. 58.), indem für die Ellipse

$$tang\,\alpha = \frac{u\,.\,Sin\,\beta}{-FK + u\,.\,Cos\,\beta} = \frac{Sin\,\beta\,(a^2\,.\,Sin^2\,\beta + b^2\,.\,Cos^2\,\beta)}{(a^2 - b^2)\,Cos\,\beta\,.\,Sin^2\,\beta},$$

$$= \frac{a^2\,.\,Sin^2\,\beta + b^2\,.\,Cos^2\,\beta}{(a^2 - b^2)\,Sin\,\beta\,.\,Cos\,\beta}$$ ist, weil nämlich in der Figur

$$-FK = \frac{-u\,b^2\,.\,Cos\,\beta}{a^2\,.\,Sin^2\,\beta + b^2\,.\,Cos^2\,\beta};$$

daher $$Sin\,\alpha = \frac{a^2\,.\,Sin^2\,\beta + b^2\,.\,Cos^2\,\beta}{\sqrt{(a^4\,.\,Sin^2\,\beta + b^4\,.\,Cos^2\,\beta)}}.$$

Für die Hyperbel hingegen wird

$$Sin\,\alpha = \frac{a^2\,.\,Sin^2\,\beta - b^2\,.\,Cos^2\,\beta}{\sqrt{(a^4\,.\,Sin^2\,\beta + b^4\,.\,Cos^2\,\beta)}},$$

$$tang\,\alpha = \frac{a^2\,.\,Sin^2\,\beta - b^2\,.\,Cos^2\,\beta}{(a^2 + b^2)\,Sin\,\beta\,.\,Cos\,\beta}.$$ Hier wird $\alpha = o$ für $\frac{b}{a} = tang\,\beta$.

Für den Winkel $= \alpha - \beta$, welchen der den Sehnen zugeordnete Durchmesser mit der Hauptaxe macht, ist

bei der Ellipse $tang\,(\alpha - \beta) = \frac{b^2}{a^2}\,Cotang\,\beta$;

bei der Hyperbel $tang\,(\beta - \alpha) = \frac{b^2}{a^2}\,Cotang\,\beta$.

Bei der letzteren liegt dieser Winkel oberhalb der Axe, wenn er bei gleichen Werthen von β in der Ellipse unterhalb der Axe liegt.

§. 185. ** Sowohl bei der Ellipse, als bei der Hyperbel, kann man u so annehmen, dass die Wurzelgrösse $= o$ wird, oder dass die Sehne verschwindet; dieses geschieht in dem Endpunkte P jenes den Sehnen zugeordneten Durchmessers, und da ist die Sehne zur Tangente geworden, so dass schon hier erhellt, dass die Tangente am Ende jedes Durchmessers parallel den zugeordneten Sehnen ist.

§. 186. **Aufgabe.** Die Gleichung für die Ellipse und Hyperbel so

darzustellen, dass die Abscissen $= s = CK$ auf dem conjugirten Durchmesser genommen und durch sie die richtig zugeordneten halben Sehnen $KE = t$ ausgedrückt werden.

Auflösung. Da $s = \frac{u \cdot Sin\,\beta}{Sin\,\alpha}$ ist, indem $CF = u$, $CK = s$, und α, β die ihnen gegen über stehenden Winkel sind, so hat man, weil die halbe Sehne der Ellipse (§. 183.) $= t = \frac{a\,b\,\sqrt{(a^2 \cdot Sin^2\,\beta + b^2 \cdot Cos^2\,\beta - u^2 \cdot Sin^2\,\beta}}{a^2 \cdot Sin^2\,\beta + b^2 \cdot Cos^2\,\beta}$ war,

$$t^2 = \frac{a^2\,b^2\,(a^2 \cdot Sin^2\,\beta + b^2 \cdot Cos^2\,\beta - s^2 \cdot Sin^2\,\alpha)}{(a^2 \cdot Sin^2\,\beta + b^2 \cdot Cos^2\,\beta)^2},$$

oder (§. 186.) $t^2 = a^2\,b^2 \left\{ \frac{1}{a^2 \cdot Sin^2\,\beta + b^2 \cdot Cos^2\,\beta} - \frac{s^2}{a^4 \cdot Sin^2\,\beta + b^4 \cdot Cos^2\,\beta} \right\}$.

Um diesen Werth bequemer darzustellen, wollen wir den Werth von s suchen, wobei $t = o$ wird, oder wo, indem die Sehne ganz verschwindet, der Endpunkt P des Durchmessers CL gefunden wird; er giebt

$s^2 = \frac{a^4 \cdot Sin^2\,\beta + b^4 \cdot Cos^2\,\beta}{a^2 \cdot Sin^2\,\beta + b^2 \cdot Cos^2\,\beta}$, oder wenn ich den so gefundenen halben Durchmesser $= A$ nenne, $A^2 = \frac{a^4 \cdot Sin^2\,\beta + b^4 \cdot Cos^2\,\beta}{a^2 \cdot Sin^2\,\beta + b^2 \cdot Cos^2\,\beta}$. Dagegen wird für $s = o$ t denjenigen Werth erhalten, den wir den halben zugeordneten Durchmesser $= B$ nennen müssen, und es wird folglich

$$B^2 = \frac{a^2\,b^2}{a^2 \cdot Sin^2\,\beta + b^2 \cdot Cos^2\,\beta}.$$

Die Gleichung, welche für die Ellipse t ausdrückt, ist also auch $t^2 = B^2 - \frac{B^2 \cdot s^2}{A^2}$, so dass die Ordinate durch die Abscisse und beide conjugirte Durchmesser eben so ausgedrückt wird, wie es bei den Hauptaxen und den ihnen parallel genommenen Coordinaten der Fall war. In der Figur stellen CP, CQ die beiden conjugirten halben Axen dar.

Genau dieselbe Rechnung giebt bei der Hyperbel

$$t^2 = a^2\,b^2 \left(\frac{s^2}{a^4 \cdot Sin^2\,\beta + b^4 \cdot Cos^2\,\beta} - \frac{1}{a^2 \cdot Sin^2\,\beta - b^2 \cdot Cos^2\,\beta} \right);$$ und es wird der halbe Durchmesser, auf welchem die Abscissen s genommen werden, $= A$, durch $A^2 = \frac{a^4 \cdot Sin^2\,\beta + b^4 \cdot Cos^2\,\beta}{a^2 \cdot Sin^2\,\beta - b^2 \cdot Cos^2\,\beta}$ ausgedrückt, dagegen würde für $s = o$ $t^2 = -B^2 = -\frac{a^2\,b^2}{a^2 \cdot Sin^2\,\beta - b^2 \cdot Cos^2\,\beta}$ unmöglich seyn; allgemein aber $t^2 = -B^2 + \frac{B^2\,s^2}{A^2}$. In der Figur (Fig. 58.) ist $CP = A$; aber obgleich

CQ die Richtung der conjugirten Axe angiebt, so findet doch für diese keine Bestimmung der Grösse statt, da sie nirgends einschneidet.

§. 187. In Beziehung auf die Hyperbel sind hier noch einige Bemerkungen nöthig. Der Werth von A^2 bleibt positiv, so lange $\frac{b}{a} < tang\,\beta$ ist; für solche Winkel schneidet der Durchmesser, auf welchem die Abscissen genommen wurden, und welcher gegen die Hauptaxe unter dem Winkel $(\beta - \alpha)$ geneigt ist (§. 185), in beide einander gegen über liegende Stücke der Hyperbel ein, die mit den Ordinaten t parallel durch den Mittelpunkt gezogene Axe übertrifft die Hyperbel nicht. Ist $tang\,\beta = \frac{b}{a}$, so trifft dieser Durchmesser so wenig, als der mit t parallele Durchmesser der Hyperbel, sondern der Durchschnittspunkt ist ins Unendliche hinaus gerückt. Für $tang\,\beta < \frac{b}{a}$, oder wenn

$tang\,(\beta - \alpha) > \frac{b}{a}$ ist, schneidet der unter diesem Winkel gegen die Hauptaxe geneigte Durchmesser, auf welchem die s genommen wurden, nicht mehr in die Hyperbel ein, und daher wird der Werth von A unmöglich; dagegen schneidet dann der mit t parallele Durchmesser B in beide Theile der Hyperbel und wird daher durch mögliche Werthe ausgedrückt.

Bei der gleichseitigen Hyperbel wird immer $A = B = \frac{a}{\sqrt{(Sin^2\beta - Cos^2\beta)}}$, beim Kreise aber $A = B = a$.

§. 188. **Lehrsatz.** Für jede zwei einander zugeordnete halbe Durchmesser A, B ist in der Ellipse die Summe ihrer Quadrate eine unveränderliche Grösse; in der Hyperbel, wo allemal einer der Durchmesser unmöglich ist, wird der Ausdruck $A^2 - B^2$ allemal unveränderlich.

Beweis. Für die Ellipse war $A^2 = \frac{a^4 . Sin^2\beta + b^4 . Cos^2\beta}{a^2 . Sin^2\beta + b^2 . Cos^2\beta}$, und $B^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 . Sin^2 + b^2 . Cos^2\beta}$; die Summe lässt sich, da $Sin^2\beta + Cos^2\beta = 1$ ist, bequem so ausdrücken:

$$A^2 + B^2 = \frac{a^4 . Sin^2\beta + a^2 b^2 . Cos^2\beta + a^2 b^2 . Sin^2\beta + b^4 . Cos^2\beta}{a^2 . Sin^2\beta + b^2 . Cos^2\beta},$$

wo sogleich erhellt, dass $A^2 + B^2 = a^2 + b^2$ ist, also immer einerlei Werth behält.

Für die Hyperbel ist

$$A^2 - B^2 = \frac{a^4 . Sin^2\beta - a^2 b^2 . Cos^2\beta - a^2 b^2 . Sin^2\beta + b^4 . Cos^2\beta}{a^2 . Sin^2\beta - b^2 . Cos^2\beta} = a^2 - b^2.$$

§. 189. Lehrsatz. Wenn man aus irgend zwei conjugirten Durchmessern der Ellipse ein Parallelogramm bildet, dessen Winkel gleich dem Conjugationswinkel $= \alpha$ ist, so ist der Inhalt dieses Parallelogramms gleich für jede zwei zusammengehörige Durchmesser.

Für die Hyperbel gilt eben das, wenn man statt des unmöglichen Durchmessers, der durch $= B \,.\, \sqrt{-1}$ angegeben würde, die Linie $= B$ nimmt.

Beweis. Für die Ellipse ist $A.B = \dfrac{ab\sqrt{(a^4 \,.\, Sin^2\,\beta + b^4 \,.\, Cos^2\,\beta)}}{a^2 \,.\, Sin^2\,\beta + b^2 \,.\, Cos^2\,\beta}$,

oder, da (§. 186.) $Sin\,\alpha = \dfrac{a^2 \,.\, Sin^2\,\beta + b^2 \,.\, Cos^2\,\beta}{\sqrt{(a^4 \,.\, Sin^2\,\beta + b^4 \,.\, Cos^2\,\beta}}$ ist,

$$A \,.\, B \,.\, Sin\,\alpha = a \,.\, b,$$

oder wenn man, wie der Lehrsatz angiebt, die ganzen Durchmesser nimmt,

$$4\,A \,.\, B \,.\, Sin\,\alpha = 4\,a \,.\, b.$$

Für die Hyperbel würde eben so $A \,.\, B \,.\, Sin\,\alpha = a \,.\, b$.

§. 190. Bei der Ellipse lässt sich dieser Lehrsatz auch so ausdrücken: Wenn man in den Endpunkten P, V, Q, W zweier einander zugeordneter Durchmesser (Fig. 57.) der Ellipse Tangenten an die Ellipse zieht, so bilden diese ein Parallelogramm $RSTU$, dessen Inhalt immer gleich ist, welche conjugirte Durchmesser man wählen mag. Denn die in den Endpunkten des einen conjugirten Durchmessers gezognen Tangenten sind dem andern Durchmesser parallel, bilden also ein Parallelogramm, dessen einer Winkel $= \alpha$ ist. Dass sie dem andern Durchmesser parallel sind, erhellt daraus, weil am Ende jenes ersten Durchmessers die beiden Endpunkte der mit dem andern Durchmesser parallelen Sehne zusammen fallen, diese Parallellinie also ganz ausserhalb der Curve liegt, doch aber einen Punkt mit ihr gemein hat, also sie berührt.

§. 191. Lehrsatz. Bei der Ellipse wird der Conjugationswinkel am kleinsten, wenn beide conjugirte Durchmesser gleich sind.

Beweis. Da allemal $A^2 + B^2 = a^2 + b^2$, also die Summe der Quadrate beider halben Durchmesser unveränderlich ist, so wird ihr Product $A.B$ am grössten, wenn sie gleich sind; wenn aber ihr Product AB am grössten seyn soll, so muss $Sin\,\alpha$ am kleinsten seyn, da $AB = \dfrac{ab}{Sin\,\alpha}$ ist *).

§. 192. In diesem Falle ist $tang\,\alpha = tang\,2\beta$. Denn da $A^2 = B^2$,

*) Wenn $A^2 + B^2$ allemal $= a^2 + b^2$ ist, und $AB = w^2$ gesetzt wird, so ist

$$A + B = \sqrt{(a^2 + 2\,w^2 + b^2)}$$
$$A - B = \sqrt{(a^2 - 2\,w^2 + b^2)}$$

und das letztere wird unmöglich, wenn $w^2 > \frac{1}{2}\,(a^2 + b^2)$ wäre, diesen grössten Werth erreicht also das Product $A.B$, wenn $A = B$ ist.

also $a^4 . Sin^2 \beta + b^4 . Cos^2 \beta = a^2 b^2$ (nach §. 186.), seyn soll, so ist $tang\, \beta = \frac{b}{a}$ und (§. 186.) $tang\, (\alpha - \beta) = \frac{b}{a} = tang\, \beta$, also $\alpha = 2 \beta$.

Hieraus erhellt, dass diese unter sich gleichen zusammen geordneten Durchmesser eben den Winkel mit der Hauptaxe machen, welchen die zwischen den Endpunkten der Hauptaxen gezogenen Sehnen mit dieser machen, oder dass die conjugirten Durchmesser dann einander gleich werden, wenn sie diesen Sehnen parallel sind. In Fig. 59. stellen $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ diese Durchmesser, die mit cb, bd parallel sind, vor.

§. 193. Aus der Gleichung für jede zwei conjugirte halbe Durchmesser

$$A = \sqrt{\frac{a^4 . Sin^2 \beta + b^4\ Cos^2 \beta}{a^2 . Sin^2 \beta + b^2 . Cos^2 \beta}} \text{ und } B = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 . Sin^2 \beta + b^2 . Cos^2 \beta)}},$$

erhellt auch, dass die eine halbe Hauptaxe a grösser, und die andre halbe Hauptaxe b kleiner als jeder andre halbe Durchmesser ist; denn wenn man dividirt, so ist $A^2 = a^2 - \frac{b^2 . Cos^2 \beta\, (a^2 - b^2)}{a^2 . Sin^2 \beta + b^2 . Cos^2 \beta}$, wo, weil b die Hälfte der kleinern Hauptaxe bedeutete, allemal das letzte Glied ein wirklich abzuziehendes ist. Daraus erhellt dann schon von selbst, dass $B^2 > b^2$, weil

$$A^2 + B^2 = a^2 + b^2.$$

§. 194. **Lehrsatz.** Wenn in einer Ellipse zwei conjugirte Durchmesser AB, CD (Fig. 59.) gezogen werden, so ist das Parallelogramm, welches von den durch ihre Endpunkte gezogenen Sehnen gebildet wird, $ACDB$, von immer gleicher Grösse.

Beweis. Jedes der vier Dreiecke ist $= \frac{1}{2} A . B . Sin\, \alpha$, da $GB = A$, $GC = B$ und $CGB = \alpha$ ist.

§. 195. Die Quadrate der Seiten aller dieser Parallelogramme geben immer eine gleiche Summe, indem $CB^2 = A^2 + B^2 - 2 A . B . Cos\, \alpha$ und $DB^2 = A^2 + B^2 + 2 A . B . Cos\, \alpha$ ist.

§. 196. **Lehrsatz.** Die Summe beider Hauptaxen der Ellipse beträgt weniger als die Summe irgend zweier anderer conjugirter Durchmesser.

Beweis. Da $a^2 + b^2 = A^2 + B^2$ (§. 188. 189.),
und $2 a b = 2 A . B . Sin\, \alpha$,
so ist $a + b = \sqrt{\{A^2 + 2 AB . Sin\, \alpha + B^2\}}$, aber diese Wurzelgrösse ist weniger als $A + B$.

§. 197. **Lehrsatz.** Die Summe der zwischen den Endpunkten conjugirter Durchmesser gezogenen Sehnen ist 1. am grössesten für die Hauptaxen, und 2. am kleinsten für die gleichen conjugirten Durchmesser.

Beweis. Aus § 195. folgt (Fig. 59.) $DB^2 + CB^2 = 2 (A^2 + B^2)$
$2 . DB . CB = 2 \sqrt{\{(A^2 + B^2)^2 - 4 A^2 B^2 . Cos^2 \alpha\}}$,

also, da das letztere kleiner als $2 \cdot (A^2 + B^2)$ ist,

$DB + CB < 2 \sqrt{(A^2 + B^2)}$, das ist $< 2 \sqrt{(a^2 + b^2)}$; aber $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ ist die Sehne, welche die Endpunkte der Hauptaxen verbindet.

Eben diese Summe ist am kleinsten für die Sehnen, welche die Endpunkte der gleichen conjugirten Durchmesser verbinden, weil da $Cos\,\alpha$ am grössesten ist (§. 191.)

§. 198. **Lehrsatz.** Unter den Sehnen, die zwischen den Endpunkten der zusammen gehörigen Durchmesser gezogen werden, ist diejenige die grösseste, welche, zwischen den Endpunkten der gleichen Durchmesser gezogen, die grosse Hauptaxe, und diejenige die kleinste, welche, zwischen den Endpunkten der gleichen Durchmesser gezogen, die kleine Hauptaxe schneidet.

Beweis. Jene ist, da sie allgemein durch $\sqrt{(A^2 + B^2 + 2\,AB \cdot Cos\,\alpha)}$ ausgedrückt wird, und also (nach §. 188. 189.) $= \sqrt{(a^2 + b^2 + 2\,ab \cdot Cotang\,\alpha)}$ ist, am grössesten da, wo $Cotang\,\alpha$ am grössesten, oder α am kleinsten ist; für die zweite hingegen, die $= \sqrt{(a^2 + b^2 - 2\,ab \cdot Cotang\,\alpha)}$ ist, findet das Entgegengesetzte statt.

§. 199. **Bemerkung.** Wollte man ähnliche Betrachtungen über die ungleiche Grösse der conjugirten Durchmesser und der zwischen ihren Endpunkten gezognen Sehnen auch bei der Hyperbel anstellen, so müsste man die Linie $= b$ als zweite Hauptaxe und so für jeden andern Durchmesser $= A$ die den conjugirten Sehnen parallele Linie $= B$ auftragen. Diese Linien b, B aber, welche nicht durch die Hyperbel selbst abgeschnitten werden, können nicht als eigentliche Axen oder Durchmesser der Hyperbel angesehen werden, sondern erscheinen mit Recht in unsern Rechnungen als unmöglich $= b \cdot \sqrt{-1}$.

Um dennoch diese Linien B, b in der Figur vor Augen zu legen, zeichnet **Apollonius**, unter dem Namen der conjugirten Hyperbel, diejenige, für welche die Grösse b auf der gegen die Hauptaxe der Hyperbel senkrechten Linie als halbe Axe aufgetragen und nun jede Ordinate x so gezeichnet wird, dass $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(z^2 - b^2)$ sey. Fig. 60. stellt solche conjugirte Hyperbeln dar.

In Beziehung auf diese conjugirten Hyperbeln und ihre zusammengehörenden Durchmesser, würde nun z. B. der Satz § 188. gerade zu so ausgedrückt werden: Bei conjugirten Hyperbeln ist der Unterschied der Quadrate ihrer conjugirten Durchmesser eine unveränderliche Grösse. Es würde sich nun von Sehnen zwischen den Endpunkten der conjugirten Durchmesser u. s. w. reden lassen, und dann sich mehrere Sätze denen für die Ellipse ähnlich ergeben.

Aber da die Gleichung für die Hyperbel nur die eine Hyperbel ausdrückt, und die zugeordnete nur als eine verwandte Linie anzusehen ist, so scheinen diese Untersuchungen ausserhalb des Kreises derjenigen Betrachtungen zu liegen, welche wir hier bloss auf die Gleichung für die Curve gründen.

§. 200. Aufgabe. Es sind in der Ellipse zwei conjugirte halbe Durchmesser $LA = A'$, $LB = B'$ (Fig. 61.), und der Conjugationswinkel $ALB = \alpha'$ gegeben; wenn nun unter dem Winkel $ALa = \varepsilon$ eine neue Axe gegen A', unter einem spitzen Winkel geneigt, gezogen wird, den für ihre Ordinaten passenden Conjugationswinkel anzugeben.

Auflösung. Wenn MN eine mit LB parallele Ordinate ist, und $LM = x$, $MN = z$ heisst, zugleich auch auf La die Abscisse $LO = u$ und eine Ordinate $ON = v$ genommen wird, so ist, wenn ich $NOa = \alpha''$ nenne,

$$x = \frac{u \,.\, Sin\,(\alpha' - \varepsilon) - v \,.\, Sin\,(\alpha'' - \alpha' + \varepsilon)}{Sin\,\alpha'};$$

$$z = \frac{u \,.\, Sin\,\varepsilon + v \,.\, Sin\,(\alpha'' + \varepsilon)}{Sin\,\alpha'}.$$

Da nun $z^2 = \frac{B'^2}{A'^2}(A'^2 - x^2)$ ist,

so wird

$$u^2 \,.\, Sin^2\,\varepsilon + 2uv \,.\, Sin\,\varepsilon \,.\, Sin\,(\alpha'' + \varepsilon) + v^2 \,.\, Sin^2\,(\alpha'' + \varepsilon)$$
$$+ u^2 \frac{B'^2}{A'^2} \,.\, Sin^2\,(\alpha' - \varepsilon) - 2uv \,.\, \frac{B'^2}{A'^2} \,.\, Sin\,(\alpha' - \varepsilon) \,.\, Sin\,(\alpha'' - \alpha' + \varepsilon) - B'^2 \,.\, Sin^2\,\alpha'$$
$$+ \frac{v^2\,B'^2}{A'^2} \,.\, Sin^2\,(\alpha'' - \alpha' + \varepsilon) = o.$$

Hieraus würde v gefunden werden; soll aber α'' so angenommen seyn, dass die Sehne NP halbirt werde oder La der ihr zugeordnete Durchmesser ist, so muss das Glied, welches $u \,.\, v$ enthält, ganz wegfallen, also

$$A'^2 \,.\, Sin\,\varepsilon \,.\, Sin\,(\alpha'' + \varepsilon) = B'^2 \,.\, Sin\,(\alpha' - \varepsilon) \,.\, Sin\,(\alpha'' + \varepsilon - \alpha'),$$

das ist $tang\,(\alpha'' + \varepsilon) = \frac{B'^2 \,.\, Sin\,\alpha' \,.\, Sin\,(\alpha' - \varepsilon)}{B'^2 \,.\, Sin\,(\alpha' - \varepsilon) \,.\, Cos\,\alpha' - A'^2 \,.\, Sin\,\varepsilon}$ seyn,

oder $$tang\,\alpha'' = \frac{A'^2 \,.\, Sin^2\,\varepsilon + B'^2 \,.\, Sin^2\,(\alpha' - \varepsilon)}{B'^2 \,.\, Sin\,(\alpha' - \varepsilon) \,.\, Cos\,(\alpha' - \varepsilon) - A'^2 \,.\, Sin\,\varepsilon \,.\, Cos\,\varepsilon},$$

$$Sin\,\alpha'' = \frac{A'^2 \,.\, Sin^2\,\varepsilon + B'^2 \,.\, Sin^2\,(\alpha' - \varepsilon)}{\sqrt{\{A'^4 \,.\, Sin^2\,\varepsilon - 2A'^2 B'^2 \,.\, Sin\,\varepsilon \,.\, Sin(\alpha' - \varepsilon) \,.\, Cos\,\alpha' + B'^4 \,.\, Sin^2\,(\alpha' - \varepsilon)\}}}.$$

§. 201. Wenn man α'' so annimmt, so erhält man für $v = o$, den Werth des halben Durchmessers, $La = A'' = \frac{A'\,B' \,.\, Sin\,\alpha'}{\sqrt{\{A'^2 \,.\, Sin^2\,\varepsilon + B'^2 \,.\, Sin^2\,(\alpha' - \varepsilon)\}}}$,

und für $u = o$, erhält man den zugeordneten halben Durchmesser

$$Lb = B'' = \frac{A'\,B' \,.\, Sin\,\alpha'}{\sqrt{\{A'^2 \,.\, Sin\,(\alpha'' + \varepsilon) + B'^2 \,.\, Sin^2\,(\alpha'' + \varepsilon - \alpha')\}}}$$

$$= \sqrt{\left\{\frac{A'^4 \,.\, Sin^2\,\varepsilon + B'^4 \,.\, Sin^2\,(\alpha' - \varepsilon) - 2\,A'^2\,B'^2 \,.\, Sin\,\varepsilon \,.\, Cos\,\alpha' \,.\, Sin(\alpha' - \varepsilon)}{A'^2 \,.\, Sin^2\,\varepsilon + B'^2 \,.\, Sin^2\,(\alpha' - \varepsilon)}\right\}}.$$

Daraus ergiebt sich auch $B'' \,.\, Sin\,\alpha'' = \sqrt{\{A'^2 \,.\, Sin^2\,\varepsilon + B'^2 \,.\, Sin^2\,(\alpha' - \varepsilon)\}}$,

und $B''.\,Sin\,(\alpha''+\varepsilon-\alpha') = \dfrac{A'^2.\,Sin\,\alpha'\,.\,Sin\,\varepsilon}{\sqrt{\{A'^2.\,Sin^2\,\varepsilon + B'^2.\,Sin^2\,(\alpha'-\varepsilon)\}}}$;

$$B''.\,Cos\,(\alpha''+\varepsilon-\alpha') = \frac{B'^2.\,Sin\,(\alpha'-\varepsilon) - A'^2.\,Sin\,\varepsilon.\,Cos\,\alpha'}{\sqrt{\{A'^2.\,Sin^2\,\varepsilon + B'^2.\,Sin^2\,(\alpha'-\varepsilon)\}}},$$

oder $B''.\,Sin\,(\alpha''+\varepsilon-\alpha') = \dfrac{A'.\,A''.\,Sin\,\varepsilon}{B'}$;

$$B''.\,Cos\,(\alpha''+\varepsilon-\alpha') = \frac{B'\,A''.\,Sin\,(\alpha'-\varepsilon)}{A'.\,Sin\,\alpha'} - \frac{A'\,A''.\,Sin\,\varepsilon.\,Cos\,\alpha'}{B'.\,Sin\,\alpha'}.$$

§. 202. Bei der Hyperbel lässt sich eben so aus zwei gegebnen conjugirten Durchmessern und der Lage eines neuen Durchmessers gegen eine derselben der Conjugationswinkel für diese finden.

Wenn nämlich Fig. 63. die Buchstaben die, eben so wie vorhin, bezeichneten Linien und Winkel bedeuten, so ist

$x = -\dfrac{u.\,Sin\,(\varepsilon-\alpha') + v.\,Sin(\alpha''+\alpha'-\varepsilon)}{Sin\,\alpha'}$ und $z = \dfrac{u.\,Sin\,\varepsilon - v.\,Sin(\alpha''-\varepsilon)}{Sin\,\alpha'}$,

also da $z^2 = -B'^2 + \dfrac{B'^2\,x^2}{A'^2}$, muss $tang(\alpha''-\varepsilon) = \dfrac{B'^2.\,Sin\,(\varepsilon-\alpha')\,Sin\,\alpha'}{B'^2.\,Cos\,\alpha'.\,Sin\,(\varepsilon-\alpha') + A'^2.\,Sin\,\varepsilon}$ seyn, wenn die neue Abscissenlinie die Sehnen, die unter dem Winkel $= \alpha''$ gegen sie geneigt sind, halbiren soll.

§. 203. Lehrsatz. Wenn (Fig. 61.) zwei conjugirte Durchmesser der Ellipse $LA = A''$, $LB = B''$, unter dem Winkel $= \alpha''$ gegen einander geneigt, gezogen werden; wenn ferner zwei andre conjugirte Durchmesser $La = A'$, $Lb = B'$ unter dem Winkel $= \alpha'$ gegen einander geneigt gezogen werden, und man zeichnet von den Endpunkten a, b der beiden letzteren Linien aK mit A'', bI mit B'' parallel, bis sie die zugehörigen conjugirten Durchmesser erreichen, so ist $bI^2 = BK.\,KC$.

Beweis. Wenn ich $ALa = \varepsilon$ und $ALB = \alpha''$ nenne, so erhellt sogleich, dass $bI = \dfrac{B'.\,Sin\,(\alpha'-\varepsilon)}{Sin\,\alpha''}$ und $LK = \dfrac{A'.\,Sin\,\varepsilon}{Sin\,\alpha''}$, also

$CK = B'' + \dfrac{A'.\,Sin\,\varepsilon}{Sin\,\alpha''}$ und $AK = B'' - \dfrac{A'.\,Sin\,\varepsilon}{Sin\,\alpha''}$ ist. Das Product

$AK.\,KC$ wird also $= \dfrac{B''^2.\,Sin^2\,\alpha'' - A'^2.\,Sin^2\,\varepsilon}{Sin^2\,\alpha''}$, das ist nach §. 201.

$$AK.\,KC = \frac{B'^2.\,Sin^2\,(\alpha'-\varepsilon)}{Sin^2\,\alpha''} = bI^2.$$

§. 204. Lehrsatz. Wenn (Fig. 62.) in der Ellipse AD, DC und so auch BD, DE conjugirte halbe Durchmesser sind, so sind die Linien DH, DI, welche die Sehnen AB, CE halbiren, gleichfalls zusammen geordnete halbe Durchmesser.

Beweis. Da DI die Sehne CE halbirt, so muss DH mit CE parallel seyn, wofern wir sie als den der DI conjugirten Durchmesser anerkennen sollen, und eben so muss DI mit AB parallel seyn.

Es sey $DE = A'$, $DB = B'$, $BDE = \alpha'$, $DC = A''$, $DA = B''$, $ADC = \alpha''$, $CDE = \varepsilon$, so ist, da $ADB = \alpha'' + \varepsilon - \alpha'$,

$$tang\ ABD = \frac{B''.\,Sin\,(\alpha'' + \varepsilon - \alpha')}{B' - B''.\,Cos\,(\alpha'' + \varepsilon - \alpha')}.$$

Zugleich ist $tang\ CDG = \frac{A'.\,Sin\,\varepsilon}{A'' + A'.\,Cos\,\varepsilon}$, weil nämlich der Inhalt der beiden an Inhalt gleichen Dreiecke CDG, EDG durch

$$\frac{DG.\,A''.\,Sin\,CDG}{2} = \frac{DG.\,A'.\,Sin\,(\varepsilon - CDG)}{2}$$ ausgedrückt wird;

und daraus folgt

$$tang\ BDG = tang\,(\alpha' - \varepsilon + CDG) = \frac{tang\,(\alpha' - \varepsilon) + tang\ CDG}{1 - tang\ CDG.\,tang\,(\alpha' - \varepsilon)},$$

oder $tang\ BDG = \frac{A''.\,Sin\,(\alpha' - \varepsilon) + A'.\,Sin\,\alpha'}{A''.\,Cos\,(\alpha' - \varepsilon) + A'.\,Cos\,\alpha'}$.

Wenn ich hier den Werth von A'' aus §. 201. benutze, so ist

$tang\ BDG$

$$= \frac{A'.\,B'.\,Sin\,\alpha'.\,Sin\,(\alpha' - \varepsilon) + A'.\,Sin\,\alpha'\,\sqrt{\{A'^2.\,Sin^2\,\varepsilon + B'^2.\,Sin^2\,(\alpha' - \varepsilon)\}}}{A'.\,B'.\,Sin\,\alpha'.\,Cos\,(\alpha' - \varepsilon) + A'.\,Cos\,\alpha'\,\sqrt{\{A'^2.\,Sin^2\,\varepsilon + B'^2.\,Sin^2\,(\alpha - \varepsilon)\}}},$$

oder wenn man Zähler und Nenner mit

$B'.\,Sin\,(\alpha' - \varepsilon) - \sqrt{\{A'^2.\,Sin^2\,\varepsilon + B'^2.\,Sin^2\,(\alpha' - \varepsilon)\}}$ multiplicirt:

$tang\ BDG$

$$= \frac{-A'^2.\,Sin\,\alpha'.\,Sin^2\,\varepsilon}{\left\{\begin{matrix} B'^2.\,Sin\,\alpha'.\,Sin(\alpha' - \varepsilon).\,Cos\,(\alpha' - \varepsilon) - B'^2.\,Sin^2(\alpha' - \varepsilon).\,Cos\,\alpha' - A'^2.\,Sin^2\,\varepsilon.\,Cos\,\alpha' \\ - B'.\,Sin\,\varepsilon\,\sqrt{\{A'^2.\,Sin^2\,\varepsilon + B'^2.\,Sin^2\,(\alpha' - \varepsilon)\}} \end{matrix}\right\}},$$

oder $tang\ BDG$

$$= \frac{-A'^2.\,Sin\,\alpha'.\,Sin\,\varepsilon}{B'^2.\,Sin\,(\alpha' - \varepsilon) - A'^2.\,Sin\,\varepsilon.\,Cos\,\alpha' - B'.\,\sqrt{\{A'^2.\,Sin^2\,\varepsilon + B'^2.\,Sin^2\,(\alpha' - \varepsilon)\}}}.$$

Aber eben so gross ist $tang\ ABD$, indem die in §. 201. für $B''.\,Sin\,(\alpha'' + \varepsilon - \alpha')$ und für $B''.\,Cos\,(\alpha'' + \varepsilon - \alpha')$ gefundenen Ausdrücke in

$$tang\ ABD = \frac{B''.\,Sin\,(\alpha'' + \varepsilon - \alpha')}{B' - B''.\,Cos\,(\alpha'' + \varepsilon - \alpha')}$$ gesetzt, ergeben

$tang\ ABD$

$$= \frac{A'^2.\,Sin\,\varepsilon.\,Sin\,\alpha'}{B'.\,\sqrt{(A'^2.\,Sin^2\,\varepsilon + B'^2.\,Sin^2\,(\alpha' - \varepsilon))} - B'^2.\,Sin\,(\alpha' - \varepsilon) + A'^2.\,Sin\,\varepsilon.\,Cos\,\alpha'}.$$

§. 205. Auch wenn man (Fig. 62.) nach dem andern Endpunkte K des Durchmessers CD die Sehne EK zieht, so ist diese mit DG parallel. Denn

es wird $tang\ CKE = \frac{CE \,.\, Sin\ DCE}{2\,A'' - CE \,.\, Cos\ DCE}$, und

$$tang\ CDG = \frac{\frac{1}{2}\,CE \,.\, Sin\ DCE}{A'' - \frac{1}{2}\,CE \,.\, Cos\ DCE}.$$

Da hiernach, wenn man zwischen den Endpunkten A, B zweier Durchmesser eine Sehne und zugleich zwischen den Endpunkten der Durchmesser, welche jenen zugeordnet sind, K, E eine Sehne zieht, diese Sehnen parallel werden, so ergiebt sich leicht auch folgender Satz: Es sey AL ein Durchmesser, und CK der ihm zugeordnete; zieht man nun durch A eine willkürliche Linie AB, und durch K eine damit parallele Linie KE, so sind die durch die Einschnittspunkte B, E in die Ellipse gezognen Durchmesser DB, DE conjugirte Durchmesser.

§. 206. Aufgabe. In einer Ellipse, deren Hauptaxen gegeben sind, zwei andre unter sich zusammen geordnete Durchmesser anzugeben, die ein gegebnes Verhältniss zu einander haben.

Auflösung. Wenn man verlangt, dass die conjugirten Durchmesser $A'' : B'' = m : n$ seyn sollen, so muss, wie sich von selbst versteht, dieses Verhältniss so angenommen werden, dass der Exponent $\frac{m}{n}$ nicht grösser als $\frac{a}{b}$ sey, weil (§. 193.) a der grösste, b der kleinste unter allen halben Durchmessern ist. Ist es so angenommen, so kann man den Winkel $= \varepsilon$, unter welchem die eine Axe A'' gegen die Haupsaxe a geneigt ist, aus §. 201. finden, wo nun $A' = a$, $B' = b$, $\alpha' = 90^\circ$ ist, also $a^2\, b^2 : (b^4 \,.\, Cos^2\, \varepsilon + a^4 \,.\, Sin^2\, \varepsilon) = m^2 : n^2$, woraus

$$Sin\ \varepsilon = \frac{b\sqrt{(a^2\, n^2 - b^2\, m^2)}}{\sqrt{(m^2\, a^4 - m^2\, b^4)}} \text{ folgt.}$$

§. 206. * Beispiel. 1. Soll $m = n$ seyn, so ist $Sin\ \varepsilon = \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$ (Uebereinstimmend mit §. 192.).

2. Es sey $b = \frac{1}{2}\, a$, und es soll $A'' : B'' = 4 : 3$ seyn, so ist

$$Sin\ \varepsilon = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{5}}{\sqrt{15}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

§. 207. Bemerkung. Auf die in §. 183. gefundenen Formeln lässt sich noch eine andere Reihe von Betrachtungen gründen. Wir fanden nämlich dort für alle unter dem Winkel $= \beta$ gegen die Hauptaxe a geneigte Ordinaten den Werth der Ordinate in der Ellipse

$$v = \frac{-\,u\, b^2 \,.\, Cos\ \beta}{a^2 \,.\, Sin^2\, \beta + b^2 \,.\, Cos^2\, \beta} \pm a\, b\, \frac{\sqrt{\{a^2 \,.\, Sin^2\, \beta + b^2 \,.\, Cos^2\, \beta - u^2 \,.\, Sin^2\, \beta\}}}{a^2 \,.\, Sin^2\, \beta + b^2 \,.\, Cos^2\, \beta}$$

und es zeigt sich leicht, dass das Rechteck aus den beiden hierin enthaltenen Werthen $= \frac{-\,b^2\,(a^2 - u^2)}{a^2 \,.\, Sin^2\, \beta + b^2 \,.\, Cos^2\, \beta}$, also allemal dem Producte $(a + u)\,(a - u)$

proportional ist, indem der Coefficient dieser Grösse unveränderlich bleibt, so lange die Sehnen unter demselben Winkel $= \beta$ geneigt bleiben.

Der hierin enthaltene Satz, dass das Rechteck aus beiden Theilen der Sehne zu dem Rechteck aus beiden Stücken, in welche sie die Hauptaxe theilt, ein unveränderliches Verhältniss behalte, so lange β ungeändert bleibt, ist aber noch allgemeiner.

§. 208. **Lehrsatz.** Wenn man gegen irgend einen Durchmesser der Ellipse oder Hyperbel Sehnen unter einander parallel, unter einem willkürlichen Winkel geneigt, zieht, so schneiden der Durchmesser und die Sehnen einander so, dass das Rechteck aus beiden Stücken der Sehne zu dem Rechtecke aus beiden durch sie abgeschnittenen Theilen des Durchmessers ein unveränderliches Verhältniss für alle parallele Sehnen hat (Fig. 57. 58.).

Beweis. Es sey $CP = A$ ein Durchmesser der Ellipse, $CQ = B$ der ihm zugeordnete; nun sey gegen A, unter dem Winkel $HKP = \zeta$, geneigt, eine Sehne gezogen, welche die Ellipse in H und R schneidet. Zieht man nun von H aus die richtig conjugirte Ordinate HL, nennt $CL = x$, $LH = z$, so ist

$z^2 = B'' - \frac{B^2}{A^2} x^2$, und der Conjugationswinkel $HLP = \alpha$ ist aus §. 185.* zu bestimmen. Die Coordinaten x, z werden durch neue Coordinaten $CK = u$, $KH = v$ so ausgedrückt: $x = u + \frac{v \,.\, Sin(\alpha - \zeta)}{Sin\,\alpha}$, und $z = \frac{v \,.\, Sin\,\zeta}{Sin\,\alpha}$,

also $\frac{v^2 . Sin^2 \zeta}{Sin^2 \alpha} = B^2 - \frac{B^2}{A^2} u^2 - \frac{2 B^2}{A^2} \frac{u v . Sin(\alpha - \zeta)}{Sin\,\alpha} - \frac{B^2 v^2}{A^2} . \frac{Sin^2(\alpha - \zeta)}{Sin^2 \alpha}$,

daher $v^2 + \frac{2 u . v . B^2 . Sin\,\alpha . Sin(\alpha - \zeta)}{A^2 . Sin^2 \zeta + B^2 . Sin^2(\alpha - \zeta)} = \frac{B^2 . A^2 . Sin^2 \alpha - B^2 u^2 . Sin^2 \alpha}{A^2 . Sin^2 \zeta + B^2 . Sin^2 (\alpha - \zeta)}$,

also $v = - \frac{u . B^2 . Sin\,\alpha . Sin(\alpha - \zeta)}{A^2 . Sin^2 \zeta + B^2 . Sin^2(\alpha - \zeta)}$

$$\pm \frac{AB . Sin\,\alpha . \sqrt{\{A^2 . Sin^2 \zeta + B^2 . Sin^2(\alpha - \zeta) - u^2 . Sin^2 \zeta\}}}{A^2 . Sin^2 \zeta + B^2 . Sin^2(\alpha - \zeta)}.$$

Für die Hyperbel würde

$$v = + \frac{u . B^2 . Sin\,\alpha . Sin(\alpha - \zeta)}{A^2 . Sin^2 \zeta - B^2 . Sin^2(\alpha - \zeta)}$$

$$\pm \frac{AB . Sin\,\alpha . \sqrt{\{- A^2 . Sin^2 \zeta + B^2 . Sin^2(\alpha - \zeta) + u^2 . Sin^2 \zeta\}}}{A^2 . Sin^2 \zeta - B^2 . Sin^2(\alpha - \zeta)}.$$

Bei der Ellipse also das Rechteck aus beiden Theilen der Sehne

$$= \frac{u^2 B^2 . Sin^2 \alpha - A^2 B^2 . Sin^2 \alpha}{A^2 . Sin^2 \zeta + B^2 . Sin^2(\alpha - \zeta)} = \frac{B^2 . Sin^2 \alpha\,(u - A)(u + A)}{A^2 . Sin^2 \zeta + B^2 . Sin^2(\alpha - \zeta)},$$

oder, wenn v', v'' die beiden Theile der Sehne bedeuten

$$v'.v'' : (u - A)(u + A) = \frac{B^2 . Sin^2\,\alpha}{A^2 . Sin^2\,\zeta + B^2 . Sin^2(\alpha - \zeta)} : 1.$$

Bei der Hyperbel ist, ganz diesem Ausdrucke übereinstimmend, das Verhältniss ein unveränderliches, so lange die Sehnen unter sich parallel bleiben.

§. 209. Bei der Ellipse ist $u - A$ eine negative Grösse, so lange die Theile der Sehne an verschiedenen Seiten des Durchmessers A liegen; hingegen wenn $u > A$ ist, liegen sie beide an derselben Seite des Durchmessers.

Bei der Hyperbel, wo der Ausdruck, wenn A der mögliche Durchmesser ist, in $v'.v'' = \frac{B^2 . Sin^2\,\alpha\,(A - u)\,(A + u)}{A^2 . Sin^2\,\zeta - B^2 . Sin^2(\alpha - \zeta)}$ übergeht, sind zwei Fälle zu unterscheiden. Ist ζ ein solcher Winkel, dass $A . Sin\,\zeta > B . Sin(\alpha - \zeta)$ ist, so erhalten beide Werthe von v gleiche Zeichen, so lange $u < A$ ist, dagegen liegen die Durchschnittspunkte, wie R, H (Fig. 58.), an verschiedenen Seiten der Axe, wenn $u > A$ ist. Im zweiten Falle, wo ζ so klein ist, dass $A . Sin\,\zeta < B . Sin(\alpha - \zeta)$, liegen die Durchschnittspunkte an verschiedenen Seiten der Axe, wie S, T, wenn $u < A$, an einerlei Seite der Axe, wie s, t, wenn $u > A$ ist (Fig. 58.).

§. 209. * Bei der Hyperbel kann der Fall vorkommen, dass v nur einen einzigen Werth erhält, oder dass die Ordinate die Hyperbel nur in einem Punkte schneidet. Ist nämlich $A . Sin\,\zeta = B . Sin(\alpha - \zeta)$, so giebt die §. 208. zur Bestimmung von v hervorgehende quadratische Gleichung, welche

$$v^2\,(A^2 . Sin^2\,\zeta - B^2 . Sin^2(\alpha - \zeta)) - 2\,u\,v . B^2 . Sin\,\alpha . Sin(\alpha - \zeta)$$
$$= B^2 . Sin^2\,\alpha\,(u^2 - A^2) \text{ war,}$$

nun $v = \frac{(A^2 - u^2) . Sin\,\alpha}{2\,u . Sin(\alpha - \zeta)}$, und v wird nicht mehr durch eine quadratische Gleichung, sondern durch eine Gleichung vom ersten Grade bestimmt. Dieser Fall tritt dann ein, wenn die Ordinate mit der Asymptote CU parallel ist (vgl. §. 182.).

§. 210. Lehrsatz. Wenn man (Fig. 64. 65.) in der Ellipse oder Hyperbel irgend eine Linie PQ zieht, welche die Curve in P und Q schneidet und Sehnen ST, UV unter sich parallel, welche jene Linie in R und W treffen, so ist

$$RS . RT : UW . VW = RQ . RP : WQ . WP.$$

Beweis. Es sey CB die Hauptaxe $= a$, und $CO = c$ die Entfernung, in welcher die Linie PQ, unter dem Winkel $QOb = \delta$ in sie einschneidet. Ferner sey RS unter dem Winkel $SRQ = \eta$ gegen PQ geneigt, so lässt sich eine Gleichung zwischen $OR = s$, $RS = t$ finden; denn wenn SZ auf CB senkrecht und $CZ = x$, $ZS = z$ ist, so wird

$$x = c + s . Cos\,\delta + t . Cos(\delta + \eta);$$
$$z = s . Sin\,\delta + t . Sin(\delta + \eta).$$

Da nun S durch $z^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2$ bestimmt wird, wenn S sich auf der Curve befindet, so ist

$$\int \{a^2 . Sin^2 \delta + b^2 . Cos^2 \delta\} + 2 \int t \{a^2 . Sin \delta . Sin (\delta + \eta) + b^2 . Cos \delta . Cos (\delta + \eta)\}$$
$$+ t^2 \{a^2 . Sin^2 (\delta + \eta) + b^2 . Cos^2 (\delta + \eta)\} + 2 b^2 c \int . Cos \delta + 2 b^2 c t . Cos (\delta + \eta)$$
$$+ b^2 c^2 - b^2 a^2 = o.$$

Wenn man diese Gleichung nach den Potenzen von t ordnet, so ist das Glied, welches kein t enthält $= \frac{b^2 (c + \int . Cos \delta)^2 + a^2 (\int^2 . Sin^2 \delta - b^2)}{a^2 . Sin^2 (\delta + \eta) + b^2 . Cos^2 (\delta + \eta)}$ und dieses Glied ist, wie die Theorie der Gleichungen lehrt, gleich dem Producte aus beiden Werthen $= t'$ und $= t''$, die t erhält, oder $= RS . RT$. Es lässt sich aber dieser Werth noch bequemer ausdrücken. Sucht man nämlich den Werth, welchen $\int$ erhält, für $t = o$, so ist dieser aus der vorigen Gleichung durch $\int^2 + \frac{2 b^2 c \int . Cos \delta}{a^2 . Sin^2 \delta + b^2 . Cos^2 \delta} + \frac{b^2 (c^2 - a^2)}{a^2 . Sin^2 \delta + b^2 . Cos^2 \delta} = o$ ausgedrückt, also dieser bestimmte Werth

$$\int = - \frac{b^2 c . Cos \delta}{a^2 . Sin^2 \delta + b^2 . Cos^2 \delta} \pm \frac{\sqrt{a^2 . b^2 \{b^2 . Cos^2 \delta + (a^2 - c^2) Sin^2 \delta\}}}{a^2 . Sin^2 \delta + b^2 . Cos^2 \delta}.$$

Diese beiden Werthe geben

$$OQ = \frac{- b^2 c . Cos \delta + a b \sqrt{\{b^2 . Cos^2 \delta + (a^2 - c^2) . Sin^2 \delta\}}}{a^2 . Sin^2 \delta + b^2 . Cos^2 \delta},$$
$$OP = \frac{- [b^2 c . Cos \delta + a b \sqrt{\{b^2 . Cos^2 \delta + (a^2 - c^2) . Sin^2 \delta\}}]}{a^2 . Sin^2 \delta + b^2 . Cos^2 \delta}.$$

Ganz allgemein ist also, wenn man bloss auf die Grösse, nicht auf die Lage sieht,

$$(OQ - \int)(OP - \int) = \frac{\int^2 (a^2 . Sin^2 \delta + b^2 . Cos^2 \delta) + 2 \int b^2 c . Cos \delta + b^2 (c^2 - a^2)}{a^2 . Sin^2 \delta + b^2 . Cos^2 \delta}.$$

Zufolge der obigen Bestimmung war aber

$$RS . RT = \frac{b^2 (c + \int . Cos \delta)^2 + a^2 (\int^2 . Sin^2 \delta - b^2)}{a^2 . Sin^2 (\delta + \eta) + b^2 . Cos^2 (\delta + \eta)},$$

also $RS . RT \quad \frac{(OQ - \int)(OP + \int)(a^2 . Sin^2 \delta + b^2 . Cos^2 \delta)}{a^2 . Sin^2 (\delta + \eta) + b^2 . Cos^2 (\delta + \eta)}$,

das ist $RS . RT = \frac{RQ . RP . (a^2 . Sin^2 \delta + b^2 . Cos^2 \delta)}{a^2 . Sin^2 (\delta + \eta) + b^2 . Cos^2 (\delta + \eta)}$.

Da eben so für die mit ST parallele Sehne UV,

$UW . WV = QW . WP . \frac{(a^2 . Sin^2 \delta + b^2 . Cos^2 \delta)}{a^2 . Sin^2 (\delta + \eta) + b^2 . Cos^2 (\delta + \eta)}$ ist, so folgt

$$RS . RT : UW . WV = RQ . RP : WQ . WP.$$

Diese Rechnung ist für die Ellipse geführt, sie würde aber für die Hyperbel ganz eben so zu führen seyn, und ganz übereinstimmende Resultate geben, weshalb ich sie nicht in Beziehung auf die Hyperbel wiederhole.

§. 211. Hieraus folgt leicht ein andrer Lehrsatz: Wenn zwei parallele Sehnen DE, FG der Ellipse oder Hyperbel (Fig. 64. 65.) von zwei andern parallelen Sehnen IH, KL so geschnitten werden, dass M der Durchschnittspunkt der ersten und dritten, und N der Durchschnittspunkt der zweiten und vierten ist, so hat man:

$$DM \cdot ME : IM \cdot MH = FN \cdot NG : KN \cdot NL.$$

Denn wenn man sich eine durch MN gezogne Linie denkt, so findet für jedes Paar paralleler Sehnen die Betrachtung in §. 210. ihre Anwendung.

§. 212. Lehrsatz. Wenn man (Fig. 66. 67.) in der Ellipse oder Hyperbel zwei parallele Sehnen AB, ED zieht, und ihre Endpunkte durch gerade Linien BD, AE verbindet, so schneidet jede mit jenen Sehnen parallele Linie FI die krumme Linie und die Sehnen BD, AE so, dass das zwischen der Sehne und Curve enthaltene Stück an beiden Seiten gleich ist, nämlich $FG = HI$.

Beweis. Zieht man nämlich den den parallelen Sehnen AB, DE zugeordneten Durchmesser CM, so halbirt dieser auch die mit ihnen parallele Linie FI, so dass $FL = IL$ ist. Da nun auch aus $KD = KE$, $BN = AN$ folgt, dass $GL = HL$ sey, so ist $FG = IH$.

§. 213. Bei der Hyperbel könnten die beiden parallelen Sehnen auch so wie BO, AQ gezogen und das Viereck $BOQA$ vollendet seyn; dann würde, weil der Durchmesser VW alle mit BO parallele Sehnen halbirt, eben so gezeigt, dass das zwischen Sehne und Curve liegende Stück, welches am einen und andern Ende abgeschnitten wird, gleich $ST = ZR$ sey.

Es erhellt hieraus leicht, dass die Abschnitte der elliptischen oder hyperbolischen Fläche, wie BFD, AIE oder auch MEA und OSQ einander gleich sind.

Von der Tangente und der Normallinie der Ellipse und Hyperbel.

§. 214. Bemerkung. Wenn wir (§. 183. Fig. 57. 58.) Sehnen der Ellipse oder Hyperbel unter einem willkürlichen Winkel $= \beta$ gegen die Hauptaxe a geneigt zogen, so ergab sich für die von der Hauptaxe an gerechneten Theile dieser Sehne im Allgemeinen ein doppelter Werth, der bei der Ellipse durch $v = \dfrac{-ub^2 . Cos\beta \pm ab\sqrt{\{a^2 . Sin^2\beta + b^2 . Cos^2\beta - u^2 . Sin^2\beta\}}}{a^2 . Sin^2\beta + b^2 . Cos^2\beta}$;

bei der Hyperbel durch

$$v = \frac{ub^2 . Cos\beta \pm ab\sqrt{\{-a^2 . Sin^2\beta + b^2 . Cos^2\beta + u^2 . Sin^2\beta\}}}{a^2 . Sin^2\beta - b^2 . Cos^2\beta}$$ angege-

ben wurde. Das irrationale Glied drückte hier die halbe Sehne aus, und es verdient der Fall, wo diese verschwindet, noch eine genauere Betrachtung.

Soll dieses statt finden, so muss bei der Ellipse

$$u'^2 = a^2 + b^2 . Cotang^2 \beta.$$

$$v' = \frac{- u' b^2 . Cos \beta}{a^2 . Sin^2 \beta + b^2 . Cos^2 \beta};$$

bei der Hyperbel $u'^2 = a^2 - b^2 . Cotang^2 \beta$,

$$v' = \frac{+ b^2 u' . Cos \beta}{a^2 . Sin^2 \beta - b^2 . Cos^2 \beta}$$ seyn; u und v sind hier als bestimmte Werthe durch u', v' ausgezeichnet.

§. 214. * Da wo die Sehne verschwindet, wird offenbar die schneidende Linie zur Berührungslinie, und die eben angegebnen Bestimmungen lehren uns die Lage der Tangente kennen. Es liesse sich auch zeigen, dass durch den Punkt der Ellipse oder Hyperbel, welcher durch u', v' bestimmt ist, keine andre gerade Linie, ausser der unter dem Winkel $= \beta$ gegen die Hauptaxe geneigten, gezogen werden kann, die nur in diesem einen Punkte die krumme Linie träfe; jede andre durch eben den Punkt gehende gerade Linie würde die Ellipse oder Hyperbel zweimal schneiden.

§. 215. Die eben in Beziehung auf die Hauptaxen betrachtete Bestimmung für die Lage der Tangente findet auf eine ganz ähnliche Weise für jede zwei einander zugeordnete Durchmesser statt. Ist nämlich α der Conjugationswinkel, und eine Sehne ist unter dem Winkel $= \zeta$ gegen den einen Durchmesser $= A$ geneigt, so wird (nach §. 208.) die Sehne zur Tangente, wenn bei der Ellipse $u'^2 = A^2 + B^2 . \frac{Sin^2 (\alpha - \zeta)}{Sin^2 \zeta}$,

$$\text{und } v' = \frac{- u' . B^2 . Sin\, \alpha . Sin (\alpha - \zeta)}{A^2 . Sin^2 \zeta + B^2 . Sin^2 (\alpha - \zeta)},$$

und bei der Hyperbel $u'^2 = A^2 - B^2 . \frac{Sin^2 (\alpha - \zeta)}{Sin^2 \zeta}$.

$$v' = \frac{+ u' . B^2 . Sin\, \alpha . Sin (\alpha - \zeta)}{A^2 . Sin^2 \zeta - B^2 . Sin^2 (\alpha - \zeta)}$$ ist.

§. 216. **Lehrsatz.** Wenn an irgend einen Punkt A der Ellipse oder Hyperbel (Fig. 68. 69.) eine Tangente AE gezogen wird, welche irgend einen Durchmesser CB in E schneidet; wenn alsdann von eben jenem Punkte A eine dem Durchmesser CB richtig Zugeordnete AD gezogen wird, so liegen die Durchschnittspunkte des Durchmessers mit der Ordinate des Berührungspunktes, und mit der Berührungslinie so, dass

$CD : CB = CB : CE$ ist; oder der halbe Durchmesser ist die mittlere Proportionallinie zwischen den Abständen der Einschnittspunkte der Ordinate und der Tangente vom Mittelpunkte.

Beweis. Wenn $ADE = \alpha$, $AED = 180^\circ - \zeta$ ist, so war (§. 208. 215.) bei der Ellipse $u' = CE = \frac{\sqrt{\{A^2 . Sin^2 \zeta + B^2 . Sin^2 (\alpha - \zeta)\}}}{Sin \zeta}$,

u. $v' = EA = \frac{-u' . B^2 \; Sin \alpha . Sin (\alpha - \zeta)}{A^2 . Sin^2 \zeta + B^2 . Sin^2 (\alpha - \zeta)} = \frac{- B^2 . Sin \alpha . Sin (\alpha - \zeta)}{Sin \zeta . \sqrt{\{A^2 . Sin^2 \zeta + B^2 . Sin^2 (\alpha - \zeta)\}}}$,

$$DE = \frac{v' . Sin (\zeta - \alpha)}{Sin \alpha} = \frac{B^2 . Sin^2 (\alpha - \zeta)}{Sin \zeta . \sqrt{\{A^2 . Sin^2 \zeta + B^2 . Sin^2 (\alpha - \zeta)\}}},$$

also $CD = CE - DE = \frac{A^2 . Sin \zeta}{\sqrt{(A^2 . Sin^2 \zeta + B^2 . Sin^2 (\alpha - \zeta))}} = \frac{A^2}{u'}$,

oder $CD : A = A : u'$.

Auch bei der Hyperbel war (Fig. 69.)

$$v' = \frac{u' . B^2 . Sin \alpha . Sin (\alpha - \zeta)}{A^2 . Sin^2 \zeta - B^2 . Sin^2 (\alpha - \zeta)} \text{ und } u' = \frac{\sqrt{\{A^2 . Sin^2 \zeta - B^2 . Sin^2 (\alpha - \zeta)\}}}{Sin \zeta},$$

$$ED = \frac{v' . Sin (\alpha - \zeta)}{Sin \alpha} = \frac{u' \; B^2 . Sin^2 (\alpha - \zeta)}{A^2 . Sin^2 \zeta - B^2 . Sin^2 (\alpha - \zeta)};$$

$$CD = u' + ED = u' \left\{ \frac{A^2 . Sin^2 \zeta}{A^2 . Sin^2 \zeta - B^2 . Sin^2 (\alpha - \zeta)} \right\} = \frac{A^2}{u'}.$$

§. 216. * Bei der Hyperbel fände noch eben eine solche Bestimmung statt, wenn man auch den Einschnitt der Tangente und Ordinate auf dem unbegrenzten Durchmesser betrachtete. Es ist nämlich, wenn $Cb = B$, die dem conjugirten Durchmesser zukommende Länge vorstellt, $Cg = \frac{B^2}{Ch}$, oder

$$Cg : Cb = Cb : Ch,$$

wenn AZ die von diesem Durchmesser halbirte Sehne ist.

§. 217. Lehrsatz. Nimmt man sowohl von dem Durchschnittspunkte der Ordinate D als dem der Tangente E mit dem Durchmesser die Entfernungen bis zu beiden Endpunkten B, F des Durchmessers, so ist auch $DB : DF = EB : EF$ (Fig. 68. 69.).

Beweis. Es sey $CD = x$, so war

$x : A = A : u'$; also auch $A - x : A + x = u' - A : u' + A$.

Bei der Hyperbel müsste man $x - A : A + x = A - u' : A + u'$ setzen.

§. 218. Lehrsatz. Es ist auch $CD . DE : DA^2 = A^2 : B^2$.

Beweis. Da $DA^2 = B^2 - \frac{B^2}{A^2} x^2$, oder weil

$$CD = x = \frac{A^2}{u'} \text{ ist, } DA^2 = B^2 - \frac{B^2 \; A^2}{u'^2} = \frac{B^2 (u'^2 - A^2)}{u'^2},$$

und $DE = u' - x = \frac{u'^2 - A^2}{u'}$, so ist $CD . DE = \frac{A^2 (u'^2 - A^2)}{u'^2}$.

§. 218. Lehrsatz. Auch $DE \cdot CE = FE \cdot BE$.

Beweis. $CE = u'$; $DE = (u' - x)$; $FE = A + u'$; $BE = u' - A$; und in der That ist $u'(u' - x) = u'^2 - A^2$.

§. 219. Lehrsatz. Auch ist $FD \cdot DB = CD \cdot DE$.

Beweis. $FD \cdot DB = (A^2 - x^2) = \frac{A^2 (u'^2 - A^2)}{u'^2}$ und

$$CD \cdot DE = \frac{A^2}{u'} \left(\frac{u'^2 - A^2}{u'}\right).$$

Bei der Hyperbel werden die Beweise ganz eben so nur mit Veränderung der Zeichen, weil $u' < A$ und $x > A$ ist, geführt.

§. 220. Lehrsatz. Wenn zwei Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel BE, DE (Fig. 72. 73.) einander in E schneiden, so wird der durch E gezogene Durchmesser die zwischen den Berührungspunkten jener, B, D, gezogne Sehne halbiren.

Beweis. Wäre dies nicht der Fall, so wäre nicht DB die dem Durchmesser CR richtig zugeordnete Sehne, und man könnte von B und D aus andre diesem Durchmesser richtig Zugeordnete DT, BS ziehen. Dann aber müsste zugleich (§. 216.) $CT : CR = CR : CE$ und auch $CS : CR = CR : CE$ seyn, welches nur möglich ist, wenn T mit S zusammen fällt.

§. 221. Bei der Hyperbel gilt diess auch dann, wenn die Berührungspunkte in den beiden von einander getrennten Theilen der Hyperbel liegen. Sind (Fig. 75.) DE, BE zwei solche Tangenten, und verstehe ich unter B die Grösse der Linie, deren negatives Quadrat als Quadrat des den Sehnen BD zugeordneten Durchmessers vorkömmt, so ist, wenn EQ diesen Durchmesser und BQ die richtig Zugeordnete vorstellt, $CQ : B = B : CE$ (§. 216.*) und auch hier muss also die von D aus gezogne richtig zugeordnete in eben den Punkt Q des Durchmessers treffen.

Dieser Punkt Q ist wiederum der Durchschnittspunkt derjenigen beiden Tangenten, welche in den Endpunkten einer durch E mit DB parallel gezognen Sehne GF berühren. Da diese Sehne mit DB parallel ist, so ist sie dem Durchmesser CE richtig zugeordnet, und für die Tangente, die an ihrem Endpunkte die Hyperbel berührt, verhält sich die Abscisse CE zu B, wie B zur Entfernung des Einschnitts der Tangente; es war aber $CE : B = B : CQ$, also ist Q der Einschnittspunkt der einen, und aus ganz gleichen Gründen auch der andern Tangente, nämlich der FQ und GQ.

§. 222. Lehrsatz. Wenn M, N die beiden Brennpunkte der Ellipse oder Hyperbel sind (Fig. 68. 69.), und G der Punkt, wo die an A gezogne Tangente in die grosse Hauptaxe einschneidet, so ist

$$NA : MA = NG : MG.$$

Beweis. Zieht man vom Berührungspunkte A die Ordinate AH senkrecht auf die Hauptaxe und nennt $CH = x$, so ist bekanntlich

$$z^2 = HA^2 = \frac{b^2}{a^2}(\alpha^2 - x^2) \text{ bei der Ellipse,}$$

$$\text{und } = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \text{ bei der Hyperbel,}$$

also $AM^2 = (\sqrt{(a^2 - b^2)} - x)^2 + z^2 = a^2 - 2x\,(a^2 - b^2) + \frac{(a^2 - b^2)}{a^2}\,x^2$,

das ist $AM = a - \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}\,x}{a}$, und eben so

$AN = a + \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}\,x}{a}$, bei der Ellipse, und hingegen bei der Hyperbel $AM = -a + \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}\,x}{a}$,

$$AN = a + \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}\,x}{a}.$$

Zugleich aber ist $CG = u' = \frac{a^2}{x}$ und $MG = \frac{a^2}{x} - \sqrt{(a^2 - b^2)}$,

$NG = \frac{a^2}{x} + \sqrt{(a^2 - b^2)}$ bei der Ellipse, und bei der Hyperbel

$$MG = \frac{-a^2}{x} + \sqrt{(a^2 + b^2)};\quad NG = \frac{a^2}{x} + \sqrt{(a^2 - b^2)},$$

also $MG = AM \cdot \frac{a}{x}$ und $NG = AN \cdot \frac{a}{x}$.

§. 223. Lehrsatz. Die Winkel, welche durch die von beiden Brennpunkten aus an den Berührungspunkt gezognen geraden Linien mit der Tangente gebildet werden, sind gleich, nämlich bei der Ellipse $NAI = MAG$, bei der Hyperbel $MAG = NAG$ (Fig. 68. 69.).

Beweis. Da für beide Curven $\sin NAG : \sin NGA = NG : NA$,
$\sin MAG : \sin MGA = MG : MA$,
und zugleich $NG : NA = MG : MA$ (§. 222.), so ist
$\sin NAG : \sin NGA = \sin MAG : \sin NGA$,
das ist $\sin NAG = \sin MAG$, daher bei der Hyperbel $NAG = MAG$, bei der Ellipse $NAG = 180° - MAG$.

§. 224. Da diess für alle Punkte in der Curve statt findet, so würden in der Ellipse alle von einem Brennpunkte ausgehende und von einem elliptischen Spiegel zurück geworfne Lichtstrahlen im andern Brennpunkte vereinigt werden. Bei der Hyperbel findet diess nicht statt, weil die gleichen Winkel an verschiedenen Seiten der Curve liegen.

§. 225. Hieraus folgt: Wenn man bei der Hyperbel auf dem Radius *AN* selbst, bei der Ellipse auf der Verlängerung der *AN*, $Am = AM$ aufträgt und *Mm* zieht, so ist *AMm* ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis durch die Tangente *AE* senkrecht halbirt wird.

§. 225. Aufgabe. An den gegebnen Punkt *A* der Ellipse oder Hyperbel eine Tangente zu ziehen.

Erste Auflösung. Man zieht von *A* aus gegen irgend einen Durchmesser *CB* die richtig Zugeordnete *AD*, nimmt dann *CE* so, dass $CD : CB = CB : CE$ sey, so ist die durch *A* und *E* gezogne Linie eine Tangente (§. 216.).

Zweite Auflösung. Man zieht die Linie *AM*, *AN* nach beiden Brennpunkten und halbirt bei der Hyperbel den Winkel *NAM* selbst, bei der Ellipse seinen Nebenwinkel *mAM*, so ist die Halbirungslinie die verlangte Tangente (§. 223.).

§. 226. Aufgabe. Für die Ellipse und Hyperbel die Subtangente auf der Hauptaxe und das zwischen der Hauptaxe und dem Berührungspunkte abgeschnittene Stück *AG* der Tangente zu finden (Fig. 68. 69.).

Auflösung. Da $CG = \frac{a^2}{x}$ war (§. 216.), so ist die Subtangente

$HG = \frac{a^2 - x^2}{x} = \frac{a^2 z^2}{b^2 x}$, weil die Ordinate $z = \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}$ ist; ferner wird $AG^2 = \frac{z^2 (b^4 x^2 + a^4 z^2)}{b^4 x^2}$.

Für die Hyperbel ist $HG = \frac{x^2 - a^2}{x} = \frac{a^2 z^2}{b^2 x}$.

Auch ist $Sin\, AGH = \frac{b^2 x}{\sqrt{(b^4 x^2 + a^4 z^2)}}$.

§. 227. Der Ausdruck für die Subtangente hängt weder von *b*, noch von *z* ab. Sind also über einerlei Hauptaxe *AB* (Fig. 71.) mehrere Ellipsen oder auch ein Kreis vom Halbmesser $= a$ gezeichnet, so treffen alle die Tangenten *DF*, *EF*, deren Berührungspunkte in derselben Senkrechten *DE* liegen, in einerlei Punkte *F* die Axe.

Eben das würde von ungleichen Hyperbeln gelten, die einerlei mögliche Axen haben.

§. 228. Lehrsatz. Wenn man auf eine Tangente *EA* der Ellipse oder Hyperbel eine Senkrechte *MP* vom einen Brennpunkte aus zieht, so ist der Abstand *CP* des Einschnittspunktes *P* dieser Senkrechten in die Tangente vom Mittelpunkte, gleich der halben grossen Hauptaxe, $CP = a$; und *CP* ist mit *NA* parallel (Fig. 68. 69.).

Beweis. Da bei der Ellipse $MG = \frac{a^2}{x} - \surd(a^2 - b^2)$ und $MP = MG \,.\, Sin\, AGH = MG \,.\, Cos\, PMG = - MG \,.\, Cos\, CMP$, so wird

$$CP^2 = CM^2 + MP^2 - 2 . CM . MP . Cos\, CMP = CM^2 + MG(MG + 2.CM) Sin^2 AGH$$
$$= CM^2 + MG \,.\, NG \,.\, Sin^2\, AGH,$$

also $CP^2 = CM^2 + (CG + CM)(CG - CM) \,.\, Sin^2\, AGH$

$$= CM^2 . Cos^2\, AGH + CG^2 . Sin^2\, AGH = \frac{(a^2 - b^2)\, a^4 z^2 + a^4 b^4}{b^4 x^2 + a^4 z^2} = a^2.$$

Hieraus erhellt nun aber auch, dass $GC : GN = CP : NA$ ist, indem, wenn man die schon bekannten Werthe für alle diese Grössen setzt (§. 216. 220.),

$$\frac{a^2}{x} : \frac{a^2}{x} + (a^2 - b^2) = a : a + \frac{x \surd(a^2 - b^2)}{a}, \text{ wird,}$$

also ist CP mit NA parallel.

Für die Hyperbel lässt sich der Beweis ganz eben so mit gehörig veränderten Zeichen führen.

§. 229. Zieht man auch aus dem andern Brennpunkte N die Senkrechte NQ auf die Tangente an A, so ist auch $CQ = a$, indem

$$NQ = \frac{MP \,.\, (CG + CM)}{CG - CM} = NG \,.\, Sin\, AGH,$$

und
$$CQ^2 = CN^2 + NQ^2 - 2\, CN \,.\, NQ \,.\, Cos\, QNC$$
$$= CM^2 + NG \,.\, Sin^2\, AGH\, (NG - 2\, CN)$$
$$= CM^2 . Cos^2\, AGH + CG^2 . Sin^2\, AGH, \text{ wie vorhin,}$$

weil $Cos\, QNC = Sin\, AGH;\; NG = CN + CG;\; NG - 2\,CN = CG - CN$ ist.

Es folgt hieraus auch leicht, dass die verlängerte Senkrechte MP von NA in m so geschnitten wird, dass $Nm = 2a$ ist; denn $mP = MP$ (nach §. 225.) und $NC = MC$, also $Nm = 2 \,.\, CP$.

Das giebt eine Methode, um, wenn der eine Brennpunkt M der Ellipse oder Hyperbel und zugleich ihre grosse Hauptaxe ihrer Grösse nach gegeben ist, diese Curven selbst so zu bestimmen, dass AG (Fig. 68. 69.) eine Tangente sey, und die Curve zugleich durch den gegebnen Punkt B gehe. Da nämlich der Abstand des unbekannten Brennpunkts N von $B = 2a - BM$, und der Abstand des unbekannten Brennpunktes von m, (wenn MP senkrecht auf die Tangente und $mP = MP$ ist) $= 2a$ ist, so findet sich N vermittelst des Durchschnittes zweier um B und m mit jenen Halbmessern beschriebener Kreise.

§. 230. **Aufgabe.** Durch einen Punkt Q ausser der Curve eine Tangente an die Ellipse oder Hyperbel zu ziehen (Fig. 70.).

Auflösung. Um den Mittelpunkt C der Curve ziehe man mit dem Halbmesser $CB = a =$ der halben grossen Hauptaxe einen Kreis BST; alsdann

ziehe man von dem gegebnen Punkte Q eine gerade Linie QP nach dem einen Brennpunkte und über QP als Durchmesser den Halbkreis QSP. Zieht man nun durch Q und einen der beiden Durchschnittspunkte S, T der eben genannten Kreise die geraden Linien TQ, SQ, so sind diese Tangenten der Ellipse oder Hyperbel.

Denn $QSP = QTP =$ einem rechten Winkel, $CS = CT = a$.

Es lässt sich aber leicht zeigen, dass jede Linie QS, welche von einer aus dem Brennpunkte auf sie gezognen Senkrechten in S so geschnitten wird, dass $CS = a$ ist, eine Tangente ist; denn berührte sie nicht, so liesse sich durch S eine andre berührende ziehn, die offenbar jene Eigenschaft, die der Tangente zukommen muss, nicht hätte.

§. 231. Man könnte auch dadurch die durch Q gehende Tangente bestimmen, dass man vom Mittelpunkte C die Linie CQ zöge, sie in U so theilte, dass $CQ : CV = CV : CU$ ist und dann die richtig zugeordnete VW zöge, dann wäre W der Berührungspunkt. Bei der Hyperbel könnte man eben so verfahren, doch müsste man da die Länge der Axe, die sich nicht durch den Einschnitt in die Hyperbel begrenzt, erst noch auftragen (vgl. §. 216. 217.).

§. 232. Aufgabe. Die Subnormallinie und die Normallinie der Ellipse und Hyperbel in Beziehung auf die Hauptaxe zu bestimmen.

Auflösung. (Fig. 68. 69.) Die Normallinie ist für die Ellipse

$$AR = AG \,.\, tang\, AGH = \sqrt{\left\{\frac{b^4 x^2 + a^4 z^2}{a^4}\right\}};$$ die Subnormallinie

$$RH = \frac{z^2}{HG} = \frac{b^2 x}{a^2}$$ (§. 226.), oder da $\frac{b^2}{a} = \frac{1}{2} p$ ist,

$$RH = \frac{p x}{2 a},$$ die vierte Proportionallinie zu $2a$, p und x.

In der Hyperbel werden diese Ausdrücke eben so, nur würde, wenn man statt $+ b^2$ setzt $- b^2$, das Zeichen der Subnormallinie, so wie in §. 226. das Zeichen der Subtangente das entgegen gesetzte, weil die Subtangente bei der Ellipse so liegt, dass sie sich den Abscissen, als sie vergrössernd, anfügt, statt dass sie bei der Hyperbel sich auf den Abscissen, als sie vermindernd, abschneidet. Mit der Subnormallinie tritt der entgegen gesetzte Fall ein.

§ 233. Bei der gleichseitigen Hyperbel ist, so wie beim Kreise, die Subnormallinie $= x$, die Normallinie $= \sqrt{(x^2 - z^2)}$. Die letztere wird beim Kreise $= a$, bei der gleichseitigen Hyperbel $= \sqrt{(2x^2 - a^2)}$.

§. 234. Lehrsatz. Wenn man (Fig. 72. 73.) an die Ellipse oder Hyperbel eine Tangente am Punkte D zieht, welche irgend einen Durchmesser CB in H schneidet; wenn man ferner durch D den Durchmesser DI und durch dessen Endpunkt und den Endpunkt B jenes Durchmessers die Linie IB zieht,

welche in K die dem Durchmesser CB richtig Zugeordnete, in L die Tangente trifft, so ist $BK = BL$.

Beweis. Wenn $DGH = \alpha$, $GD = z$, $GH = u - x$, $CB = A$ ist, weil IB mit AD parallel, so ist $KB = \left(\frac{A - x}{A + x}\right) AD$, aber auch $BL = \frac{(u - A)}{u + A} AD$, und (nach §. 217.) $\frac{A - x}{A + x} = \frac{u - A}{u + A}$.

Für die Hyperbel ist der Beweis eben so zu führen, nur ist da $GH = x - u$, $HB = A - u$, $BG = x - A$.

§. 235. Lehrsatz. Wenn CB, CP zwei conjugirte Durchmesser der Ellipse sind (Fig. 72.), die von der Tangente an D in H und M geschnitten werden, und man zieht den halben Durchmesser CN mit der Tangente HD parallel, so ist

$$DH : CN = CN : DM.$$

Beweis. Wenn in §. 208. $CB = A$, $CP = B$, $DHB = 180° - \zeta$, $CH = u$, $HD = v$ ist, so wird für den Fall, da die Ordinate zur Tangente wird, $HD = \frac{+ u B^2 . Sin\, \alpha\, . Sin\, (\zeta - \alpha)}{A^2 . Sin^2 \zeta + B^2 . Sin^2 (\alpha - \zeta)}$,

oder weil u alsdann $= \frac{\sqrt{\{A^2 . Sin^2 \zeta + B^2 . Sin^2 (\alpha - \zeta)\}}}{Sin\, \zeta} = CH$ ist,

$$HD = - \frac{B^2 . Sin\, \alpha\, . Sin\, (\alpha - \zeta)}{Sin\, \zeta\, . \sqrt{\{A^2 . Sin^2 \zeta + B^2 . Sin^2 (\alpha - \zeta)\}}}.$$

Dagegen ist CN der Werth, den eben dort v erhält für $u = o$, also

$CN = \frac{A . B . Sin\, \alpha}{\sqrt{\{A^2 . Sin^2 \zeta + B^2 . Sin^2 (\alpha - \zeta)\}}}$. Da nun endlich

$HM = \frac{HC . Sin\, \alpha}{Sin\, (\zeta - \alpha)}$; $DM = HM - HD$ ist, so wird

$DM = \frac{A^2 . Sin\, \zeta\, . Sin\, \alpha}{Sin\, (\zeta - \alpha) \sqrt{\{A^2 . Sin^2 \zeta + B^2 . Sin^2 (\zeta - \alpha)\}}}$, woraus die Richtigkeit des Satzes erhellt.

§. 237. Lehrsatz. Wenn (Fig. 74.) A, B die Endpunkte zweier conjugirter Durchmesser der Ellipse sind, und man zieht an diese Punkte Tangenten, welche ein andres Paar conjugirter Durchmesser in D, E, FG, schneiden, so werden die Linien DE, FG in den Berührungspunkten so getheilt, dass

$$EA : AD = BG : BF.$$

Beweis. Nach §. 235. ist, da hier CB mit ED, und CA mit FG parallel, $AE : BC = BC : DA$,

und $BF : AC = AC : BG$,

also $AE . BF : BC . AC = BC . AC : DA . BG$.

Zugleich aber ist wegen Aehnlichkeit der Dreiecke $EA : AC = BC : FB$, also $EA . BF = AC . BC = AD . BG$.

§. 238. Daher auch $BC : AC = ED : GF$, weil wegen der parallelen Seiten die Dreiecke $EAC \backsim CBF$ und $CAD \backsim GBC$, und daher

$EA : AC = BC : BF$,

$AD : AC = BC : BG$, also

$$EA + AD = ED = AC . BC . \left(\frac{BF + BG}{BF . BG}\right) = \frac{AC . BC . FG}{BF . BG},$$

woraus, weil (§. 235.) $BF . BG = CA^2$, folgt $ED : FG = BC : AC$.

§. 240. Lehrsatz. Wenn die an den Endpunkten A, B, eines Durchmessers der Ellipse oder Hyperbel gezogenen Tangenten AF, BE von einer dritten Tangente, FH, welche in D berührt, in F, E geschnitten werden, so ist das Rechteck aus den beiden Stücken der Tangenten $AF . BE$ gleich dem Quadrate des dem AB zugeordneten halben Durchmessers (Fig. 76.).

Beweis. Da, wenn ich bei der Ellipse die dem Berührungspunkte D zugehörige Abscisse auf dem Durchmesser AB, $CG = x$, die dem conjugirten Durchmesser und den Tangenten AF, BE parallele Ordinate $GD = z$ und $CH = u$ nenne, $BE = \frac{(u - A) . z}{u - x}$; $AF = \frac{(u + A) . z}{(u - x)}$, so ist

$$AF . BE = \frac{(u^2 - A^2) . z^2}{(u - x)^2},$$ also da $z^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2)$, und

(§. 216.) $u = \frac{A^2}{x}$, $(u^2 - A^2) . z^2 = \frac{B^2}{x^2}(A^2 - x^2)^2$, $(u - x)^2 = \frac{(A^2 - x^2)^2}{x^2}$, so ist $AF . BE = B^2 = CP^2$, wenn CP der dem Durchmesser AB zugeordnete halbe Durchmesser ist.

§. 241. Werden also (Fig. 76.) jene an den Endpunkten des Durchmessers gezogne Tangenten AF, BE, von zwei andern Tangenten RQ, FE in R, Q von der ersten, in F, E von der andern geschnitten, so ist nun zugleich $AF . BE = B^2$ und $AR . BQ = B^2$; folglich stehen die auf derselben Tangente abgeschnittenen Stücke im umgekehrten Verhältnisse $AF : AR = BQ : BE$, und daraus folgt auch $FR : AR = EQ : BE$, und wegen der ähnlichen Dreiecke FRS, ESQ,

$FS : ES = AR : EB = AF : BQ$.

§. 242. Lehrsatz. Wenn die an beiden Endpunkten A, B, eines Durchmessers gezognen Tangenten von zwei andern Tangenten von der ersten in F, E, von der zweiten in R, Q geschnitten werden, so treffen die beiden durch RE, und durch FQ gezognen geraden Linien jene Axe in einem und demselben Punkte T (Fig. 76.).

Beweis. Sucht man die Entfernung $CT = w$ für den Einschnittspunkt der durch FQ gehenden Linie, so ist $(w - A) : (w + A) = BQ : AF$; zugleich

aber ist, wenn ich für den Einschnittspunkt der RE die Entfernung $CT = w'$ nenne, $(w' - A) : w' + A = BE : AR$, also (§. 241.)

$$w - A : w + A = w' - A : w' + A, \text{ das ist } w = w'.$$

§. 243. Hieraus erhellt auch leicht, dass die durch C mit den Tangenten BE, AF parallel gezogne Linie CU die beiden Linien ER, FQ halbirt, und umgekehrt, dass die durch die Halbirungspunkte U, V beider gezogne Linie UC durch den Mittelpunkt der Ellipse oder Hyperbel geht.

§. 244. Lehrsatz. Wenn man an der Ellipse oder Hyperbel (Fig. 77.) zwei willkürliche Tangenten BI, DI zieht, und sodann zwei andre Tangenten EQ, eq, welche jene in E, Q und in e, q schneiden, so geht diejenige Linie, welche die Verbindungslinie Eq, eQ zwischen den Endpunkten beider in U, S halbirt, durch den Mittelpunkt W.

Beweis. Man ziehe von dem Berührungspunkte B der ersten Tangente den Durchmesser BA, und an dessen anderm Endpunkte die Tangente AF, welche in M die Tangente DI, in F die Tangente FQ, in f die Tangente eq schneidet. Aus dem Vorigen ist bekannt, dass hier $BQ : BI = AM : AF$

$Bq : BI = AM : Af$ sey.

Daraus aber folgt $BQ : IQ = AM : FM$,

$Bq : Iq = AM : fM$.

Aber weil die Dreiecke $IEQ \backsim MEF$, und $Ieq \backsim Mef$, ist auch

$IQ : IE = FM : EM$,

also da wir fanden $BQ : IQ = AM : FM$,

auch $BQ : IE = AM : EM$,

und eben so $Bq : Ie = AM : eM$;

oder da $AM = BK$, wenn MK durch den Mittelpunkt geht, so ist

$BQ : IE = BK : EM$,

und $BQ + BK : BK = IE + EM : EM$,

oder $QK : BK = MI : EM$,

und eben so $qK : BK = MI : eM$,

also $QK \,.\, EM = qK \,.\, eM$,

und folglich $QK : qK = eM : EM$.

Hieraus aber ergiebt sich, wenn man die Endpunkte E, q und e, Q verbindet, dass die Linie, welche Eq und eQ halbirt, auch MK halbirt und folglich durch den Mittelpunkt W geht.

Diess letztere wird so erwiesen. (Fig. 78.) Es sey auf MI, KI, so wie wir eben fanden, $Me : ME = KQ : Kq$, und nun MK in W, Eq in T halbirt und TW gezogen, welche MI irgendwo in Z schneide, so wird, wenn man EX, qY beide mit TW parallel zieht, $ea = \frac{Ee \,.\, Sin\, eEa}{Sin\, Eae}$;

$$Qb = \frac{Qq \,.\, Sin\, bqQ}{Sin\, Qbq} = \frac{Qq \,.\, Sin\, bqQ}{Sin\, Eae}, \text{ weil } Eae = qbe.$$

Aber es ist $Sin\ eEa = \frac{MX}{EM} . Sin\ EXM$, und $Sin\ bqQ = \frac{YK}{qK} . Sin\ qYK$, oder weil $WM = WK$, $TE = q$, und daher $XW = YW$, und $MX = KY$ auch $Sin\ qYK = Sin\ EXM$, ist $Sin\ bqQ = \frac{MX}{qK} . Sin\ EXM$; folglich

$ea = \frac{Ee . MX . Sin\ EXM}{EM . Sin\ Eae}$, $Qb = \frac{Qq . MX . Sin\ EXM}{qK . Sin\ Eae}$, und weil $Me : ME = KQ : Kq$, und also $ME - Me : ME = Kq - KQ : Kq$, das ist $Ee : ME = Qq : Kq$, war, so ist $ea = Qb$ und $eS = QS$. Dieselbe Linie, welche zwei der Linien Eq, eQ, MK halbirt, halbirt folglich auch die dritte.

§. 245. Ganz ähnliche Schlüsse würden statt finden, wenn die eine Tangente, wie HL an der andern Seite läge (Fig. 77.). Auch hier ist (§. 240.) $AL . BH = AM . BI$, also nach ähnlichen Gründen wie vorhin

$$BQ : BI = AM : AF,$$
$$BH : BI = AM : AL,$$
$$BQ : IQ = AM : FM,$$
$$BH : HI = AM : ML.$$

Ferner wegen der ähnlichen Dreiecke $IEQ \backsim MEF$ und $NML \backsim NIH$,

$$IQ : IE = FM : EM,$$
$$IH : IN = ML : MN,$$

und folglich $BQ : IE = AM : EM = BK : EM$,

$$BH : IN = AM : MN = BK : MN,$$

und $BQ + BK : BK = IE + EM : EM$,

oder $QK : BK = IM : EM$.

und $BH - BK : BK = IN - MN : MN$,

oder $KH : BK = IM : MN$,

woraus dann $KH . MN = KQ . EM$ folgt.

Auch hier also, wenn man die Linien NQ, EH zieht, so geht die Linie, welche beide halbirt, durch den Mittelpunkt W.

§. 246. Aufgabe. Es sind fünf Linien MI, eq, EQ, IH, HN gegeben; unter denen nicht drei einander parallel sind; man sucht eine Ellipse oder Hyperbel, welche alle fünf Linien berührt (Fig. 77.).

Auflösung. Um erstlich den Mittelpunkt zu finden, betrachtet man das durch vier dieser Linien gebildete Viereck $EQHN$, zieht die Diagonalen EH, QN, halbirt sie, und zieht die Linie st durch die Halbirungspunkte, und von ihr wissen wir nun schon, dass der Mittelpunkt in ihr liegt. Eben so nimmt man die fünfte Linie eq mit drei der übrigen zusammen und verbindet die Durchschnittspunkte, so dass, wenn Ee, eq, qQ, QE die vier zusammen genommenen Linien sind, Eq, eQ die Linien zwischen den Durchschnittspunkten werden. Halbirt man diese in U, S, so geht SU durch den Mittelpunkt,

und wo US, die ts schneidet, da liegt, in W, der Mittelpunkt der Ellipse oder Hyperbel.

Um nun auch die Curve selbst zu bestimmen, müssen wir die Punkte, wo die gegebnen Linien berührt werden, angeben. Zieht man mit einer der gegebnen Linien HI, die ML so parallel, dass der Mittelpunkt W von beiden gleich entfernt liegt, so ist auch ML eine Tangente, und ML, IH werden an den beiden Endpunkten desselben Durchmessers berührt. Um aber den Berührungspunkt zu find n, verlängern wir zwei der andern Linien IM, eq, bis sie diese Parallellinien in M, f, I, q schneiden; zieht man dann fI, Mq, so liegt (§. 242.) der Durchschnittspunkt X beider auf dem Durchmesser, auf welchem die Berührungspunkte A, B der parallelen Tangenten sich befinden, und so findet man also diese Punkte selbst. Eben so kann man die Berührungspunkte der übrigen gegebnen Linien kennen lernen, und dann die ganze Ellipse oder Hyperbel bestimmen.

Aber auch schon aus $AM \cdot BI = B^2 =$ dem Quadrate des zu AB zugeordneten halben Durchmessers erhält man zwei conjugirte Durchmesser und den Conjugationswinkel, woraus sich dann die ganze Ellipse zeichnen lässt.

Von den Asymptoten der Hyperbel.

§. 247. Bemerkung. Wenn man die in §. 214 oder 216. gefundenen Bestimmungen für die Lage der Tangente näher betrachtet, so ergiebt sich, dass bei der Ellipse die Tangente jede Neigung gegen die Hauptaxe haben oder β jeden Werth erreichen kann, und dass der Einschnittspunkt E der Tangente in die Axe vom Scheitelpunkte an bis zu jeder Entfernung, bis ins Unendliche hinaus rücken kann. Betrachtet man dagegen die für die Hyperbel gefundenen Werthe von u' und v' (§. 214.), so erhellt, dass u' und dadurch auch v' unmöglich wird, wenn $Cotang\,\beta > \frac{a}{b}$ oder $tang\,\beta < \frac{b}{a}$ wäre, dass nämlich, wenn man $tang\,\beta = \frac{b}{a}$ setzte, $u' = o$ den Einschnitt der Tangente in die Hauptaxe, als in den Mittelpunkt selbst fallend, angeben dann aber v' unendlich werden würde, und Tangenten, die ihren Einschnittspunkt jenseits des Mittelpunktes hätten, gar nicht vorkommen können.

§. 248. Zieht man also eine Linie CI (Fig. 69.) unter dem Winkel ICR, für welchen $tang\,ICR = \frac{b}{a}$ ist, gegen die Hauptaxe geneigt durch den Mittelpunkt, so trifft diese die Curve niemals, und heisst daher eine Asymptote der Hyperbel.

Erklärung. Asymptoten nennen wir nämlich, in Beziehung auf eine krumme Linie, diejenigen Linien, gegen welche der Ast der krummen Linie sich immer mehr nähert, ohne sie doch je zu erreichen. Sie haben das Ansehen, als wären sie Tangenten in Punkten, die auf dem Aste der Curve sehr weit hinaus liegen; aber wenn man die Untersuchung genauer anstellt, so findet man, dass die Berührung nicht statt finde, wie weit man auch auf dem Aste der Curve fortgehe, dass zwar ein immer niederer Abstand der Curve von der Asymptote gefunden werde, aber nie ein Zusammentreffen.

§. 249. Gerade so nun verhält es sich hier bei der Hyperbel. Je mehr sich die Neigung der Berührungslinie dem Winkel nähert, dessen trigonometrische Tangente $= \frac{b}{a}$ ist, desto mehr rückt der Berührungspunkt in die Ferne hinaus, und er verliert sich ins Unendliche, oder die Berührung tritt gar nicht mehr ein, wenn die Tangente den Winkel ICR mit der Axe macht, wobei sie denn zugleich durch den Mittelpunkt geht.

Die Gleichung in §. 214. gab an, dass die Berührungslinie durch den Mittelpunkt gehe, und dann zur Asymptote werde, wenn $Cotang^2 \beta = \frac{a^2}{b^2}$, oder $Cotang\ \beta = \pm \frac{a}{b}$ ist. Dieser doppelte Werth zeigt uns, dass es zwei Asymptoten (Fig. 38.) giebt, deren eine den Winkel UCD, die andre den Winkel $180° - UCD = WCD$ mit der Hauptaxe macht. Diese beiden Linien schliessen sich an die vier Aeste der Hyperbel mit immer grösserer Annäherung an.

§. 250. Wir sind auf diese Lage der Asymptoten schon mehrmals im Vorigen hin gewiesen worden. In §. 181. wird der vom Brennpunkte aus an die Hyperbel gezogne Radius Vector parallel mit der Asymptote, wenn $Cos\ \varphi = -\frac{1}{e}$ ist, und daher verliert sich bei diesem Werthe der Einschnittspunkt des Radius im Unendlichen. In §. 187. konnte die mögliche Axe keinen grössern Winkel als den, dessen trigonometrische Tangente $= \frac{b}{a}$ ist, mit der Hauptaxe machen, indem, sobald diese Lage erreicht war, die Endpunkte beider nun zusammenfallender Axen sich im Unendlichen verloren.

Schon in §. 166. ergiebt es sich, dass die Hyperbel ganz zwischen den geraden Linien liegt, welche mit der Axe den Winkel GCE (Fig. 56.) bilden, dessen Tangente $= \frac{b}{a}$ ist. Denn, wenn man die Ordinate ED (Fig. 56.) ver-

längert, bis sie in G die Asymptote schneidet, so ist $EG = \frac{bx}{a}$, also

$$DE^2 = z^2 = EG^2 - b^2, \text{ folglich allemal } DE < EG.$$

Aber diese Gleichung zeigt auch schon, dass der Ast der Hyperbel sich je mehr und mehr der Asymptote nähert, je weiter man auf ihm fortgeht. Denn entwickelt man nach dem binomischen Lehrsatze den Werth

$$z = \sqrt{(EG^2 - b^2)} = EG \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{EG^2}\right)}, \text{ so ist}$$

$$z = EG \left\{1 - \tfrac{1}{2}\frac{b^2}{EG^2} - \tfrac{1}{8}\frac{b^4}{EG^4} - \tfrac{1}{16}\frac{b^6}{EG^6} - \tfrac{5}{128}\frac{b^8}{EG^8} - \text{etc.}\right\}$$

und es wird also $EG - z$ durch eine Reihe von positiven Gliedern ausgedrückt, die immer kleiner werden, je grösser EG ist, oder je weiter man auf CG hinaus geht.

§. 251. **Lehrsatz.** Wenn man zwei conjugirte Durchmesser der Hyperbel CQ, Cp (Fig. 58.) zieht, und an dem Endpunkte P des möglichen Durchmessers eine Tangente PO bis an die Asymptote, so ist $PO = B$, wenn wir unter B die Linie verstehen, deren negatives Quadrat als Quadrat des mit $CP = A$ zusammen gehörigen unmöglichen Durchmessers vorkömmt.

Beweis. Es sey (wie in §. 183. 186.) OP unter dem Winkel $= \beta$ gegen die Hauptaxe, unter dem Winkel $= \alpha$ gegen den ihr zugeordneten Durchmesser geneigt, so ist, weil CP der der Tangente an P zugeordnete Durchmesser ist (§. 214.), $PCD = \beta - \alpha$, und wenn ich $UCD = \mu$ nenne, $OCP = \mu - \beta + \alpha$. Es ist aber

$$PO = \frac{CP \,.\, Sin\,(\mu - \beta + \alpha)}{Sin\,(\beta - \mu)} = A \left\{\frac{Sin\,\mu \,.\, Cos\,(\beta - \alpha) - Cos\,\mu \,.\, Sin\,(\beta - \alpha)}{Sin\,\beta \,.\, Cos\,\mu - Cos\,\beta \,.\, Sin\,\mu}\right\},$$

$$= A \left\{\frac{b \,.\, Cos\,(\beta - \alpha) - a \,.\, Sin\,(\beta - \alpha)}{a \,.\, Sin\,\beta - b \,.\, Cos\,\beta}\right\},$$

oder weil (§. 185.) $Sin\,(\beta - \alpha) = \frac{b^2 \,.\, Cos\,\beta}{\sqrt{(b^4 \,.\, Cos^2\,\beta + a^4 \,.\, Sin^2\,\beta)}}$,

$$Cos\,(\beta - \alpha) = \frac{a^2 \,.\, Sin\,\beta}{\sqrt{(b^4 \,.\, Cos^2\,\beta + a^4 \,.\, Sin^2\,\beta)}} \text{ war,}$$

$$PO = \left(\frac{ab}{\sqrt{(b^4 \,.\, Cos^2\,\beta + a^4 \,.\, Sin^2\,\beta)}}\right), \text{ welches §. 186.} = B \text{ ist.}$$

§. 252. Hier erhellt also, dass diejenigen Ordinaten, für welche wir §. 209. * nur einen einfachen Werth fanden, diejenigen sind, deren Lage mit den Asymptoten parallel ist. Für solche Ordinaten nämlich würde (Fig. 58.) $OPp = \alpha$, $HKp = OCP = \zeta$, also $A : B = Sin\,(\alpha - \zeta) : Sin\,\zeta$, wie es für diesen Fall in §. 209. * angegeben ist.

§. 253. **Lehrsatz.** Wenn man (Fig. 79.), vom Mittelpunkte C an gerechnet, Abscissen CS auf der einen Asymptote aufträgt, und nun Ordinaten ST der andern Asymptote parallel bis an die Hyperbel zieht, so ist das Rechteck $CS . ST$ für alle Punkte der Hyperbel unveränderlich $= \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$, oder die Ordinaten sind den Abscissen umgekehrt proportional.

Beweis. Der Asymptotenwinkel SCY sey $= 2\mu$, also

$$tang\, \mu = \frac{b}{a},\ Sin\, \mu = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}},\ Cos\, \mu = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}.$$

Zieht man nun von T die Senkrechte TZ auf die Hauptaxe und nennt $CZ = x$, $ZT = z$, $CS = s$, $ST = t$, so ist

$$x = (s+t)\, Cos\, \mu = \frac{(s+t)\, a}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \text{ und } z = (s-t)\, Sin\, \mu = \frac{(s-t)\, b}{\sqrt{(a^2+b^2)}},$$

also vermöge der Gleichung $z^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2$,

$$\frac{a^2 b^2 (s-t)^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2 b^2 (s+t)^2}{a^2+b^2} - b^2 a^2,$$

das ist $a^2 + b^2 = 4 . st.$

Zieht man also durch den Scheitel Q der Hyperbel die Linie QR senkrecht auf die Hauptaxe, so dass $CR^2 = a^2 + b^2$ ist, so hat man

$$s . t = CS . ST = \tfrac{1}{4} CR^2.$$

§. 254. Soll die mit der andern Asymptote parallele Ordinate MQ durch den Scheitel der Hyperbel gehen, so muss $CM = MQ$ seyn, weil $MQC = QCY = MCQ$ ist, hier also ist $MQ^2 = CM^2 = \frac{1}{4} CR^2$, $CM = \frac{1}{2} CR$.

§. 255. Dieses giebt ein Mittel, um eine Anzahl von Punkten aufzutragen, die in der Hyperbel liegen. Nimmt man nämlich auf der einen Asymptote gleiche Stücke $Ca = ab = bd = df$, und trägt nun $aQ = Ca$, $bc = \frac{1}{2} Ca$, $de = \frac{1}{3} Ca$, $fg = \frac{1}{4} Ca$ u. s. w. so auf, dass diese Linien der andern Asymptote parallel sind, so liegen alle so bestimmte Punkte in der Hyperbel.

Hätte man $Ch = \frac{1}{2} Ca$ genommen, so würde die Ordinate $hK = 2\, Ca$ seyn müssen.

§. 256. **Lehrsatz.** Wenn man irgend eine Sehne GE der Hyperbel bis zum Einschnitte in beide Asymptoten verlängert, so sind die zwischen der Hyperbel und den Asymptoten abgeschnittenen Stücke EU, GV, einander gleich (Fig. 58.).

Beweis. Es sey CD die Hauptaxe der Hyperbel, F der Durchschnittspunkt der Sehne mit der Hauptaxe, und nun (wie §. 183.), $CF = u$, $FE = v$, $EFD = \beta$, dann ist

$$v = \frac{u b^2 . Cos\, \beta \pm ab \sqrt{\{-a^2 . Sin^2 \beta + b^2 . Cos^2 \beta + u^2 . Sin^2 \beta\}}}{a^2 . Sin^2 \beta - b^2 . Cos^2 \beta}.$$

Da nun auch $FU = \frac{u \,.\, Sin\, UCF}{Sin\,(\beta - UCF)}$, oder weil

$$tang\; UCF = \frac{b}{a},\quad FU = \frac{u\,b}{a\,.\,Sin\,\beta - b\,.\,Cos\,\beta}$$

und $FV = \frac{-u\,b}{a\,.\,Sin\,\beta + b\,.\,Cos\,\beta} = \frac{-u\,.\,Sin\,UCF}{Sin\,(\beta + UCF)}$,

so erhält man aus dem doppelten Werthe für v,

$$FE = \frac{u\,b^2\,.\,Cos\,\beta + a\,b\,\sqrt{\{-a^2\,.\,Sin^2\,\beta + b^2\,.\,Cos^2\,\beta + u^2\,.\,Sin^2\,\beta\}}}{a^2\,.\,Sin^2\,\beta - b^2\,.\,Cos^2\,\beta},$$

$$FG = \frac{u\,b^2\,.\,Cos\,\beta - a\,b\,\sqrt{\{-a^2\,.\,Sin^2\,\beta + b^2\,.\,Cos^2\,\beta + u^2\,.\,Sin^2\,\beta\}}}{a^2\,.\,Sin^2\,\beta - b^2\,.\,Cos^2\,\beta},$$

$$FU - FE = \frac{u\,a\,b\,.\,Sin\,\beta - a\,b\,\sqrt{\{-a^2\,.\,Sin^2\,\beta + b^2\,.\,Cos^2\,\beta + u^2\,.\,Sin^2\,\beta\}}}{a^2\,.\,Sin^2\,\beta - b^2\,.\,Cos^2\,\beta},$$

$$FV - FG = \frac{-u\,a\,b\,.\,Sin\,\beta + a\,b\,\sqrt{\{-a^2\,.\,Sin^2\,\beta + b^2\,.\,Cos^2\,\beta + u^2\,.\,Sin^2\,\beta\}}}{a^2\,.\,Sin^2\,\beta - b^2\,.\,Cos^2\,\beta},$$

also beide der Grösse nach gleich.

§. 257. Lehrsatz. Jede Tangente der Hyperbel wird von den beiden Asymptoten so geschnitten, dass (Fig. 58.) der Berührungspunkt X in der Mitte zwischen den Durchschnittspunkten mit der Asymptote liegt, oder $WX = WZ$ ist.

Der Beweis liegt im Vorigen, da, wenn in §. 256. der irrationale Theil verschwindet, das ist, wenn die Sehne zur Tangente wird,

$$WX = XZ = \frac{u\,a\,b\,.\,Sin\,\beta}{a^2\,.\,Sin^2\,\beta - b^2\,.\,Cos^2\,\beta}\ \text{ist.}$$

§. 258. Auch wenn man die Linie XE als Sehne betrachtet, gilt der Lehrsatz §. 256. und es ist $XY = OE$. Hier nämlich würde $\beta < UCD$ und aX, aE wären die beiden Werthe von v, die durch eben die Formel, wie vorhin, bestimmt werden.

§. 259. Lehrsatz. Wenn man irgend eine Sehne der Hyperbel bis an die Asymptoten verlängert, so ist das Rechteck aus den vom Einschnitte in die eine Asymptote bis an beide Einschnitte in die Hyperbel genommenen Stücke gleich gross für alle unter sich parallele Sehnen, oder es ist $VG\,.\,VE$ gleich für alle parallele Sehnen (Fig. 58.).

Beweis. Wenn die vorigen Bezeichnungen beibehalten werden, so ist

$$VG = \frac{u\,a\,b\,.\,Sin\,\beta - a\,b\,\sqrt{\{-a^2\,.\,Sin^2\,\beta + b^2\,.\,Cos^2\,\beta + u^2\,.\,Sin^2\,\beta\}}}{a^2\,.\,Sin^2\,\beta - b^2\,.\,Cos^2\,\beta},$$

und $VE = FE + VF = \frac{u\,a\,b\,.\,Sin\,\beta + a\,b\,.\,\sqrt{\{-a^2\,.\,Sin^2\,\beta + b^2\,.\,Cos^2\,\beta + u^2\,.\,Sin^2\,\beta\}}}{a^2\,.\,Sin^2\,\beta - b^2\,.\,Cos^2\,\beta}$,

also $VG \cdot VE = \frac{a^2 b^2}{a^2 . Sin^2 \beta - b^2 . Cos^2 \beta}$. Dieser Werth bleibt immer gleich, so lange der Winkel β ungeändert bleibt.

Wenn man durch den Endpunkt P derjenigen Axe, welche alle unter dem Winkel $= \beta$ gegen die Hauptaxe geneigte Sehnen halbirt, eine Tangente zieht, so ist nun offenbar auch das Quadrat, dessen Seite die zwischen P und der Asymptote abgeschnittene Tangente ist, eben jenem Rechtecke gleich. Dass auch $UE \cdot UG = VE \cdot VG$, lässt sich leicht zeigen.

§. 260. Der eben gefundene Werth von $VE \cdot VG$ ist auch gleich dem Quadrate der Linie, die wir hier die der CP conjugirte Axe nennen müssten, nämlich (§. 186.) $VG \cdot VE = B^2$. Daher ist auch, wenn die Sehne zur Tangente wird, das zwischen dem Berührungspunkte und einer der Asymptote abgeschnittene Stück $= B$, das ist gleich der Grösse derjenigen Linie, welche als conjugirte Axe zu der vom Centro an den Berührungspunkt gezognen Axe anzusehen ist (§. 251.).

§. 261. Es erhellt nun auch leicht, dass $UE \cdot EV$ eine unveränderliche Grösse hat, wenn β denselben Werth behält, weil $UE = VG$ ist.

§. 262. Lehrsatz. Wenn man von Punkten E, e (Fig. 79.) in der Hyperbel parallele Linien EU, eu und andre parallele Linien EV, ev zieht, deren Endpunkte U, u in der einen, und V, v in der andern Asymptote liegen, so sind die Rechtecke $EV \cdot EU$ und $ev \cdot eu$ gleich.

Beweis. Wenn man VE verlängert, bis sie in W die Asymptote schneidet, so ist $EU = \frac{EW \cdot eu}{ex}$. Da nun (§. 260.) $EW \cdot EV$ für jeden Punkt der Hyperbel einen ungeänderten Werth erhält, so lange die Sehne mit WV parallel bleibt, also $EW \cdot EV = ex \cdot ev$ ist, so ist auch

$$EU \cdot EV = \frac{EW \cdot EV \cdot eu}{ex} = ev \cdot eu.$$

§. 263. Wenn man zwei Tangenten an die Hyperbel zieht, und sie verlängert, bis sie in beide Asymptoten einschneiden, so sind die Dreiecke gleich, welche durch jede der Tangenten mit den Asymptoten gebildet werden, das ist (Fig. 80.) das Dreieck $ABC = DEC$.

Beweis. Der Berührungspunkt liegt allemal in der Mitte zwischen den Einschnittspunkten in die Asymptote (§. 257.), also ist $DN = EN$, $AM = BM$, wenn N, M die Berührungspunkte sind. Zieht man nun durch diese die Linien QN, PM mit einer oder der andern Asymptote parallel, so ist $CQ \cdot QN = CP \cdot PM$ (§. 253.), aber $CQ = \frac{1}{2} CE$, $CP = \frac{1}{2} CB$, also
$CQ \cdot QN =$ dem halben Inhalte des Dreiecks CDE, und
$CP \cdot PM =$ dem halben Inhalte des Dreiecks CAB, welche Dreiecke demnach gleich sind.

§. 264. Hieraus erhellt auch umgekehrt, dass man die Tangente an M erhält, wenn man PM mit der einen Asymptote parallel zieht, und dann auf der andern $PB = CP$ nimmt; BM ist die Tangente.

§. 265. Bemerkung. Wenn man (Fig. 81.) auf irgend einem Durchmesser CH der Hyperbel einen Punkt A in gegebner Entfernung $CA = u$ vom Mittelpunkte annimmt, so kennen wir schon aus dem vorigen die Grösse der Ordinate $AF = v$, die mit der Asymptote parallel bis an die Hyperbel gezogen ist. War nämlich im Allgemeinen (§. 208.)

$$\frac{v^2 . Sin^2 \zeta}{Sin^2 \alpha} = - B^2 + \frac{B^2}{A^2} u^2 + \frac{2 B^2 u v . Sin (\alpha - \zeta)}{A^2 . Sin \alpha} + \frac{B^2 v^2 . Sin^2 (\alpha - \zeta)}{A^2 . Sin^2 \alpha},$$

so wird dies hier, weil (§ 251.) $B : A = Sin \zeta : Sin (\alpha - \zeta)$ ist, (nämlich die unter dem Winkel $= \alpha$ gegen CH geneigte Tangente $Hh = B$ und hier $hCH = \zeta$,)

in $o = - B^2 + \frac{B^2}{A^2} u^2 + \frac{2 B^2 u v . Sin (\alpha - \zeta)}{A^2 . Sin \alpha}$,

oder $v = \frac{(A^2 - u^2) . Sin \alpha}{2 u . Sin (\alpha - \zeta)}$ übergehen. — Der Fall, auf welchen wir schon §. 209. * und 252. geführt wurden.

§. 266. Lehrsatz. An die Hyperbel BFD werden in B und D zwei Tangenten gezogen (Fig. 81.), die sich in A durchschneiden. Zieht man nun die Linie BD zwischen den Berührungspunkten, und durch A eine Linie AE mit der einen Asymptote parallel, so schneidet die letztere die Hyperbel in F und ihre Sehne BD in E so, dass $AF = FE$ ist.

Beweis. Wir haben so eben (§. 265.) gesehen, dass

$AF = v = \frac{(A^2 - u^2) . Sin \alpha}{2 u . Sin (\alpha - \zeta)}$ ist, wenn man den durch A gezognen halben Durchmesser $CH = A$, ferner $CA = u$, $GCA = \zeta$ und $BIC = 180° - \alpha$ nennt. Denn dass CA der der Sehne BD zugeordnete Durchmesser sey, ist aus §. 220. bekannt. Da nun $CI = \frac{A^2}{u}$ (nach §. 216.) ist,

also $AI = \frac{A^2 - u^2}{u}$ und $AE = \frac{AI . Sin \alpha}{Sin (\alpha - \zeta)}$, so ist

$$AE = \frac{(A^2 - u^2)}{u} . \frac{Sin \alpha}{Sin (\alpha - \zeta)} = 2 . AF.$$

§. 267. Wenn die beiden Berührungspunkte in den beiden einander gegen über liegenden Stücken der Hyperbel sich befänden, so würde der Satz ganz eben so statt finden.

Von den einander zugeordneten Hyperbeln.

§. 268. **Bemerkung.** Wenn man die conjugirten Hyperbeln (§. 199.) in Verbindung mit einander betrachten will, so muss man die Gleichung $z^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ als für die eine, und $X^2 = \frac{a^2}{b^2}(Z^2 - b^2)$ als für die andre dieser Hyperbeln geltend ansehen. Dann ist für jene die mit x oder CF parallele Hauptaxe möglich, und $= a = CA$, für diese hingegen die mit FG oder z parallele Axe möglich und $= b = CE$ (Fig. 82.).

Nimmt man irgend eine Abscisse $CF = x$, so ist in der einen Hyperbel

$$z = FG = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(x^2 - a^2)},$$

in der andern Hyperbel $Z = FH = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 + x^2)}$.

§. 269. Wenn man beide Werthe durch Entwickelung der binomischen Wurzelgrösse in Reihen darstellt, so ist

$$z = \frac{b}{a}\left(x - \tfrac{1}{2}\frac{a^2}{x} - \tfrac{1}{8}\frac{a^4}{x^3} - \tfrac{1}{16}\frac{a^6}{x^5} - \text{etc.}\right),$$

$$Z = \frac{b}{a}\left(x + \tfrac{1}{2}\frac{a^2}{x} - \tfrac{1}{8}\frac{a^4}{x^3} - \tfrac{1}{16}\frac{a^6}{x^5} - \text{etc.}\right),$$

also beide Werthe desto weniger von $\frac{bx}{a} = FI$ (wenn I in der Asymptote liegt) verschieden, je grösser x wird. Die Linie CI, die unter dem Winkel $ICF = \zeta$, für welchen $tang\,\zeta = \frac{b}{a}$ ist, geneigt gegen die Axe durch den Mittelpunkt gezogen worden, ist also die gemeinschaftliche Asymptote beider conjugirter Hyperbeln, und jeder Punkt auf der einen liegt diesseits, jeder Punkt auf der andern Hyperbel liegt jenseits CI. Und eben das gilt von der andern Asymptote.

§ 270. **Lehrsatz.** Zieht man durch irgend einen Punkt K der einen Asymptote eine Linie mit der andern Asymptote parallel, so schneidet sie in L, M in gleichen Entfernungen von K in beide Hyperbeln ein (Fig. 82.).

Beweis. Wenn man (wie in §. 253.) $CK = s$, $KL = t$, $KM = T$ nennt, so ist $x = CO = (s + t)\, Cos\,\zeta, = (s + t)\frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$;

$$z = (s - t)\, Sin\,\zeta = \frac{(s - t)\, b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = OL,$$

dagegen $X = NM = (s - T)\, Cos\,\zeta = \frac{(s - T)\, a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$, und

$$Z = CN = (s + T)\, Sin\,\zeta = \frac{(s + T)\, b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}},$$

also giebt die Gleichung $z^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ nun $t = \frac{a^2 + b^2}{4 \cdot s}$,

und die Gleichung $X^2 = \frac{a^2}{b^2}(Z^2 - b^2)$ giebt $T = \frac{a^2 + b^2}{4 \cdot s}$; eben so gross, wenn s in beiden Fällen gleich $= CK$ ist.

§. 271. **Lehrsatz.** Wenn man in der einen der conjugirten Hyperbeln einen willkürlichen Durchmesser $CP = A$ zieht, und die den zugeordneten Sehnen parallele Linie durch den Mittelpunkt CQ zieht, so trifft diese die andre conjugirte Hyperbel so, dass sie den conjugirten Durchmesser $= B$ vorstellt (Fig. 82.).

Beweis. Wenn wir genau so wie in §. 186. die Rechnung anordnen, so wird für die Hyperbel PAG der Werth der möglichen Axe durch $A^2 = \frac{a^4 . Sin^2 \beta + b^4 . Cos^2 \beta}{a^2 . Sin^2 \beta - b^2 . Cos^2 \beta}$, und der Werth der unmöglichen Axe durch $B^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 . Sin^2 \beta - b^2 . Cos^2 \beta}$ bestimmt.

Zieht man nun CQ, den Ordinaten SR, welche dem halben Durchmesser $CP = A$ zugehören, parallel und nimmt darauf $CQ = B$, so sind dieses Punktes auf die Hauptaxen bezogne Coordinaten Qq mit x parallel $= B . Cos \beta = X$,
Cq auf der Axe $CN = B . Sin \beta = Z$,
weil β den Winkel SVO bezeichnet, also $QCq = \beta - 90°$,

also $X^2 = \frac{a^2 b^2 . Cos^2 \beta}{a^2 . Sin^2 \beta - b^2 . Cos^2 \beta}$ und $Z^2 = \frac{a^2 b^2 . Sin^2 \beta}{a^2 . Sin^2 \beta - b^2 . Cos^2 \beta}$,

woraus, wenn man β eliminirt, folgt

$$Cotang^2 \beta = \frac{a^2 (Z^2 - b^2)}{b^2 Z^2} = \frac{a^2 X^2}{b^2 (X^2 + a)},$$

also $z^2 = \frac{b^2}{a^2}(X^2 + a^2)$.

Diese Gleichung zeigt, dass Q ein Punkt in der conjugirten Hyperbel ist, indem sie mit der (§. 268.) für diese angegebne Gleichung ganz übereinstimmt.

§. 272. Hier könnte man nun für das Rechteck aus den Axen CQ, CP für den Unterschied ihrer Quadrate, für die zwischen ihren Endpunkten gezognen Linien genau ähnliche Sätze finden, wie wir sie oben bei der Ellipse fanden §. 188. und folg.

§. 273. **Lehrsatz.** Wenn man durch die Endpunkte zweier zusammen geordneter Durchmesser P und Q Tangenten an die Hyperbeln zieht, so schneiden diese die Asymptote CH in demselben Punkte W.

Beweis. Die Tangente PW ist $= B$ und mit CQ parallel; zieht man also QW, so ist diese zu CP parallel und $= A = CP$, welches eben so auch für die Tangente an Q statt finden muss (§. 251.).

§. 274. Lehrsatz. Die zwischen den Endpunkten P, Q der conjugirten Durchmesser gezogene Linie PQ ist mit der andern Asymptote parallel.

Beweis. Verlängert man WQ, WP bis sie in X, Z die andre Asymptote schneiden, so ist $QX = WQ$, $PZ = WP$, also QP mit XZ parallel.

§. 275. Umgekehrt gilt also auch Folgendes: Wenn man eine Tangente PW der Hyperbel zieht, und von ihrem Einschnitte W in die Asymptote eine Tangente an die conjugirte Hyperbel zieht, so berührt diese am Endpunkte des Durchmessers, welcher dem CP zugeordnet ist.

Und ferner: Wenn man vom Endpunkte P eines Durchmessers die Linie PQ mit der Asymptote parallel zieht, so trifft diese die conjugirte Hyperbel in dem Endpunkte des conjugirten Durchmessers.

§. 276. Anmerkung. Diese Sätze werden hinreichen, um zu zeigen, wie man die Eigenschaften dieser Curven durch analytische Betrachtungen herleitet.

Warum diese Linien Kegelschnitte heissen, hat hier noch nicht erklärt werden können, indess ist es aus der Elementargeometrie (Geom. 504.) oberflächlich bekannt, und wir kommen in der Folge darauf zurück, wenn wir die Durchschnittslinien krummer und ebner Flächen näher betrachten werden.

Unter der sehr grossen Anzahl von Schriften, welche die Eigenschaften der Linien der zweiten Ordnung betrachten, will ich nur die erwähnen, die sich am meisten durch Eigenthümlichkeit in der Darstellung auszeichnen.

Apollonii Pergaei Conica (ed. Edm. Halley. Oxoniae. 1710.)

Claud. Mydorgii Prodromus catoptricorum et dioptricorum sive conicorum. *Paris,* 1639.

Gregorii a Sto Vincentio opus geometricum quadraturae circuli et sectionum conicarum, decem libris comprehensum. Antverpiae, 1647.

Rob. Simson sectionum conicarum libri quinque. Edimb. 1750 (übers. v. Camerer. Tübingen, 1809).

Is. Newtoni principia philosophiae naturalis. Lond. 1726. *Lib. I. Sect.* 4 *et* 5.

Leonh. Euleri introduct. in analysin infinitorum. Tomus II. cap. 5.

Eine vollständigere Literatur enthält: *Placidi Heinrich de sectionibus conicis tractatus analyticus. Ingolst.* 1797.

Neunter Abschnitt.

Von den Linien der zweiten Ordnung im Allgemeinen.

§. 277. Bemerkung. Nachdem wir mehrere Linien der zweiten Ordnung näher kennen gelernt haben, ist es wohl natürlich zu fragen, ob es nicht noch mehrere Linien der zweiten Ordnung gebe. Um diese Frage zu beantworten,

wollen wir die schon oben (§. 78.) angegebne allgemeinste Gleichung, welche alle Linien der zweiten Ordnung umfasst,

$$z^2 + mxz + nx^2 + az + bx + h^2 = o$$

näher betrachten. Da hier x, z die Coordinaten bedeuten, so erhellt leicht, dass a, b, h Linien, m, n dagegen Zahlen vorstellen.

§. 278. Lehrsatz. Bei allen Linien der zweiten Ordnung findet es statt, dass alle unter sich parallele Sehnen durch eine und dieselbe gerade Linie halbirt werden.

Beweis. Unsre Gleichung giebt

$$z^2 + (mx + a)\,z = -nx^2 - bx - h^2,$$

also $z = -\left(\frac{mx + a}{2}\right) \pm \sqrt{\{\tfrac{1}{4}(mx + a)^2 - nx^2 - bx - h^2\}}$,

oder $z + \tfrac{1}{2}a = -\tfrac{1}{2}mx \pm \sqrt{\{(\tfrac{1}{4}m^2 - n)\,x^2 + (\tfrac{1}{2}ma - b)\,x + (\tfrac{1}{4}a^2 - h^2)\}}$.

Es sey (Fig. 83.) AB die Abscissenlinie, auf welcher $GB = x$ von dem Anfangspunkte G an gerechnet, aufgetragen ist, und BK stelle die Richtung der Ordinate vor. Nimmt man nun auf dieser $BE = \tfrac{1}{2}a$ und nennt die von E an gerechnete Ordinate $= z + \tfrac{1}{2}a = y$, so wird y aufgetragen, indem man zuerst $EF = -\tfrac{1}{2}mx$ nimmt und dann hinaufwärts und hinabwärts $FK = FI$ gleich dem irrationalen Theile aufträgt. Hier ist also F die Mitte der Sehne, und wenn man vom Anfangspunkte G aus GH mit BE parallel zieht, so dass $HE = x$ ist, so trifft die gerade Linie HF alle mit KI parallele Sehnen in der Mitte, weil EF allemal der Linie x proportional ist.

§. 279. Da wir den Winkel, unter welchem die Ordinaten z gegen die Abscissen geneigt seyn sollten, als bekannt $= \beta$ annehmen dürfen, so ist nun auch die Neigung des eben gefundenen Durchmessers gegen die Abscissenlinie bekannt; denn es ist $Sin\,EHF = \tfrac{1}{2}m \,.\, Sin\,(EHF + \beta)$,

$tang\,EHF = \dfrac{\tfrac{1}{2}m \,.\, Sin\,\beta}{1 - \tfrac{1}{2}m \,.\, Cos\,\beta}$, weil $EF = \tfrac{1}{2}m \,.\, HE$ war. Dadurch ist auch $HF = x\sqrt{\{1 + \tfrac{1}{4}m^2 - m \,.\, Cos\,\beta\}}$ bestimmt.

§. 280. Aufgabe. Die allgemeine Gleichung für alle Linien der zweiten Ordnung so zu verändern, dass die halbe Sehne FK durch Abscissen HF auf der die Sehnen halbirenden Abscissenlinie, die auch hier mit Recht ein Durchmesser heisst, ausgedrückt werde.

Auflösung. Es sey $HF = s$, die halbe Sehne $FK = t$, so ist, wenn ich die gegebne Grösse $\sqrt{(1 + \tfrac{1}{4}m^2 - m \,.\, Cos\,\beta)} = p$ nenne,

$$x = \frac{s}{p}, \text{ und } t^2 = (\tfrac{1}{4}m^2 - n)\,x^2 + (\tfrac{1}{2}ma - b)\,x + (\tfrac{1}{4}a^2 - h^2),$$

also $t^2 = \left(\dfrac{\tfrac{1}{4}m^2 - n}{p^2}\right) s^2 + \left(\dfrac{\tfrac{1}{2}ma - b}{p}\right) s + (\tfrac{1}{4}a^2 - h^2)$, welches die verlangte Gleichung ist.

§. 281. Bemerkung. Die eben gefundene Gleichung, die sich kurz durch $t^2 = Ms^2 + Hs^2 + K^2$ darstellen lässt, wo dann M eine Zahl bedeutet, H und K aber Linien vorstellen, enthält drei Hauptfälle, je nachdem entweder M positiv, oder M negativ, oder $M = o$ ist.

Ob H positiv oder negativ ist, hat keinen Einfluss auf die Natur der Curve, indem für ein negatives H dieselben Werthe mit bestimmten negativen Werthen von S zusammen gehören würden, die eben den positiven Werthen von S entsprächen, wenn H positiv ist.

Auch K^2 kann mit positivem oder negativem Zeichen vorkommen, ohne dass dieses die Natur der Curve ändert, indem durch eine Verlegung des Anfangspunktes der Abscissen dieses Glied andre Werthe erhalten und selbst aus dem positiven ins negative übergehen kann. Wir wollen jetzt die drei Hauptfälle betrachten.

§. 282. Lehrsatz. Wenn in der Gleichung $t^2 = Ms^2 + Hs + K^2$ das Glied Ms^2 negativ ist, so ist die Curve eine Ellipse; dagegen wenn Ms^2 positiv vorkömmt, ist sie eine Hyperbel.

Beweis. Es sey also $t^2 = K^2 + Hs - Ms^2$, so geht diese Gleichung in $t^2 = K^2 + \frac{\frac{1}{4}H^2}{M} - Mu^2$ über, wenn man $s - \frac{\frac{1}{2}H}{M} = u$ setzt; und eben so geht, wenn man M positiv annimmt, die Gleichung $t^2 = K^2 + Hs + Ms^2$, durch die Substitution $u = s + \frac{\frac{1}{2}H}{M}$, in $t^2 = K^2 - \frac{\frac{1}{4}H^2}{M} + Mu^2$ über, wenn M positiv ist.

Die erstere ist eine Gleichung für die Ellipse, deren mit t paralleler halber Durchmesser $= \sqrt{\left\{K^2 + \frac{\frac{1}{4}H^2}{M}\right\}}$, und deren mit u paralleler halber Durchmesser $= \sqrt{\left\{\frac{K^2}{M} + \frac{\frac{1}{4}H^2}{M^2}\right\}}$ ist; und die letztere hingegen gehört einer Hyperbel, deren mögliche Axe mit t parallel ist, wenn $K^2 - \frac{\frac{1}{4}H^2}{M}$ positiv, hingegen mit u parallel ist, wenn eben diese Grösse negativ vorkömmt.

§. 283. Wäre hier $K^2 - \frac{\frac{1}{4}H^2}{M} = o$, so ist $t^2 = Mu^2$ eine Gleichung für zwei gerade Linien, die sich im Anfangspunkte der Coordinaten durchschneiden. Diese gehören also mit unter die Gleichung für die Linien der zweiten Ordnung. In diesem Falle geht die Gleichung $t^2 = K^2 + Hs^2 + Ms^2$, oder $t^2 - \frac{\frac{1}{4}H^2}{M} = K^2 - \frac{\frac{1}{4}H^2}{M} + Hs + Ms^2$, in $t^2 - \frac{\frac{1}{4}H^2}{M} = Hs + Ms^2$, oder in

$t^2 - M\left(\frac{\frac{1}{2}H}{M} + s\right)^2 = o$ über, und ist folglich in die zwei Factoren

$$t - \left(\frac{\frac{1}{2}H}{M} + s\right)\sqrt{M} = o, \text{ oder } t - u\sqrt{M} = o,$$

und $t + \left(\frac{\frac{1}{2}H}{M} + s\right)\sqrt{M} = o$, oder $t + u\sqrt{M} = o$, zerlegbar, und jede dieser Gleichungen entspricht einer der beiden geraden Linien, die in der Gleichung enthalten sind.

§. 284. **Lehrsatz.** Wenn $M = o$, also $t^2 = Hs + K^2$, so gehört diese Gleichung einer Parabel, deren Parameter $= H$ ist.

Beweis. Nimmt man $u = s + \frac{K^2}{H}$, so wird $t^2 = Hu$, und dieses ist, wenn t, u auf einander rechtwinklig sind, eine Gleichung für diejenige Parabel, deren Parameter zur Hauptaxe $= H$ ist; bei schiefwinkligen Coordinaten müsste man unter H den zu demjenigen Durchmesser gehörenden Parameter verstehen, welchem die Richtung der halbirten Sehne entspricht.

§. 285. Wäre zugleich $M = o$, und $H = o$, so wäre $t^2 = K^2$, also $t = \pm K$ die Gleichung für zwei mit der Abscissenlinie, worauf die s aufgetragen worden, parallele gerade Linien. Auch diese gehören also unter die Gleichung für Linien der zweiten Ordnung; aber auch hier liesse sich die Gleichung $t^2 - K^2 = o$ in die beiden Factoren $t - K = o$, $t + K = o$ zerlegen, und diese einfachen Gleichungen gehören jenen beiden Parallellinien.

§. 286. **Bemerkung.** Wenn ich annehme, dass die Coordinaten in §. 278. 280. auf einander senkrecht waren, also $Cos\,\beta = o$, so ist (§. 280.)

$t^2 = \frac{m^2 - 4n}{4 + m^2} s^2 + \frac{ma - 2b}{\sqrt{(4 + m^2)}} s + (\frac{1}{4}a^2 - h^2)$. Es ist also die Curve erstlich eine Ellipse, wenn $m^2 < 4n$, zweitens eine Parabel, wenn $m^2 = 4n$, drittens eine Hyperbel, wenn $m^2 > 4n$ ist. Der zweite Fall umfasst die zwei unter sich parallelen Linien zugleich mit, und der dritte die zwei sich schneidenden geraden Linien.

§. 287. **Beispiel.** Die Gleichung für eine Linie der zweiten Ordnung sey

$$z^2 + \tfrac{3}{2}zx + 2x^2 - 4az + 5ax - 9a^2 = 0.$$

Um nach dieser Gleichung die krumme Linie zu bestimmen, sey (Fig. 84.) AB die Abscissenlinie, A der Anfangspunkt der Abscissen, und die Ordinaten z auf sie senkrecht. Ich ziehe nun zuerst in der Entfernung $AC = 2a$, eine Parallele zu AB, rechne die Abscissen $CX = x$, von C an, die Ordinaten $z - 2a = XZ = y$, von dieser Linie an, so giebt unsre Gleichung $y^2 + \frac{3}{2}xy + 2x^2 + 8ax - 13a^2 = 0$,

$$y = -\tfrac{3}{4}x \pm \sqrt{\{-\tfrac{23}{16}x^2 - 8ax + 13a^2\}}.$$

Trägt man also auf der Ordinate $XU = \frac{3}{4}CX$ hinabwärts und zieht CU, so ist CU der Durchmesser, welcher die mit XU parallelen Sehnen halbirt; zugleich ist nun $CU = x\sqrt{(1 + \frac{9}{16})} = \frac{5}{4}x$, und die halbe Sehne t wird durch $t^2 = 13a^2 - 8ax - \frac{23}{16}x^2$,

oder $t^2 = 13a^2 - \frac{32}{5}as - \frac{23}{25}s^2$ ausgedrückt. Die Curve ist also eine Ellipse, deren Mittelpunkt V man findet, wenn man $S = -\frac{80}{23}a = -\frac{40}{23}AC$ nach CV aufträgt. Rechnet man nun von V an die Abscissen $u = s + \frac{80}{23}a$, so ist $t^2 = \frac{555}{23}a^2 - \frac{23}{25}u^2$. Die durch V mit UX parallele Ordinate wird also $VW = a\sqrt{\frac{555}{23}} = 4{,}91 \cdot a$; die auf VU genommene halbe Axe $VY = 5{,}12 \cdot a$, WYP ist die durch unsre Gleichung angegebne Ellipse.

§. 288. Beispiel. Wenn ich eben jene Gleichung so abändere, dass ich dem Gliede, welches x^2 enthält, den Coefficienten $= \frac{9}{16}$ gebe,

also $z^2 + \frac{3}{2}zx + \frac{9}{16}x^2 - 4az + 5ax - 9a^2 = 0$ setze, so wird die Curve eine Parabel. Setze ich nämlich auch hier $y = z - 2a$, so ist

$$y^2 + \frac{3}{2}yx + \frac{9}{16}x^2 + 8ax - 13a^2 = 0,$$

also erhält auch hier die Axe, welche die mit UX parallelen Sehnen halbirt (Fig. 84.) eben die Lage CU, und es ist

$$y = -\frac{3}{4}x \pm \sqrt{(-8ax + 13a^2)},$$

oder wenn $CU = s = \frac{5}{4}x$ ist und die halbe Sehne $= t$,

$t^2 = 13a^2 - \frac{32}{5}as$. Der Einschnitt der Axe CU in die Parabel liegt da, wo $t = o$, $s = \frac{65}{32}a = CQ$ ist, und wenn ich $u = s - \frac{65}{32}a$ setze, so ist $t^2 = -\frac{32}{5}au$, so dass t nur für negative u mögliche Werthe erhält und die Parabel eine Lage wie RQS erhält. Der Abstand der Hauptaxe von der QV lässt sich nun auch finden. Da nämlich (§. 123.) eine Axe, gegen welche die Zugeordnete unter dem Winkel $= \alpha$ geneigt sind, um einen senkrechten Abstand $= \frac{1}{2}p' \cdot Cos\,\alpha \cdot Sin\,\alpha$ von der Hauptaxe entfernt ist, wenn (§. 126.) p' den jener Axe zugehörigen Parameter bedeutet, so ist hier der senkrechte Abstand $= \frac{16}{5}a \cdot Cos\,\alpha \cdot Sin\,\alpha = \frac{16 \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot 5 \cdot 5}a = \frac{192}{125}a$, weil $\frac{32}{5}a$ der dem Durchmesser QV zugehörige Parameter und $Sin\,XCU = \frac{3}{5}$. $Cos\,XCU = \frac{4}{5}$ ist; MN ist also die Hauptaxe.

§. 289. Beispiel. Es sey $z^2 - 5x^2 - 4az + 7ax - 12a^2 = 0$ die gegebne Gleichung, so kann ich in Fig. 84. wieder die mit AB parallele Axe CD, in der Entfernung $= 2a$ gezogne gebrauchen und $y = z - 2a$ setzen, wodurch nun

$$y^2 - 5x^2 + 7ax - 16a^2 = 0$$

wird. Hier ist CD selbst die Axe, welche den mit UX parallelen Sehnen conjugirt ist und $y = \pm\sqrt{\{5x^2 - 7ax + 16a^2\}}$. Die beiden Scheitelpunkte der Hyperbel entsprechen der Abscisse $x = \frac{7}{10}a$, indem durch $u = x - \frac{7}{10}a$ die Gleichung in $y = \pm\sqrt{\{5u^2 + \frac{271}{20}a^2\}}$ übergeht, wo dann bloss die zweite Potenz von u vorkömmt; die mit y parallele Axe ist die mögliche Axe, die mit x parallele Axe die unmögliche. In Fig. 84. sind die Coordinaten x auf aD, y auf ab von a an gerechnet, und af ist $= 2a$, dann ist die gesuchte Hyperbel die dort gezeichnete.

§. 290. Es erhellt hier leicht, wie man schon sogleich aus der Gleichung übersehen kann, wie der Durchmesser, welcher die mit z parallelen Ordinaten halbirt, gegen die Abscissenlinie, auf denen die x genommen sind, geneigt ist; wie man sogleich erkennt, ob die verlangte Curve eine Ellipse, Parabel, Hyperbel ist u. s. w.

§. 291. Bemerkung. Hier nahmen wir die Coefficienten in der Gleichung als gegeben an, und bestimmten daraus die Axen der Curve und alle Punkte der Curve selbst; aber umgekehrt können auch Punkte der Curve gegeben seyn, und daraus die Gleichung für die Curve gesucht werden, oder man

kann verlangen, aus jenen geometrisch gegebenen Bestimmungen die Coefficienten m, n, so wie die Linien a, b, h in §. 277. abzuleiten.

Da die Gleichung fünf solcher beständiger Grössen enthält, so erhellt, dass man fünf Bedingungen für die verlangte Linie der zweiten Ordnung annehmen darf, um daraus alle jene Bestimmungen zu finden. Solche fünf Bedingungen könnten zum Beispiel seyn, 1. dass die Curve durch fünf gegebne Punkte gehen solle, oder 2. dass sie durch vier gegebne Punkte gehen und in einem derselben eine gegebne Linie berühren solle; oder 3. dass sie durch drei gegebne Punkte gehen und in zweien derselben gegebne Linien berühren solle; oder 4. dass sie durch vier gegebne Punkte gehen und eine gegebne gerade Linie in einem unbestimmten Punkte berühren solle; oder 5. dass sie durch drei gegebne Punkte gehen und zwei gegebne Linien in unbestimmten Punkten berühren solle u. s. w. Dass die fünf Bedingungen auch noch verwickelter seyn könnten, lässt sich wohl übersehen. Wir werden hier nur zwei dieser Aufgaben auflösen, einige andre sind in Beziehung auf einzelne dieser Curven schon vorgekommen, z. B. §. 246.

§. 292. Aufgabe. Es sind fünf Punkte A, B, C, D, E (Fig. 85.) gegeben, man sucht die Gleichung für eine durch alle diese Punkte gehende Linie der zweiten Ordnung.

Auflösung. Da in der Gleichung

$$z^2 + mxz + nx^2 + az + bx + h^2 = o$$

die Coordinaten z, x auch schiefwinklig seyn dürfen, so nehmen wir AB als Abscissenlinie, A als Anfangspunkt der Abscissen x, die Ordinaten z aber mit AC parallel an. Es sey $AC = g'$, $AF = f''$, $FD = g''$, $AG = f'''$, $GE = g'''$, $AB = f^{\text{IV}}$, und FD, GE mit AC parallel, so sind diese Grössen wegen der gegebnen Lage aller Punkte bekannt.

Da nun mit der Abscisse $x = o$ erstlich die Ordinate $z = o$ zusammen gehört, weil A in der Curve liegen soll, zweitens die Ordinate $z = g'$ zusammen gehört, so erhalten wir aus der allgemeinen Gleichung, worin m, n, a, b, h unbekannt sind, zuerst die beiden Gleichungen $h^2 = o$ und $g'^2 + ag' = o$, und eben so, da mit $x = f''$, $z = g''$ zusammen gehört

$$g''^2 + mf''g'' + nf''^2 + g''a + bf'' = o;$$

und auf ähnliche Weise $g'''^2 + mf'''g''' + nf'''^2 + ag''' + bf''' = o$,

und endlich $nf^{\text{IV}2} + bf^{\text{IV}} = o$.

Es ergiebt sich also $a = -g'$;

$$b = -nf^{\text{IV}};$$

und dann ferner $g''^2 + mf''g'' + nf''^2 - g'g'' - nf''f^{\text{IV}} = o$

und $g'''^2 + mf'''g''' + nf'''^2 - g'g''' - nf'''f^{\text{IV}} = o$,

woraus m und n sehr leicht bestimmt werden.

§. 293. Beispiel. Es sey $g' = 7$, $f' = 2$, $g'' = 4$, $f'' = 9$, $g''' = 3$, $f^{iv} = 10$, oder die Lage der Punkte so wie Fig. 85., so ist $a = -7$; $b = -n.10$, und aus den letzten beiden Gleichungen $16 + m.8 + n.4 - 28 - n.20 = o$

$$9 + m.27 + n.81 - 21 - n.90 = o,$$

woraus $19m = -7n$, und $n = -\frac{19}{30}$,

$$m = \frac{7}{30} \text{ folgt.}$$

Da hier $\frac{1}{4}m^2 - n = \frac{49}{3600} + \frac{19}{30}$ positiv ist, so ist die Linie eine Hyperbel. Die Gleichung ist also $z^2 + \frac{7}{30}xz - \frac{19}{30}x^2 - 7z + \frac{19}{3}x = o$ und

$$z = \frac{7 - \frac{7}{30}x}{2} \pm \sqrt{\left\{\frac{49}{4} - \frac{143}{20}x + \frac{2329}{3600}x^2\right\}}.$$ Diese Gleichung zeigt, dass man HI in der Entfernung $= \frac{7}{2}$ der Abscissenlinie parallel ziehen und dann $KL = \frac{7}{60}HK$ nehmen muss, um den Durchmesser HM zu haben, welcher alle mit AC parallele Sehnen halbirt.

Die Gleichung zeigt ferner, dass z unmöglich ist, wenn x zwischen den Grenzen

$$x = \frac{12870 + 7933}{2329} = 8{,}93 = AN$$

und $x = \frac{12870 - 7933}{2329} = 2{,}12 = AP$ liegt; die Ordinaten NQ, PR sind also Tangenten der Hyperbel, und ihr Einschnitt in den Durchmesser HM bezeichnet die Endpunkte der unsern Ordinaten zugeordneten Axe. Die Figur zeigt auch den Mittelpunkt S, die Asymptote TW, UV, die Hauptaxe xz.

§. 294. Aufgabe. Es sind drei Punkte A, B, C (Fig. 86.) gegeben, durch welche die Linien der zweiten Ordnung gehen, und zwei Linien DE, DF, die sie in unbestimmten Punkten berühren soll; man sucht die Gleichung für die Curve.

Auflösung. Wenn die beiden Berührungslinien sich in D schneiden, so nehme man auf der einen die Abscissen $= x$, und ziehe mit der andern die Ordinaten $AG = z$ parallel. Ist nun für die drei gegebnen Punkte $DG = f'$, $GA = g'$, $DH = f''$, $HB = g''$, $DE = f'''$, $EC = g'''$, so giebt die allgemeine Gleichung, die $z^2 + mxz + nx^2 + az + bx + h^2 = o$ war, nun zur Bestimmung der fünf Grössen m, n, a, b, h, zuerst folgende drei Gleichungen:

$$g'^2 + mf'g' + nf'^2 + ag' + bf' + h^2 = o,$$
$$g''^2 + mf''g'' + nf''^2 + ag'' + bf'' + h^2 = o,$$
$$g'''^2 + mf'''g''' + nf'''^2 + ag''' + bf''' + h^2 = o.$$

Die zwei noch erforderlichen Gleichungen erhält man durch folgende Ueberlegung. Aus der allgemeinen Gleichung wird

$$z = -\frac{mx + a}{2} \pm \sqrt{\left((\tfrac{1}{4}m^2 - n)x^2 + (\tfrac{1}{2}ma - b)x + \tfrac{1}{4}a^2 - h^2\right)},$$ die mit z parallele Sehne wird also $= o$, oder diese Sehne wird zur Tangente, wenn $(\frac{1}{4}m^2 - n)x^2 + (\frac{1}{2}ma - b)x + \frac{1}{4}a^2 = h^2$ ist; dieses aber soll hier der Fall seyn für $x = o$, indem DF eine Tangente seyn soll, also ist

$\frac{1}{4}a^2 = h^2$, die vierte Gleichung zur Bestimmung der unbekannten Grössen. Eben so wird aus der allgemeinen Gleichung

$$x^2 + \frac{m}{n} xz + \frac{1}{n} z^2 + \frac{a}{n} z + \frac{b}{n} x + \frac{h^2}{n} = o,$$

$$x = -\left(\frac{b + mz}{2n}\right) \pm \sqrt{\left\{\left(\frac{m^2 - 4n}{4n^2}\right) z^2 + \left(\frac{bm}{2n^2} - \frac{a}{n}\right) z + \frac{b^2}{4n^2} - \frac{h^2}{n}\right\}}$$

und die Sehne (welche zur Tangente wird, wenn die Wurzelgrösse verschwindet) muss hier Tangente werden, wenn $z = o$ ist, oder DE muss Tangente seyn, also ist $\frac{b^2}{4n} = h^2$, die fünfte Gleichung, und wir hätten nun aus den drei ersten Gleichungen, die in folgende übergehn,

$$g'^2 + mf'g' + \frac{b^2}{4h^2} f'^2 + 2hg' + bf' + h^2 = o,$$

$$g''^2 + mf''g'' + \frac{b^2}{4h^2} f''^2 + 2hg'' + bf'' + h^2 = o,$$

$$g'''^2 + mf'''g''' + \frac{b^2}{4h^2} f'''^2 + 2hg''' + bf''' + h^2 = o,$$ nur noch die unbekannten Grössen m, b, h zu bestimmen, wozu sich, zumal wenn alles in Zahlen gegeben ist, durch algebraische Regeln gelangen lässt.

§. 295. Beispiel. Es sey $f' = 1$, $f'' = 5$, $f''' = 6$; $g' = 2$, $g'' = 1$, $g''' = 5$,

so sind die drei Gleichungen folgende:

$$4 + m \cdot 2 + \frac{b^2}{4h^2} + 4h + b + h^2 = o;$$

$$1 + m \cdot 5 + 25 \cdot \frac{b^2}{4h^2} + 2h + 5b + h^2 = o;$$

$$25 + m \cdot 30 + 36 \cdot \frac{b^2}{4h^2} + 10h + 6b + h^2 = o.$$

Wenn man aus diesen drei Gleichungen m eliminirt, so erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$18 - 45 \cdot \frac{b^2}{4h^2} + 16h - 5b + 3h^2 = o;$$

und $$-19 + 114 \cdot \frac{b^2}{4h^2} + 2h + 24b + 5h^2 = o.$$

Wenn man hier das Glied, welches $\frac{b^2}{4h^2}$ enthält, eliminirt, so wird

$$\frac{b^2}{4h^2} = \frac{19 - 2h - 24 \cdot b - 5h^2}{114} = \frac{18 + 16h - 5b + 3h^2}{45},$$

oder $1197 + 1914h + 510b + 567h^2 = o$,

also $$b = \frac{-1197 - 1914h - 567h^2}{510},$$

$$\frac{b^2}{4h^2} = \frac{3033 + 3546h + 873h^2}{102 \cdot 45},$$

$$\frac{b^2}{4h^2} = 0{,}66078 + 0{,}77255\,h + 0{,}19020\,h^2,$$

$$b = -2{,}34706 - 3{,}75294\,h - 1{,}11177\,h^2.$$

So erhält man für b^2 zwei Werthe

$$b^2 = (2,34706 + 3,75294\,h + 1,11177\,h^2)^2,$$

und $b^2 = 2,64312\,h^2 + 3,09020\,h^3 + 0,76080\,h^4$.

Beide Werthe gleich gesetzt, geben für h eine Gleichung vom vierten Grade, nämlich

$$5,5087 + 17,6165\,h + 19,3033\,h^2 + 8,3448\,h^3 + 1,2360\,h^4,$$
$$2,6431\,h^2 + 3,0902\,h^3 + 0,7608\,h^4;$$

oder $0 = 5,5087 + 17,6165\,h + 16,6602\,h^2 + 5,2546\,h^3 + 0,4752\,h^4$;

oder $0 = h^4 + 11,0577 \cdot h^3 + 35,0593 \cdot h^2 + 37,0717 \cdot h + 11,5924$.

Es erhellt sogleich, dass h nie positiv werden kann; setze ich also $h = -k$, so ist

$$0 = k^4 - 11,0577 \cdot k^3 + 35,0593 \cdot k^2 - 37,0717 \cdot k + 11,5924,$$

und man überzeugt sich leicht, dass ein Werth von k zwischen 0 und 1 liegt, ja auch, dass er zwischen $k = 0,5$ und $k = 0,6$ liegen muss,

indem $k = 0,5$ giebt $+ 0,5017$ als Summe der Gleichung,

und $k = 0,6$ giebt $- 0,2881$ als Summe der Gleichung; der richtige Werth von k, welcher 0 geben soll, liegt also zwischen diesen. Ich setze daher $k = 0,5 + u$, wo u gewiss kein volles Zehntel beträgt, so ist

$$\begin{aligned}
k^4 &= 0,0625 + 0,500 \cdot u + 1,50 \cdot u^2 + 2,0 \cdot u^3 + u^4;\\
-11,0577 \cdot k^3 &= -1,3822 - 8,293 \cdot u - 16,59 \cdot u^2 - 11,1 \cdot u^3;\\
+35,0593 \cdot k^2 &= +8,7648 + 35,059 \cdot u + 35,06 \cdot u^2;\\
-37,0717 \cdot k &= -18,5358 - 37,072 \cdot u\\
+11,5924 &= +11,5924
\end{aligned}$$

Die Summe soll $= 0$ seyn, also

$$0 = + 0,5017 - 9,806 \cdot u + 19,97 \cdot u^2 - 9,1 \cdot u^3 + u^4.$$

Da wegen des geringen Werthes von u hier beinahe

$0,5017 - 9,806 \cdot u = 0$ wird, so ist

$u = 0,06 + v$, und demnach, wenn ich die sehr klein ausfallenden Glieder weglasse

$$\begin{aligned}
u^4 &= 0,0000 + \text{etc.}\\
-9,1 \cdot u^3 &= -0,0011 - 0,07 \cdot v - 1,.. v^2 - 9,.. v^3;\\
+19,97 \cdot u^2 &= +0,0499 + 0,090 \cdot v - 20,.. v^2;\\
-9,806 \cdot u &= -0,4903 - 9,81 \cdot v;\\
+0,5017 &= +0,5017.
\end{aligned}$$

also $0 = + 0,0602 - 7,88 \cdot v - 21,0 \cdot v^2$.

Da v hier nur Tausendtel bedeuten kann, so lasse ich die übrigen Glieder weg, und v wird $= 0,007 + w$

$$\begin{aligned}
21,0 \cdot v^2 &= 0,0010 +\\
-7,88 \cdot v &= -0,0552 - 7,88 \cdot w\\
+0,0602 &= +0,0602\\
0 &= +0,0060 - 7,88 \cdot w,\\
w &= 0,0008,
\end{aligned}$$

also $k = 0,5578$.

Eine zweite Wurzel der Gleichung für k liegt zwischen $k = 1$ und $k = 2$. Sie ist $= 1,1033$. Die dritte Wurzel ist $k = 2,899$, die vierte $k = 6,5056$.

Diese vier möglichen Werthe lassen uns schliessen, dass es nicht eine, sondern vier Linien der zweiten Ordnung giebt, die sämmtlich den Bedingungen Genüge leisten. Wir wollen sie einzeln betrachten.

1. Es sey $k = 0{,}558$, also $h = -0{,}558$, dann wird $a = -1{,}116$; $b = -0{,}599$; $n = \frac{b^2}{4h^2} = 0{,}289$; $m = -0{,}884$. Die Gleichung für diese erste Linie ist also

$z^2 - 0{,}884\, xz + 0{,}289\, x^2 - 1{,}116\, z - 0{,}599\, x + 0{,}311 = 0$. Sie ist also eine Ellipse, deren Einschnittspunkte in DE durch $x = 1{,}037$ angegeben werden, indem sie dort zusammen fallen. Es ist nämlich $0{,}289\, x^2 - 0{,}599\, x + 0{,}311 = 0$ einerlei mit $x^2 - 2{,}073\, x + 1{,}076 = 0$, und diese Gleichung ist $(x - 1{,}037)^2 = 0$, und darauf eben beruhet es, dass die Ellipse berührt. Eben so finden wir auf DF den Berührungspunkt durch $z^2 - 1{,}116\, z + 0{,}311 = (z - 0{,}558)^2 = 0$, und für ihn ist $z = 0{,}558$. In Fig. 86. fallen die Berührungspunkte bei G, K, und $GKCL$ ist diese Ellipse.

2. Es sey als zweiter Werth $k = 1{,}103$; $h = -1{,}103$, $a = -2{,}206$; $b = +0{,}440$; $n = 0{,}040$; $m = -0{,}642$. Die Gleichung

$z^2 - 0{,}642\, xz + 0{,}040\, x^2 - 2{,}206\, z + 0{,}440\, x + 1{,}206 = 0$ gehört einer Hyperbel, u. es ist $0{,}04\, x^2 + 0{,}440\, x + 1{,}216 = (0{,}2\, x + 1{,}102)^2 = 0$, daher $x = -5{,}51$ die Gleichung für den einen $z = 1{,}103$ die Gleichung für den andern Berührungspunkt. In Fig. 86 ist M der eine Berührungspunkt, der andre liegt jenseits D, und die zweite Hälfte der Hyperbel läge unterhalb der Abscissenlinie, $PBMA$‘O ist die Hyperbel.

3. Der dritte Werth $h = -2{,}899$ giebt $a = -5{,}798$; $b = -0{,}809$; $n = 0{,}0195$; $m = -0{,}009$. Die Gleichung ist also wieder für eine Ellipse

$z^2 - 0{,}009\, xz + 0{,}0195\, x^2 - 5{,}798\, z - 0{,}809\, x + 8{,}404 = 0$, und für die Berührungspunkte $z = 2{,}899$; $x = 20{,}76$. Diese lange Ellipse berührt in Q und R, QL'' ist ein Durchmesser, S‘$QBRT$ stellt die Ellipse dar.

4. Der vierte Werth $h = -6{,}506$, giebt $a = -13{,}012$; $b = -24{,}989$; $n = 3{,}685$; $m = 0{,}5$. Die Gleichung

$z^2 + 0{,}5\, xz + 3{,}685\, x^2 - 13{,}012\, z - 24{,}989\, x + 42{,}328 = 0$, gehört abermals einer Ellipse, deren Berührungspunkte durch $x = 3{,}39$ und $z = 6{,}506$ angegeben werden. Diese vierte Curve berührt in F und U, FL''' ist ein Durchmesser, $VFAUBC$ die Ellipse selbst.

Zehnter Abschnitt.

Beispiele von Aufgaben, die auf Linien der zweiten Ordnung führen.

§. 296. **Aufgabe.** Es sey ABC ein Dreieck (Fig. 87.), in welchem eine die Grundlinie schneidende Linie GF willkürlich gezogen ist. Man ziehe nun mehrere der Grundlinie parallele Linien DE, de, die von GF in H, h geschnitten werden, und ziehe von den Durchschnittspunkten H, h, Linie HI, hi unter sich parallel, und so gross, dass allemal $HI^2 = DH \,.\, HE$; $hi^2 = dh \,.\, he$ sey. Der geometrische Ort der Punkte I, i soll bestimmt werden.

Auflösung. Die Linie GF sey unter dem Winkel $GFC = \eta$ gegen die Grundlinie geneigt, und $GHI = \zeta$; im Dreieck aber $BC = a$, $B = \beta$, $C = \gamma$, $AG = f$, $GH = x$, $HI = z$, so ist $GE = \frac{x \,.\, Sin\, \eta}{Sin\, \gamma}$;

$$HE = \frac{x \cdot Sin(\gamma + \eta)}{Sin\,\gamma}, \quad DE = \left(f + \frac{x \cdot Sin\,\eta}{Sin\,\gamma}\right) \cdot \frac{Sin(\beta + \gamma)}{Sin\,\beta}, \text{ also}$$

$$DH = DE - HE = \frac{f \cdot Sin(\beta + \gamma)}{Sin\,\beta} + \frac{x(Sin\,\eta \cdot Sin(\beta + \gamma) - Sin\,\beta \cdot Sin(\gamma + \eta))}{Sin\,\beta \cdot Sin\,\gamma};$$

und $z^2 = DE - HE$

$$= \frac{xf \cdot Sin(\beta + \gamma) \cdot Sin(\gamma + \eta)}{Sin\,\beta \cdot Sin\,\gamma} + \frac{x^2(Sin\,\eta \cdot Sin(\beta + \gamma) - Sin\,\beta \cdot Sin(\gamma + \eta))\,Sin(\gamma + \eta)}{Sin\,\beta \cdot Sin^2\,\gamma};$$

oder $z^2 = \frac{f \cdot x \cdot Sin(\beta + \gamma) \cdot Sin(\gamma + \eta) - x^2 \cdot Sin(\eta + \gamma) \cdot Sin(\beta - \eta)}{Sin\,\beta \cdot Sin\,\gamma}$.

Der geometrische Ort wird also eine Parabel, wenn $\beta = \eta$, oder GF mit AB parallel ist; er wird eine Ellipse, wenn $\beta > \eta$ ist, oder der Durchschnittspunkt L zwischen A und B oder über B hinaus liegt; er wird endlich eine Hyperbel, wenn L jenseits A liegt, oder $\beta < \eta$ ist. GL ist die den Ordinaten HI, hi zugeordnete Axe; denn z wird $= o$ für $x = o$, und z wird wieder $= o$ für $x = \frac{f \cdot Sin(\beta + \gamma)}{Sin(\beta - \eta)}$, das ist für $x = GL$, weil $AGL = (\eta + \gamma)$, und $ALG = \beta - \eta$ ist.

§. 297. Aufgabe. Wenn man an einen Kreis (Fig. 88.), dessen Halbmesser AB ist, Tangenten DE, de zieht, welche den verlängerten Durchmesser in E, e schneiden; dann aber $EF = DE$, $ef = de$ senkrecht errichtet, den geometrischen Ort der Punkte F, f anzugeben.

Auflösung. Der geometrische Ort ist eine gleichseitige Hyperbel, deren halbe Axe dem Halbmesser des Kreises gleich ist. Denn, nenne ich diesen Halbmesser $= a$, die unbestimmte Entfernung $AE = x$, so ist $DE = \sqrt{(x^2 - a^2)}$ und folglich $EF = z = \sqrt{(x^2 - a^2)}$, welches die Gleichung für die gleichseitige Hyperbel ist (§. 173.).

§. 298. Aufgabe. Die beiden gleich langen Linien BA, BD (Fig. 89.), sind in B so mit einander verbunden, dass der Winkel ABD jede Grösse annehmen kann. Während nun A unverrückt bleibt, rückt D auf der geraden Linie AD oder ihrer Verlängerung fort. Welche Curve beschreibt der gegebne Punkt E, der irgendwo auf BD liegt?

Auflösung. Die Figur stellt die Linien AB, BD noch in einer zweiten Stellung dar, indem auch $Ab = bd = AB = BD$, $be = BE$ ist. Um die veränderliche Lage des Punktes E zu bestimmen, sey $AB = BD = a$, $DE = b$, und E durch Coordinaten $AX = x$, $XE = z$ bestimmt. Nenne ich zugleich den veränderlichen Abstand $AD = u$, so ist $z : b = \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}u^2)} : a$, also $a^2 z^2 = a^2 b^2 - \frac{1}{4} b^2 u^2$, und zugleich $z : u - x = \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}u^2)} : \frac{1}{2}u$, also $\frac{1}{4}u^2 \cdot z^2 = (u - x)^2 (a^2 - \frac{1}{4}u^2)$.

Aus der ersten Gleichung wird $\frac{1}{4}u^2 = a^2 - \frac{a^2 z^2}{b^2}$, und durch diesen Werth geht die zweite in $a^2 z^2 - \frac{a^2 z^4}{b^2} = \frac{a^2 z^2}{b^2}\left(-x + 2\sqrt{\left(a^2 - \frac{a^2 z^2}{b^2}\right)}\right)^2$ über, oder es wird $\sqrt{(b^2 - z^2)} = -x + \frac{2a}{b}\sqrt{(b^2 - z^2)}$, das ist

$$x^2 = \frac{(2a - b)^2}{b^2}(b^2 - z^2).$$

Die Curve wird also eine Ellipse, deren mit x parallele halbe Axe $= (2a - b)$, die auf AD senkrechte halbe Axe $= b$ ist.

§. 299. Aufgabe. In dem gegebnen Kreise LFD (Fig. 89.*) ist eine Sehne BD und ein Punkt A in ihr gegeben; man sucht einen andern Punkt E so zu bestimmen, dass $AE^2 = LE \,.\, EM + AB \,.\, BD$ sey, wenn LM eine durch E gezogne Sehne ist.

Auflösung. Es sey E einer der gesuchten Punkte, so ist, welche Sehne man auch durch ihn ziehen mag, $LE \,.\, EM$ immer ein gleiches Product; es ist daher am bequemsten, den von E durch den Mittelpunkt G gezognen Durchmesser NP zu betrachten, und $AE^2 = NE \,.\, EP + AB \,.\, BD$ als die zu erfüllende Bedingung anzusehen.

Nenne ich nun des Kreises Halbmesser $= r$, $GA = a$, $BA = b$, $BD = c$, und bestimme des Punktes E Lage durch Coordinaten $GX = x$, $EX = z$, welche senkrecht auf einander und so genommen sind, dass die x auf GA oder ihrer Verlängerung genommen werden, so ist

$$AE^2 = (a + x)^2 + z^2; \quad EG^2 = x^2 + z^2,$$
$$NE \,.\, EP = (r - EG) \,.\, (r + EG) = r^2 - x^2 - z^2,$$

und es soll also $(a + x)^2 + z^2 = r^2 - x^2 - z^2 + b \,.\, c$ seyn, das ist

$$2z^2 = r^2 + bc - a^2 - 2ax - 2x^2,$$

$$\text{oder } z^2 = \frac{r^2 + bc - a^2}{2} - ax - x^2.$$

Die Gleichung bestimmt offenbar einen Kreis. Setze ich darin $\frac{1}{2}a + x = u$, oder verlege den Anfangspunkt der Abscissen u nach C, wo GA halbirt ist, so wird $z^2 = \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}bc - \frac{1}{4}a^2 - u^2$, und C ist also der Mittelpunkt des Kreises, und sein Halbmesser $= \sqrt{\left(\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}bc - \frac{1}{4}a^2\right)}$.

§. 300. Aufgabe. Auf dem Umfange der Ellipse wählt man einen willkürlichen Punkt D, nach welchem man von beiden Brennpunkten aus die geraden Linien MD, ND zieht; man sucht (Fig. 90) den geometrischen Ort für den Mittelpunkt des Kreises, der zugleich die Linien MD, ND und die Hauptaxe AB berührt.

Auflösung. Der unbestimmte Punkt D sey durch Abscissen $= x$ auf der Hauptaxe vom Mittelpunkt an gerechnet und durch senkrechte Ordinaten

$= z$ angegeben, so wird (§. 222.) $MD = a + \frac{x\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}$;

$ND = a - \frac{x\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}$; $Sin\, DMN = \frac{z \cdot a}{a^2 + x\sqrt{(a^2 - b^2)}}$;

$Cos\, DMN = \frac{a(x + \sqrt{(a^2 - b^2)})}{a^2 + x\sqrt{(a^2 - b^2)}}$; $Sin\, DNM = \frac{z \cdot a}{a^2 - x\sqrt{(a^2 - b^2)}}$;

$Cos\, DNM = \frac{a(-x + \sqrt{(a^2 - b^2)})}{a^2 - x\sqrt{(a^2 - b^2)}}$.

Des Kreismittelpunktes U Lage werde durch Coordinaten $CV = u$, $VU = v$ bestimmt, so ist

$$v = (u + \sqrt{(a^2 - b^2)})\, tang\, \tfrac{1}{2} DMN = (-u + \sqrt{(a^2 - b^2)})\, tang\, \tfrac{1}{2} DNM,$$

und da $tang\, \frac{1}{2} DNM = \frac{Sin\, DNM}{1 + Cos\, DNM} = \frac{z \cdot a}{(a - x)\{a + \sqrt{(a^2 - b^2)}\}}$,

$$tang\, \tfrac{1}{2} DMN = \frac{Sin\, DMN}{1 + Cos\, DMN} = \frac{z \cdot a}{(a + x)\{a + \sqrt{(a^2 - b^2)}\}},$$

so wird $\frac{u + \sqrt{(a^2 - b^2)}}{a + x} = \frac{-u + \sqrt{(a^2 - b^2)}}{a - x}$,

also $2au = 2x\sqrt{(a^2 - b^2)}$; $x = \frac{a u}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}$; $a + x = \frac{a(u + \sqrt{(a^2 - b^2)})}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}$,

$$a - x = \frac{a(-u + \sqrt{(a^2 - b^2)})}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}.$$

Da nun $v = \frac{a z (u + \sqrt{(a^2 - b^2)})}{(a + x)(a + \sqrt{(a^2 - b^2)})} = \frac{(u + \sqrt{(a^2 - b^2)})}{a + \sqrt{(a^2 - b^2)}}\, b \sqrt{\frac{a - x}{a + x}}$,

also $v^2 = \left\{\frac{u + \sqrt{(a^2 - b^2)}}{a + \sqrt{(a^2 - b^2)}}\right\} b^2 \cdot \left\{\frac{-u + \sqrt{(a^2 - b^2)}}{u + \sqrt{(a^2 - b^2)}}\right\}$,

oder $v^2 = b^2 \frac{\{a^2 - b^2 - u^2\}}{\{a + \sqrt{(a^2 - b^2)}\}^2}$ ist, so ist der geometrische Ort des Kreismittelpunktes eine Ellipse, deren halbe grosse Axe $= \sqrt{(a^2 - b^2)} = a \cdot e$,

halbe kleine Axe $= \frac{b\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a + \sqrt{(a^2 - b^2)}} = \frac{b e}{1 + e}$

ist, wenn ich $\sqrt{(a^2 - b^2)} = a \cdot e$ setze.

Der Abstand der Brennpunkte dieser Ellipse vom Mittelpunkte ist $= a e \sqrt{\frac{2e}{1 + e}}$. Der zweiten Ellipse Abstand von der ersten Ellipse ist

für die Endpunkte der grossen Axe $= a(1 - e)$,

für die Endpunkte der kleinen Axe $= \frac{b}{1 + e} = a\sqrt{\left(\frac{1 - e}{1 + e}\right)}$, so dass diese Abstände sich zu einander wie $\sqrt{(1 - e^2)}$ zu 1 oder wie b zu a verhalten.

§. 301. Nicht bloss ist die halbe grosse Axe $= ae$, sondern die Gleichungen $x = \frac{au}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} = \frac{u}{e}$ zeigt auch, dass jede Abscisse $u = ex$ ist, oder dass für irgend einen Punkt D der ersten Ellipse der Mittelpunkt U unsers Kreises so liegt, dass für ihn die Abscisse $= ex$ ist. Eben so ist auch jede Ordinate $v = \frac{ze}{1+e}$ so gut, wie die kleine Axe $= \frac{be}{1+e}$ war; denn

$$v^2 = \frac{b^2 (a^2 - b^2 - u^2)}{(a + \sqrt{(a^2 - b^2)})^2} \text{ giebt } v^2 = \frac{b^2 e^2 (a^2 - x^2)}{a^2 (1+e)^2} = \frac{e^2 z^2}{(1+e)^2}.$$

Da DU den Winkel NDM halbirt, so ist sie (§. 223.) zugleich die Normallinie der grossen Ellipse und man findet allemal die Lage des Punktes U, wenn man die Normallinie für den Punkt D zieht, und sie durch die Senkrechte VU, für welche $VC = e \,.\, CX$ ist, schneidet. Der Abstand DU ist dann

$$= \sqrt{((x-u)^2 + (z-v)^2)} = \sqrt{\left(x^2 (1-e)^2 + z^2 \left(1 - \frac{e}{1+e}\right)^2\right)}$$
$$= \sqrt{\left(x^2 (1-e)^2 + \frac{z^2}{(1+e)^2}\right)},$$

oder weil $z^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2)$ ist,

$$DU = \sqrt{\left\{x^2 (1-e)^2 + \frac{(1-e)}{1+e}(a^2 - x^2)\right\}} = \sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)} \cdot \sqrt{\{-x^2 e^2 + a^2\}}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)} \cdot \sqrt{(a^2 - u^2)}.$$

Die Subnormallinie der grossen Ellipse ist (§. 232.) $= \frac{b^2 x}{a^2}$, die Normale schneidet also in der Entfernung $= x - \frac{b^2 x}{a^2} = e^2 x$ vom Mittelpunkte in die Axe ein. Für die kleine Ellipse würde demnach die Subnormallinie $= \frac{b^2 e^2}{(1+e)^2} \cdot \frac{u}{a^2 e^2} = \frac{b^2 ex}{a^2 (1+e)^2}$, Abstand des Einschnitts der Normallinie vom Mittelpunkte $= u - \frac{b^2 ex}{a^2 (1+e)^2} = ex\left(1 - \frac{1-e}{1+e}\right) = \frac{2 e^2 x}{1+e}$.

Die Normallinie beider Ellipsen sind also nur da einerlei, wo sie mit den Axen zusammen fallen.

§. 302. Aufgabe. Es werden (Fig. 91.) nach einem willkürlichen Punkte D der Hyperbel Linien von beiden Brennpunkten M, N aus gezogen; man sucht den geometrischen Ort für den Mittelpunkt eines Kreises, welcher zugleich die Linien MD, ND und die Hauptaxe berührt.

Auflösung. Bestimmt man wieder die Lage des Punktes D durch

Abscissen $= x$ und Ordinaten $z = \frac{b}{a} \sqrt{(x^2 - a^2)}$, so wird

$$MD = a + \frac{x \sqrt{(a^2 + b^2)}}{a} = a + ex,$$

$$ND = -a + \frac{x \sqrt{(a^2 + b^2)}}{a} = ex - a,$$ wenn ich den Abstand des Brennpunkts vom Mittelpunkte $= a.e$ nenne.

Ferner ist $Sin\,DMN = \frac{z}{a + ex}$; $Cof\,DMN = \left(\frac{ae + x}{a + ex}\right)$,

$$Sin\,DNM = \frac{z}{ex - a};\ Cof\,DMN = \frac{x + ae}{ex - a}.$$

Wenn nun die Coordinaten für den Kreismittelpunkt wieder u und v heissen, so ist $tang\,\frac{1}{2}\,DMN = \frac{v}{ae + u}$, und $tang\,\frac{1}{2}\,DNM = \frac{v}{ae - u}$; also

$v = (ae - u) . tang\,\frac{1}{2}\,DNM = (ae + u) . tang\,\frac{1}{2}\,DMN$, das ist

$v = \frac{(ae - u)\,z}{(x + a)\,(e - 1)} = \frac{(ae + a)\,z}{(a + x)\,(e + 1)}$. Es wird also $u = a$ für jeden Werth von x, und der Mittelpunkt liegt also immer in der durch den Scheitel B oder A auf der Hauptaxe senkrecht errichteten Linie, v aber wird $= b \sqrt{\frac{x - a}{x + a}}$ und erhält für jeden Punkt D einen andern Werth.

Grösser als $v = b$ kann v niemals werden und erreicht diesen Werth erst, wenn x unendlich wird, und der Kreis, dessen Mittelpunkt durch v bestimmt wird, berührt dann die beiden durch M, N mit der Asymptote parallel gezognen Linien, deren senkrechter Abstand von der Asymptote $= b$ ist.

§. 303. Man könnte bei der Ellipse auch nach dem geometrischen Orte fragen, in welchem sich der Mittelpunkt desjenigen Kreises befindet, welcher die jenseits AB verlängerten Linien DM, DN und zugleich AB selbst berührt. Bedeutete auch da wieder u, v die Coordinaten des Kreismittelpunktes, so ist nun $v = (ae + u) . Cotang\,\frac{1}{2}\,DMN = (ae - u) . Cotang\,\frac{DNM}{2}$,

also $(ae + u)\,\frac{(a - x)(1 + e)}{z} = (ae - u)\,\frac{(a + x)(1 + e)}{z} = a$,

oder $u = + ex$; $v = (ae + u)\,(1 + e)\,\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a - x}{a + x}}$;

$$v = (1 + e)\,\frac{a}{b}\,\sqrt{(a^2 e^2 - u^2)}.$$

Auch dieser geometrische Ort ist also eine Ellipse, deren eine halbe Axe

$= a e$, die andre $= a e \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = \frac{b e}{1-e}$ ist. Hier ist also die grössere halbe Axe die auf AB senkrechte, und diese kann viel grösser als b seyn.

§. 304. Aufgabe. Wenn man (Fig. 92.) die Radien von beiden Brennpunkten der Ellipse aus nach irgend einem Punkte D der Ellipse zieht, und nun die grosse Axe über ihren Endpunkt hinaus, und auch den einen Radius über seinen Endpunkt hinaus verlängert, den geometrischen Ort für den Mittelpunkt desjenigen Kreises zu finden, der den einen Radius und zugleich die verlängerte Axe und den verlängerten andern Radius berührt.

Auflösung. Wenn ich die vorigen Bezeichnungen beibehalte, jetzt aber für den hier zu bestimmenden Mittelpunkt die Coordinaten $CV = u$, $VU = v$ nenne, so ist $DNU = \frac{1}{2} DNB$, also $tang\, DNU = Cotang\, \frac{1}{2} DNM$; $GDU = \frac{1}{2}(DMN + DNM)$. Der Halbmesser unsers Kreises ist
$v = (u - ae)\, Cotang\, \frac{1}{2} DNM$, und auch $= (DN - (u - ae))\, tang\, UDN$,
$= (a(1+e) - u - ex)\, tang\, UDN$.

Es ist aber $Sin\,(DMN + DNM) = \frac{z\{2ea\}}{a^2 - e^2 x^2}$,

$$Cos\,(DMN + DNM = \frac{2a^2 e^2 - a^2 - e^2 x^2}{a^2 - e^2 x^2}, \text{ also}$$

$$tang\, \tfrac{1}{2}(DMN + DNM) = \frac{2aez}{2e^2(a^2 - x^2)} = \frac{b}{e\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

Da nun zugleich $Cotang\, \frac{1}{2} DNM = \frac{(a-x)(1+e)}{z} = \sqrt{\frac{(1+e)}{(1-e)}} \cdot \sqrt{\left(\frac{a-x}{a+x}\right)}$,

so wird der doppelte Werth von v,

$$v = (u - ae)\sqrt{\left\{\frac{(1+e)(a-x)}{(1-e)(a+x)}\right\}} = (a(1+e) - u - ex)\frac{a\sqrt{(1-e^2)}}{e\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

Wir erhalten also zur Bestimmung von u die Gleichung

$$e(u - ae)(a - x) = (a(1+e) - u - ex)\, a(1-e), \text{ oder } u = a,$$

v wird also $= a\sqrt{\frac{(1-e^2)(a-x)}{a+x}}$, und es wird $v = o$, wenn $x = a$ ist oder der Punkt D in B liegt, $v = a\sqrt{(1-e^2)} = b$, wenn $x = o$, oder D im Endpunkte der kleinen Axe ist; endlich $v = \infty$, wenn $x = -a$ ist oder D mit A zusammen fällt.

Die Kreismittelpunkte liegen also alle in der unendlich verlängerten Tangente BU.

§. 305. Für die Hyperbel liesse sich diese Betrachtung eben so anstellen. Will man da den Mittelpunkt des Kreises bestimmen, der die über D hinaus verlängerte MD, die Axe und den Radius ND berührt, so ist dieses Mittelpunkts Ordinate $v = (u - ae)\, tang\, \frac{1}{2} DNF$ und zugleich

$v = (ND - u + ae)\ tang\ \frac{1}{2}(DNM + DMN)$. Da nun

$$tang\ \tfrac{1}{2}\ DNF = \frac{z}{(x-a)(1+e)} = \sqrt{\frac{e-1}{1+e}} \cdot \sqrt{\frac{x+a}{x-a}};$$

$$tang\ \tfrac{1}{2}(DNM + DMN) = \frac{a\,e\,z}{a^2(e^2-1)},$$ ist, so wird

$$v = (u - a\,e)\sqrt{\left\{\frac{(e-1)(x+a)}{(1+e)(x-a)}\right\}} = \frac{(ex - a + ae - u)\,e\sqrt{(x^2-a^2)}}{a \cdot \sqrt{(e^2-1)}},$$

oder $u = e\,x$ und

$v^2 = \frac{(e-1)}{(e+1)}(u^2 - a^2 e^2)$. Hier liegen also die Mittelpunkte auf einer Hyperbel, deren mögliche Axe $= a\,e$ ist, und deren Asymptotenwinkel $= \zeta$ durch $tang\ \zeta = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}$ bestimmt wird.

Diese Formeln sind ganz denen in §. 288. entsprechend.

§. 306. Aufgabe. Es sind (Fig. 93.) vier Linien *BA*, *AC*, *CD*, *DB* gegeben; die Lage des Punktes *P* soll so bestimmt werden, dass die von ihm unter gegebnen Winkeln gegen jene vier Linien gezogenen geraden Linien *PQ*, *PS*, *PR*, *PT*, die Rechtecke $PQ \cdot PR : PS \cdot PT = m : 1$, oder $PQ \cdot PR = m \cdot PS \cdot PT$ geben und *m* eine unveränderliche und gegebne Zahl sey.

Auflösung. Da in dem Viereck *ABDC* alles bekannt ist, so will ich die Winkel $CAB = A$, $ABD = B$, $ACD = C$, $CDB = D$ und die Seiten $AB = f$, $AC = g$ nennen; die Winkel, welche die von *P* ausgehenden Linien mit den vier Seiten machen, mögen $PQB = \alpha$, $PSA = \beta$, $PRC = \gamma$, $PTD = \delta$ heissen. Stellt nun *P* den gesuchten Punkt vor, und ist dessen Lage durch $BAP = \varphi$, $AP = \varrho$ bestimmt, so erhält man sogleich

$$PQ = \frac{\varrho \cdot Sin\ \varphi}{Sin\ \alpha} \text{ und } PS = \frac{\varrho \cdot Sin\ (A - \varphi)}{Sin\ \beta}.$$

Da nun auch $AI = \frac{g \cdot Sin\ C}{Sin\ (A + C - \varphi)}$, $PI = \varrho - \frac{g \cdot Sin\ C}{Sin\ (A + C - \varphi)}$,

so wird $PR = \frac{\{\varrho \cdot Sin\ (A + C - \varphi) - g \cdot Sin\ C\}}{Sin\ \gamma}$; und eben so da

$$AH = \frac{f \cdot Sin\ B}{Sin\ (B + \varphi)},\quad PH = \frac{f \cdot Sin\ B - \varrho \cdot Sin\ (B + \varphi)}{Sin\ (B + \varphi)},$$ ist,

$$PT = \frac{f \cdot Sin\ B - \varrho \cdot Sin\ (B + \varphi)}{Sin\ \delta}.$$

Es ist also $PQ \cdot PR = \frac{\varrho^2 \cdot Sin\ \varphi \cdot Sin\ (A + C - \varphi) - g\,\varrho \cdot Sin\ C \cdot Sin\ \varphi}{Sin\ \alpha \cdot Sin\ \gamma}$,

und $PS \cdot PT = \frac{\varrho \cdot f \cdot Sin\,B \cdot Sin\,(A - \varphi) - \varrho^2 \cdot Sin\,(A - \varphi) \cdot Sin\,(B + \varphi)}{Sin\,\beta \cdot Sin\,\delta}$,

und die Lage des Punktes P wird durch die Gleichung

$$\frac{\varrho \cdot Sin\,\varphi \cdot Sin\,(A + C - \varphi) - g \cdot Sin\,C \cdot Sin\,\varphi}{Sin\,\alpha \cdot Sin\,\gamma}$$

$$= \frac{m\,f \cdot Sin\,B \cdot Sin\,(A - \varphi) - m\,\varrho \cdot Sin\,(A - \varphi) \cdot Sin\,(B + \varphi)}{Sin\,\beta \cdot Sin\,\delta}$$

bestimmt.

Um diese Gleichung besser zu übersehen, will ich $\frac{m \cdot Sin\,\alpha \cdot Sin\,\gamma}{Sin\,\beta \cdot Sin\,\delta} = M$ setzen und die trigonometrischen Grössen entwickeln; dadurch wird

$$\varrho \cdot Sin\,\varphi \cdot Sin(A + C) \cdot Cos\,\varphi - \varrho \cdot Sin^2\,\varphi \cdot Cos\,(A + C) - g \cdot Sin\,C \cdot Sin\,\varphi$$
$$= M \cdot f \cdot Sin\,B \cdot Sin\,A \cdot Cos\,\varphi - M \cdot f \cdot Sin\,B \cdot Cos\,A \cdot Sin\,\varphi$$
$$- M \cdot \varrho \cdot Sin\,A \cdot Sin\,B \cdot Cos^2\,\varphi + M \cdot \varrho \cdot Sin(B - A) \cdot Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi$$
$$+ M \cdot \varrho \cdot Cos\,A \cdot Cos\,B \cdot Sin^2\,\varphi.$$

Ziehe ich endlich die senkrechte Linie PV und nenne $AV = x$, $VP = z$, so ist $x = \varrho \cdot Cos\,\varphi$, $z = \varrho \cdot Sin\,\varphi$ und $\frac{z}{x} = tang\,\varphi$, also

$$z \cdot Sin\,(A + C) - \frac{z^2}{x} \cdot Cos\,(A + C) - \frac{z\,g}{x} \cdot Sin\,C = M\,f \cdot Sin\,B \cdot Sin\,A$$
$$- M\,f\,\frac{z}{x} \cdot Sin\,B \cdot Cos\,A - M\,x \cdot Sin\,A \cdot Sin\,B + M\,z \cdot Sin(B - A)$$
$$+ \frac{M\,z^2}{x} \cdot Cos\,A \cdot Cos\,B.$$

Diese Gleichung zeigt, dass der geometrische Ort des Punktes P eine Linie der zweiten Ordnung ist.

§. 307. Wir hätten auch aus der zuerst zwischen ϱ und φ gefundenen Gleichung schon erhalten,

$$\varrho = \frac{M \cdot f \cdot Sin\,B \cdot Sin\,(A - \varphi) + g \cdot Sin\,C \cdot Sin\,\varphi}{Sin\,\varphi \cdot Sin\,(A + C - \varphi) + M \cdot Sin\,(A - \varphi) \cdot Sin\,(B + \varphi)},$$

und daraus

$$PI = \frac{M\{f \cdot Sin\,B \cdot Sin(A + C - \varphi) - g \cdot Sin\,C \cdot Sin(B + \varphi)\} \cdot Sin\,(A - \varphi)}{Sin(A + C - \varphi) \cdot \{Sin\,\varphi \cdot Sin(A + C - \varphi) + M \cdot Sin\,(A - \varphi) \cdot Sin\,(B + \varphi)\}};$$

$$PH = \frac{\{f \cdot Sin\,B \cdot Sin\,(A + C - \varphi) - g \cdot Sin\,C \cdot Sin\,(B + \varphi)\} \cdot Sin\,\varphi}{Sin\,(B + \varphi) \cdot \{Sin\,\varphi \cdot Sin(A + C - \varphi) + M \cdot Sin\,(A - \varphi) \cdot Sin(B + \varphi)\}},$$

oder $PH = \frac{PI \cdot Sin\,\varphi \cdot Sin\,(A + C - \varphi)}{M \cdot Sin\,(A - \varphi) \cdot Sin\,(B + \varphi)}$.

Wäre also die Lage des Punktes P für einen einzigen Werth von φ gegeben, so würde sich für jeden willkürlich angenommenen Werth von φ die

Lage des Punktes P leicht berechnen lassen. Und so führt uns diese Betrachtung zu einer nicht so gar schwierigen Methode, um die Linie der zweiten Ordnung zu finden, welche durch fünf gegebne Punkte geht. Man verbindet nämlich vier der gegebnen Punkte A, B, D, C durch gerade Linien und zieht von dem fünften P aus gegen jede jener vier Linien unter bestimmten Winkeln α, β, γ, δ, wofür es am bequemsten ist, jetzt rechte Winkel anzunehmen, die Linien PQ, PR, PS, PT. Wenn man nach einem Massstabe die verhältnissmässige Grösse dieser Linien bestimmt, so wird m gefunden, welches $= M$ ist, wenn $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90^\circ$ genommen worden. Da man nun auch $PAB = \varphi$ in diesem einzelnen Falle kennt, so wird dadurch das Verhältniss der PH zu PI bekannt, und um jeden andern Punkt p zu bestimmen, berechnet man für den willkürlichen, aber nun als gegeben anzusehenden Winkel $pAB = \varphi'$ den Werth von $\frac{Sin\,\varphi' \,.\, Sin\,(A + C - \varphi')}{M \,.\, Sin\,(A - \varphi') \,.\, Sin\,(B + \varphi')}$ und bestimmt darnach, wo auf der zwischen BD, DC abgeschnittenen Linie der Punkt p liegen muss, damit $ph = pi \,.\, \frac{Sin\,\varphi' \,.\, Sin\,(A + C - \varphi')}{M \,.\, Sin\,(A - \varphi') \,.\, Sin\,(B + \varphi')}$ werde.

§. 308. Eine nähere Betrachtung der am Ende des §. 294. gefundenen Gleichung

$$z^2\,(M \,.\, Cos\,A \,.\, Cos\,B + Cos\,(A + C)) + z\,x\,(M \,.\, Sin\,(B - A) - Sin\,(A + C))$$
$$- x^2 \,.\, M \,.\, Sin\,A \,.\, Sin\,B + z\,(g \,.\, Sin\,C - M\,f \,.\, Sin\,B \,.\, Cos\,A)$$
$$+ x \,.\, M\,f \,.\, Sin\,B \,.\, Sin\,A = o$$

zeigt uns, in welchen Fällen die Curve eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, oder aus zwei geraden Linien besteht. Das letztere kann nur dann der Fall seyn, wenn $m = o$ oder $m = \infty$ ist, das heisst, wenn entweder P sich immer auf einer der beiden geraden Linien AB, CD, oder auf einer der beiden Linien AC, DB befindet. Denn wenn P in AB oder in CD liegt, so ist PQ oder $PR = o$, und es muss daher immerfort $PQ \,.\, PR = o \,.\, PS \,.\, PT$ seyn; dagegen wenn P in AC oder DB liegt, so ist $PS = o$ oder $PT = o$ und folglich $PQ \,.\, PR = \infty \,.\, PS \,.\, PT$.

Unsre Gleichung giebt für $M = o$

$$z\,(z \,.\, Cos\,(A + C) - x \,.\, Sin\,(A + C) + g \,.\, Sin\,C) = o,$$

also ist entweder $z = o$ für jeden Werth von x, das heisst der Punkt P liegt immer in AB, oder es ist

$z = x \,.\, tang\,(A + C) - \frac{g \,.\, Sin\,C}{Cos\,(A + C)}$, eine Gleichung für eine gerade Linie, die völlig mit CD übereinstimmt, indem für diese, wenn $x = o$ ist,

$z = AW = \frac{g \,.\, Sin\,C}{Sin\,(A + C - 90^\circ)} = \frac{-\,g \,.\, Sin\,C}{Cos\,(A + C)}$, und wenn $z = o$ ist,

$x = AY = \frac{g \cdot Sin\, C}{Sin\,(A + C)}$ ist. Für $M = \infty$ würden die in M multiplicirten Glieder für sich verschwinden müssen, also

$$z^2 . Cos\,A . Cos\,B + z\,x . Sin\,(B - A) - x^2 . Sin\,A . Sin\,B - z\,f . Sin\,B . Cos\,A + x\,f . Sin\,B . Sin\,A = o$$ seyn müssen,

das heisst $(z . Cos\,A - x . Sin\,A)\,(z . Cos\,B - (f - x)\,Sin\,B) = o$, und es ist $z . Cos\,A - x . Sin\,A = o$, wenn P in der Linie AC, aber $z . Cos\,B - (f - x) . Sin\,B = o$, wenn P in BD liegt.

§. 309. Soll unsre Curve eine Ellipse werden, so muss (nach §. 286.) $\frac{1}{4}(M . Sin\,(B - A) - Sin\,(A + C))^2 + M . Sin\,A . Sin\,B\,(M . Cos\,A . Cos\,B + Cos\,(A + C))$ negativ werden, für eine Parabel muss es $= o$, für eine Hyperbel positiv seyn. Diese Verschiedenheiten können theils dadurch hervorgebracht werden, dass M positiv oder negativ ist, theils durch die verschiedenen Werthe, welche die Winkel in irgend einem bestimmten Falle erhalten.

M würde aus dem positiven ins negative übergehn, wenn der Punkt P, den wir als die Curve beschreibend ansehen wollen, aus dem zwischen den Schenkeln des Winkels CDF enthaltenen Raume zwischen die Schenkel DF, DY hinüber träte; dann würde PT als negativ anzusehen seyn, und folglich m einen negativen Werth erhalten. Aber m soll für die ganze Betrachtung oder für den ganzen geometrischen Ort des Punktes P einerlei bleiben, also immer positiv bleiben, wenn es einmal positiv war; daher kann P aus dem Raume CDF nicht nach FDY, sondern nach YDB hinübergehen, wo sowohl PT als PR die entgegengesetzte Lage erhält und negativ wird. Hierans erhellt, dass M positiv bleibt, wenn es einmal positiv war.

Es sey also M positiv, so wird, damit die Curve eine Parabel werde, erfordert, dass

$$(M . Sin\,(B - A) - Sin\,(A + C))^2 = -4\,M . Sin\,A . Sin\,B\,(M . Cos\,A . Cos\,B + Cos\,(A + C))$$

sey, oder wenn man gehörig entwickelt

$$M^2 . Sin^2\,(A + B) + 2\,M . (Sin\,A . Sin\,(A + B - C) - Sin\,B . Sin\,C) + Sin^2\,(A + C) = o,$$

oder, da $Sin\,(A + B + C) = -Sin\,D$ ist,

$$M^2 . Sin^2\,(A + B) - 2\,M . (Sin\,A . Sin\,D + Sin\,B . Sin\,C) + Sin^2\,(A + C) = o,$$

daraus würde

$$M = \frac{Sin\,A . Sin\,D + Sin\,B . Sin\,C \pm \sqrt{\{(Sin\,A . Sin\,D + Sin\,B . Sin\,C)^2 - Sin^2(A + C) . Sin^2(A + B)\}}}{Sin^2\,(A + B)}.$$

Wollen wir diess an einem besondern Falle prüfen, so mag $B + C = A + D = 180°$ seyn; dann wird

$$M = \frac{Sin^2 A + Sin^2 B \pm \sqrt{\{(Sin^2 A + Sin^2 B)^2 - Sin^2\,(B - A) . Sin^2\,(A + B)\}}}{Sin^2\,(A + B)}.$$

Wäre also $A = B$, $C = D$, oder CD mit AB parallel, so wäre $M = \frac{4\, Sin^2 A}{Sin^2 2A} = \frac{1}{Cos^2 A}$ der eine und $M = o$ der andre entsprechende Werth, das heisst, wenn AB, CD parallele Linien sind, so kann es nur eine Parabel geben, die durch diese vier Punkte geht, und es ist ausserdem nur noch der Fall möglich, dass der beschreibende Punkt die beiden Linien AB, CD durchlaufe (Fig. 94.).

Wir haben schon oben (§. 134.) gesehen, dass durch vier gegebne Punkte nur zwei Parabeln möglich sind, und es erhellt also der Grund, warum der fünfte Punkt nicht willkürlich kann angenommen werden, sondern einem der beiden Werthe von M entsprechend angenommen werden muss.

§ 310. Sollte M positiv und die Curve eine Ellipse seyn, so müsste

$$M^2 . Sin^2(A+B) - 2M(Sin A . Sin D + Sin B . Sin C) + Sin^2(A+C) < o,$$

oder negativ werden, ich will es $= - N$ setzen, also

$$M^2 - 2M . \frac{Sin A . Sin D + Sin B . Sin C}{Sin^2(A+B)} = \frac{- N - Sin^2(A+C)}{Sin^2(A+B)}, \text{ oder}$$

$$M = \frac{Sin A . Sin D + Sin B . Sin C}{Sin^2(A+B)} \pm \sqrt{\left\{\frac{(Sin A . Sin D + Sin B . Sin C)^2}{Sin^2(A+B)} - \frac{(N + Sin^2(A+C))}{Sin^2(A+B)}\right\}}.$$

Hier wird M unbestimmt, denn N kann alle Werthe erlangen, bei denen nur M noch möglich bleibt.

Für $A = B$, $C = D$, wird

$$M = \frac{1}{2\, Cos^2 A} \pm \sqrt{\left\{\frac{1}{4\, Cos^4 A} - N\right\}},$$ und M kann alle Werthe von

$M = \frac{1}{Cos^2 A}$ bis $M = \frac{1}{2\, Cos^2 A}$, und von $M = o$ bis $M = \frac{1}{2\, Cos^2 A}$ erhalten.

Da nach §. 307. $PH = PI . \frac{Sin\, \varphi . Sin(A + C - \varphi)}{M\, Sin(A - \varphi) . Sin(B + \varphi)}$, so ist PH um desto grösser gegen PI, je kleiner M ist und umgekehrt. Nimmt man also auf eben der Linie AP, auf welcher (Fig. 94.) P in der Parabel liegt, $Ip < IP$ also $\frac{pH}{pI} > \frac{PH}{PI}$, so ist M kleiner, als es der Parabel angemessen ist, und es erhellt leicht, dass für alle Punkte p, die zwischen dem Parabelbogen CPD und der Sehne CD liegen, eine Ellipse möglich ist, die durch A, B, C, D und zugleich durch p geht. Ziehe ich eine andre Linie $ALMK$, welche in M die Parabel, in K die CD, in L die DB schneidet, so muss, weil hier MK das ist, was vorhin PI, und ML das, was vorhin PH war,

$$ML = MK . \frac{Sin\,\varphi\,.\,Sin\,(A+C-\varphi)'}{M\,.\,Sin\,(A-\varphi)\,.\,Sin\,(B+\varphi)}$$ seyn, wenn M ein Punkt in der Parabel und nun $MAB = \varphi$ ist. Nehme ich auf AM den Punkt m ausserhalb der Parabel, so ist

$\frac{mL}{mK} > \frac{ML}{MK}$, und das findet in der Formel statt, wenn die Zahl M einen geringern Werth erhält, als der ist, welcher der Parabel entspricht. Damit also die durch jene vier Punkte A, B, C, D und einen fünften m gehende Curve eine Ellipse sey, muss dieser fünfte Punkt zwischen dem Parabelbogen und DK liegen, und so liesse sich auch für den Bogen AC die Betrachtung anstellen. Soll also die Curve eine Ellipse seyn, so muss der fünfte Punkt so liegen, dass er entweder zwischen CD und dem Parabelbogen CPD, oder zwischen DK, BV, ausserhalb des Parabelbogens, oder zwischen CN, AY, ausserhalb des Parabelbogens, oder zwischen den Aesten AZ, BF der Parabel sey; findet das Gegentheil statt, so ist die Curve eine Hyperbel.

Ganz ähnliche Folgerungen würden da gelten, wo zwei Parabeln durch die vier Punkte möglich sind; da nämlich käme die zweite Parabel so als Grenze vor, wie hier die Linien AB, CD.

§. 310.* Für ein negatives M wird

$$M^2 . Sin^2 (A+B) - 2\,M . (Sin\,A . Sin\,D + Sin\,B . Sin\,C) + Sin^2 (A+C)$$

nothwendig positiv, und also ist die Curve immer eine Hyperbel, wenn der fünfte Punkt Fig. 93. entweder innerhalb des Vierecks $ABDC$, oder innerhalb des Winkels FDY, oder innerhalb des Winkels YBV u. s. w., kurz wenn er so liegt, dass m einen negativen Werth erhält. Diess findet wenigstens dann statt, wenn das Viereck keinen Winkel hat, der grösser als 180° ist.

Diese Betrachtungen werden hinreichen, um zu zeigen, wie man allgemeine Bestimmungen über die hervorgehende Curve erhält, wenn man die durch vier gegebne Punkte gehende Parabel kennt, und die Lage des fünften Punktes gegen diese gehörig untersucht.

Elfter Abschnitt.

Von den unendlichen Aesten der Curven und den Asymptoten derselben.

§. 311. Bemerkung. Wir haben an der Hyperbel ein Beispiel gesehen, wie wir nicht bloss uns überzeugen können, dass eine krumme Linie in unendlichen Aesten fortlaufe, sondern auch die Beschaffenheit dieser unendlichen Aeste kennen zu lernen, in Stand gesetzt werden. Um diese Kenntniss zu erlangen, dienen uns die Asymptoten. Indem wir nämlich bei der Hyperbel uns überzeugten,

dass die Aeste derselben sich immer näher an die gerade Asymptote anschmiegen, sich gleichsam in sie verlaufen, ward es uns zugleich deutlich, dass wir mit immer geringerer Abweichung von der Wahrheit, je weiter wir auf den Aesten fortgehen, diese als mit jener geraden Linie einerlei werdend ansehen können. Die Gleichung für die Hyperbel $a^2 z^2 - b^2 x^2 + b^2 a^2 = o$ geht in die Gleichung für beide Asymptoten über, wenn wir den Grössen z und x sehr grosse Werthe beilegen, und nun das in diesem Falle als unbedeutend gegen die übrigen Glieder erscheinende Glied $a^2 b^2$ ganz weglassen. Wenn wir also sagen, für sehr grosse Werthe von x und z werde beinahe genau $a^2 z^2 - b^2 x^2 = o$, oder $z = \pm \frac{b\,x}{a}$ als Werth der Ordinate für einen sehr weit hinausliegenden Punkt auf dem Aste der Hyperbel, so wissen wir sehr wohl, dass diese Gleichung in Beziehung auf die Hyperbel immer um etwas sehr Geringes fehlerhaft ist, aber wir haben für eine einfachere Linie, nämlich für die Asymptote, die Gleichung gefunden und wissen, dass diese einfachere Linie desto näher mit der Curve überein kömmt, je weiter wir die Aeste der letztern fortsetzen.

§. 312. Schon diese Betrachtung zeigt, wozu im Allgemeinen die Bestimmung der Asymptoten dienen soll. Wir wollen nämlich eine einfachere Linie, sie sey gerade oder krumm, bestimmen, an welche die Aeste einer zur nähern Untersuchung vorgegebenen Curve sich anschmiegen, und indem wir diese einfachere Linie kennen lernen, ist es anzusehen, als ob wir die Gestalt des unendlichen Astes selbst kennten. Hier erhellt nun auch, warum zu Bestimmung dieser Asymptote diejenigen Glieder der Gleichung, in welchen die höchsten Potenzen von x und z vorkommen, allein hinreichen, indem z. B. in der Gleichung für die Hyperbel das unveränderliche Glied $a^2 b^2$ immer weniger in Betrachtung kömmt, je grösser $a^2 z^2$ und $b^2 x^2$ werden. Diese letztern müssen sich so gut wie genau einander selbst aufheben, wenn $a^2 z^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2 = o$ werden soll, und x und z schon sehr grosse Werthe erlangt haben.

§. 313. Um in der Folge in der Bestimmung der Asymptoten nicht aufgehalten zu werden, wollen wir hier noch einige einfache Curven kennen lernen, die als Asymptoten dienen können. Man fasst sie unter dem Namen der Hyperbeln höherer Ordnungen und der Parabeln höherer Ordnungen zusammen.

Von den Hyperbeln höherer Ordnungen.

§. 314. Erklärung. Wir fanden für die gewöhnliche Hyperbel, wenn die Coordinaten den beiden Asymptoten parallel genommen waren (§. 253.), die Gleichung $s \, . \, t = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$, oder das Rechteck aus Abscisse und Ordinate gleich einer unveränderlichen Grösse. Dieses veranlasst uns, alle Curven, wo das Product aus irgend einer Potenz von x in irgend eine Potenz von z eine

unveränderliche Grösse giebt, Hyperbeln höherer Ordnungen zu nennen, und die gewöhnliche Hyperbel wird alsdann als Hyperbel der zweiten Ordnung ausgezeichnet, oder auch die Conische Hyperbel, die Apollonische Hyperbel genannt. Für alle solche Hyperbeln ist also

$x^m \cdot z^n = a^{m+n}$, die allgemeine Gleichung.

§. 315. Bemerkung. Die wesentlichsten Verschiedenheiten hängen hier davon ab, ob m, n, welches immer positive ganze Zahlen sind, beide ungerade Zahlen, oder beide gerade Zahlen, oder die eine gerade, die andre ungerade sind, indem sich darnach die Lage der Aeste bestimmt.

§. 316. Lehrsatz. Wenn in der Gleichung $x^m \cdot z^n = a^{m+n}$ die Zahlen m und n ungerade sind, so schliesst sich die Hyperbel mit ihren vier Aesten so an die durch den Anfangspunkt gezogenen Coordinaten an, dass die beiden Theile der Curve sich ganz innerhalb der einander gegen über liegenden Scheitelwinkel befinden (Fig. 95.).

Beweis. Da $z^n = \frac{a^{m+n}}{x^m}$, m aber eine ungerade Zahl ist, so erhält der Werth von z^m das positive Zeichen, wenn x positiv, das negative Zeichen, wenn x negativ ist, und auch z selbst wird, da n ungerade ist, einerlei Zeichen mit x bekommen. Es gehört also zu jeder positiven Abscisse ein positiver Werth, zu jeder negativen Abscisse ein negativer Werth der Ordinate; denn die übrigen Wurzeln der Gleichung sind, wie aus der Lehre von den Gleichungen bekannt ist, unmöglich. Die beiden Theile der Curve liegen demnach zwischen den Schenkeln der Winkel BAC, DAE, wenn auf AC die positiven Abscissen, und parallel mit AB die positiven Ordinaten genommen werden. Die Aeste der Curve schliessen sich aber den vier Linien AB, AC, AD, AE an, indem für $x = o$, z unendlich, und für $z = o$, x unendlich wird. Ein Beispiel hiervon giebt die gewöhnliche Hyperbel, wo $m = n = 1$ ist. Die Figur zeigt eine solche Hyperbel für Coordinaten, die auf einander senkrecht sind; man könnte aber auch schiefwinklige Coordinaten annehmen.

§. 317. Die genauer betrachtete Gestalt dieser Aeste ist verschieden nach Verschiedenheit der Werthe von m und n. Wenn m eine grössere Zahl ist als n, so dass $z = \frac{a^{1+\frac{m}{n}}}{x^{\frac{m}{n}}}$, im Nenner eine höhere Potenz von x als die erste hat, so schliesst der über C hinausgehende, und so auch der über E hinausgehende Ast sich enger an EC an, als es bei der gewöhnlichen Hyperbel der Fall wäre; dagegen nähern die an BD liegenden Aeste sich dieser Linie nicht so schnell. Für $x = a$ ist allemal $z = a$, und allgemein ist $z = a \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{m}{n}}$, ist also z. B.

$m = 3n$, so ist für $x = 2a$, $z = \frac{1}{8}a$, statt dass bei der Hyperbel der zweiten Ordnung $z = \frac{1}{2}a$ ist, dagegen für $x = \frac{1}{2}a$ ist $z = 8a$, statt dass bei der gewöhnlichen Hyperbel schon für $z = 2a$, die Curve sich bis zur Entfernung $x = \frac{1}{2}a$ an AB genähert hat.

§. 318. Lehrsatz. Wenn in der Gleichung $x^m . z^n = a^{m+n}$, m eine gerade, n eine ungerade Zahl ist, so liegen (Fig. 96.) beide Theile der Hyperbel zwischen den Schenkeln der Nebenwinkel BAC, BAE, und die Curve schliesst sich mit vier Aesten an AE, AB, AC an.

Beweis. Für positive und negative x wird die Potenz x^m eine positive Grösse, also z^n und z selbst allemal positiv. Die beiden, einander ganz ähnlichen Theile der Curve liegen also auf derselben Seite der Abscissenlinie und schliessen sich mit zwei Aesten an AB, mit zwei Aesten an AE, AC an.

§. 319. Wäre dagegen m ungerade und n gerade, so lägen die beiden Theile der Hyperbel, wie Fig. 97., weil z nur dann mögliche Werthe erhielte, wenn man x positiv annähme, wo dann $z = \pm a \sqrt[n]{\frac{a^m}{x^m}}$ würde.

§. 320. Lehrsatz. Wenn m und n gerade Zahlen sind, so besteht die Hyperbel aus vier Theilen, die sich mit acht Aesten an die durch den Anfangspunkt gezognen, den Coordinaten parallelen Linien BD, EC anschliessen (Fig. 95.).

Beweis. Setze ich $m = 2p$ und $n = 2q$, so ist $z^{2q} = \frac{a^{2(p+q)}}{x^{2p}}$, $z^q = \pm \frac{a^{p+q}}{x^p}$. Es erhält also z^q einen doppelten Werth für jedes positive oder negative x. Ist nun q eine ungerade Zahl, so finden auch für z die beiden entsprechenden Werthe $z = \pm \sqrt[q]{\frac{a^{p+q}}{x^p}}$ statt, und es giebt also sowohl für positive, als für negative Abscissen zwei Werthe der Ordinate. Ist dagegen q eine gerade Zahl, so kann freilich die Wurzel $\sqrt[q]{\left(-\frac{a^{p+q}}{x^p}\right)}$ für positive x^p, und die Wurzel $\sqrt[q]{\left(+\frac{a^{p+q}}{x^p}\right)}$ für negative x^p nicht gebraucht werden; aber nun erhält dagegen eben diese $\sqrt[q]{}$ einen doppelten Werth, so dass demnach $z = \pm \sqrt[q]{\frac{a^{p+q}}{x^p}}$ wird, und z für jedes positive sowohl als negative x einen doppelten Werth erhält. Hier liegen also die vier Theile der Hyperbel in den

vier Winkeln BAC, BAE, CAD, DAE, und da für $x = \infty$, $z = o$, für $z = \infty$, $x = o$ wird, so schliesst sie sich mit unendlichen Aesten von beiden Seiten her an die vier Linien AC, AB, AE, AD an.

Von den Parabeln höherer Ordnungen.

§. 321. **Erklärung.** Die für die gewöhnliche Parabel gefundene Gleichung $z^2 = p\,x$ veranlasst uns, alle Curven, die durch die Gleichung $z^n = p^{n-m}.\,x^m$ ausgedrückt werden, mit dem Namen von Parabeln höherer Ordnungen zu belegen. Die in der Gleichung $z^2 = p\,x$ dargestellte heisst dann die Parabel der zweiten Ordnung, die Conische Parabel, oder die Apollonische Parabel.

Auch hier hängen die wesentlichsten Verschiedenheiten davon ab, ob m und n gerade oder ungerade Zahlen sind.

§. 322. **Lehrsatz.** Wenn n eine gerade, m eine ungerade Zahl ist, so liegen die beiden Aeste der Parabel an den beiden Seiten der Abscissenlinie, worauf die positiven x aufgetragen sind, und beide Aeste sind einander ganz ähnlich.

Beweis. Da m eine ungerade Zahl ist, so würde x^m negativ für negative x, dabei also z unmöglich, weil $z = p \sqrt[n]{\frac{x^m}{p^m}}$ durch eine Wurzel von gerader Ordnung ausgedrückt wird. Hingegen für positive x wird

$$z = \pm\, p \,.\sqrt[n]{\frac{x^m}{p^m}}.$$

§. 323. Wäre umgekehrt n ungerade und m gerade, so würde $x^m = \frac{z^n}{p^n}\,p^m$, und die vorigen Schlüsse fänden nun in Beziehung auf positive und negative z so statt, wie vorhin in Beziehung auf positive und negative x. Statt also, dass die im vorigen Lehrsatze betrachteten Curven so wie Fig. 98. gestaltet sind, werden sie hier wie Fig. 99. ihre Aeste über beide Theile der Abscissenlinie hin erstrecken.

§. 324. **Lehrsatz.** Wenn m und n beide ungerade Zahlen sind, so liegen (Fig. 100.) die Aeste der Parabel in den einander entgegen gesetzten Scheitelwinkeln ACB, DCE.

Beweis. Da $z^n = p^n.\left(\frac{x}{p}\right)^m$ hier positiv wird für positive x, und negativ für negative x, und dann auch z in jenem Falle nur einen möglichen positiven Werth, in diesem Falle nur einen möglichen negativen Werth er-

hält, so erhellt, dass die Aeste der Curve sich so fort erstrecken, wie Fig. 100. zeigt.

§. 325. Lehrsatz. Wenn m und n beide gerade Zahlen sind, so liegen vier Aeste der Curve in den vier Winkeln ACB, ACD, BCE, ECD (Fig. 100.).

Beweis. Setze ich nämlich hier $m = 2q$, $n = 2r$, so ist $z^{2r} = p^{2r}\left(\frac{x}{p}\right)^{2q}$, oder $z^r = \pm p^r \left(\frac{x}{p}\right)^q$, und es erhellt leicht, dass hier jedes positive x und jedes negative x zwei mögliche entgegen gesetzte, aber an Grösse gleiche Werthe von z giebt. Denn wenn r eine ungerade Zahl ist, so wird $z = p \,.\, \sqrt[r]{\left(\pm \frac{x^q}{p^q}\right)}$ einen doppelten Werth für z geben, es mag x positiv oder negativ seyn; ist dagegen r eine gerade Zahl, so ist in dem Ausdruck $z = \pm p \sqrt[r]{\left(\pm \frac{x^q}{p^q}\right)}$ die Wurzelgrösse zwar nur dann möglich, wenn man für ein positives x^q das $+$Zeichen, für ein negatives x^q das $-$Zeichen nimmt; aber offenbar ist doch auch dann ein doppelter Werth für jedes x da.

§. 326. Die genauere Betrachtung dieser Curven, warum sie nämlich bei A einen Rückkehrpunkt (Fig. 99.), oder bei C einen Wendungspunkt (Fig. 100.) haben, lässt sich hier noch nicht durchführen und gehört auch nicht hierher. Leicht aber lässt sich zeigen, dass diese Curven keine geradlinigen Asymptoten haben, und sich daher wesentlich von den vorhin betrachteten Hyperbeln unterscheiden.

§. 327. Lehrsatz. Es ist nicht möglich, eine Linie BC (Fig. 99.) so zu ziehen, dass sich der Ast der durch $z^n = p^n \frac{x^m}{p^m}$ ausgedrückten Curve immer näher an sie anschliesse, je weiter man auf ihm fortgeht; oder BC kann, welche Lage man ihr auch gebe, nie eine Asymptote der Curve seyn.

Beweis. Für irgend eine solche Linie BC sey $AB = f$ der Abstand ihres Einschnittspunkts in die Abscissenlinie vom Anfangspunkte, $CBA = \zeta$ ihr Neigungswinkel.

Nenne ich nun für irgend einen Punkt D der Curve die auf einander senkrechten Coordinaten $BC = u$, $CD = v$, so ist bekanntlich

$$f + x = u \,.\, Cof\,\zeta + v \,.\, Sin\,\zeta,$$
$$z = u \,.\, Sin\,\zeta - v \,.\, Cof\,\zeta.$$

Die Abstände $= v$ von der Linie BC müssten also aus der Gleichung

$$(u \,.\, Sin\,\zeta - v \,.\, Cof\,\zeta)^n = p^n \left(\frac{-f + u \,.\, Cof\,\zeta + v \,.\, Sin\,\zeta}{p}\right)^m$$ hergeleitet werden.

Sollte nun für ein sehr grosses u, der Abstand v sehr klein seyn, oder höchstens doch einen gewissen endlichen Werth nie übertreffen können, so würde diese Gleichung um so weniger von

$p^m u^n . Sin^n \zeta = p^n (u . Cos \zeta - f)^m$ verschieden ausfallen, je grösser man u nähme. Da nun hier f nicht unendlich seyn kann, indem von einer gegebnen, bestimmten Linie die Rede ist, so kann, in Vergleichung gegen das unendlich werdende u, auch f weggelassen werden, und es müsste also

$p^m . u^n . Sin^n \zeta = p^n . u^m . Cos^m \zeta$ seyn, oder dieses desto genauer statt finden, je grösser man u nähme; das aber ist nur in dem Falle möglich, wo $m = n$ ist, und folglich die Gleichung $z^n = p^n \left(\frac{x}{p}\right)^m$ in $z = x$, eine Gleichung für die gerade Linie, übergeht. In jedem andern Falle würde die Gleichung $u^{n-m} = p^{n-m} . \frac{Cos^m \zeta}{Sin^n \zeta}$ nur eine bestimmte Gleichung für u seyn, auch nie einem unendlichen Werthe für u angehören können, in keinem Falle also uns eine asymptotische gerade Linie angeben.

Man könnte diess auch so ableiten: Zieht man irgend eine auf AE senkrechte Ordinate FG, welche die gerade Linie in G, die Curve in H schneidet, so ist $FG = y = (x + f)\ tang\ \zeta$, $FH = z = p \left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{m}{n}}$, also

$y - z = x . tang\ \zeta - p \left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{m}{n}} + f . tang\ \zeta$; der Abstand $y - z$ wird also mit x wachsen, und keineswegs, weil m nicht $= n$ ist, für unendliche x sich einem beständigen Werthe nähern, oder gar bis auf Null abnehmen.

Allgemeine Betrachtungen über die Aeste und Asymptoten der Curven.

§. 328. Erklärung. Man versteht unter dem höchsten Gliede einer Gleichung für krumme Linien die Summe derjenigen Glieder, in welchen die veränderlichen Grössen, Abscisse und Ordinate, ein Product von derjenigen Ordnung bilden, welche mit der Ordnung, wozu die Gleichung gehört, einerlei ist. Obgleich also z. B. in der Gleichung für Linien der vierten Ordnung, die im Allgemeinen folgende Form hat:

$$z^4 + m z^3 x + n z^2 x^2 + p z x^3 + q x^4 + a z^3 + b z^2 x + c z x^2 + e x^3 + f^2 z^2 + g^2 x z + h^2 x^2 + i^3 z + k^3 x + l^4 = o,$$

alle Glieder vier Linien als Factoren enthalten, so verstehen wir unter dem höchsten Gliede doch nur die Summe der Glieder

$z^4 + m z^3 x + n z^2 x^2 + p z x^3 + q x^4$, wo alle diese linearischen Dimen-

sionen mit den Coordinaten der Curve besetzt sind, indem m, n, p, q hier Zahlen bedeuten.

§. 329. Bemerkung. Wenn von Punkten auf den unendlichen Aesten der Curve die Rede ist, so können diese Punkte so liegen, dass beide Coordinaten für sie sehr grosse, und je weiter man fortgeht, ins Unendliche zunehmende Werthe haben; sie können aber auch, indem sich der unendliche Ast an eine der Coordinaten anschliesst, so liegen, dass nur eine der Coordinaten unendlich wird, während die andre sich einem beständigen Werthe, oder sogar dem Verschwinden nähert. Eine der Coordinaten muss indess allemal ins Unendliche wachsen, wenn man auf dem unendlichen Aste fort geht. Je weiter man also den zu betrachtenden Punkt dieses Astes hinaus rückt, desto grösser wird diese Coordinate, und desto unbedeutender werden alle Glieder gegen das Glied, worin von dieser Coordinate die höchste Potenz vorkömmt. Hieraus lässt sich der Grund übersehen, warum im Allgemeinen das höchste Glied der Gleichung (§. 328) allein oder doch vorzüglich uns zur Kenntniss der Asymptoten führt. Wenn beide Coordinaten immer grösser werden, so erhellt es von selbst, dass wir durch immer weiteres Fortgehen auf den unendlichen Aesten dahin gelangen können, wo die Theile des höchsten Gliedes allein Berücksichtigung verdienen, indem z. B. in der Gleichung der vierten Ordnung die vierten Potenzen z^4, x^4 oder Producte wie $m\,z^3\,x$ durch den sehr grossen Werth der Coordinaten so anwachsen, dass $a\,z^3$ und ähnliche jenen bei weitem nicht gleich kommen können. In solchen Fällen ist es also sehr deutlich, dass wir sagen dürfen, für so grosse Werthe der Coordinaten müsse das ganze höchste Glied $z^4 + m\,z^3\,x + n\,z^2\,x^2 + p\,z\,x^3 + q\,x^4$ für sich $= o$ seyn, weil das, was die folgenden Glieder hinzu fügen, oder hinweg nehmen, nur von geringer Bedeutung ist, und vergleichungsweise von immer geringerer Bedeutung wird, je mehr x und z zunehmen. Da erhellt es also völlig, dass das höchste Glied uns zur Kenntniss der Asymptoten führt, indem die Gleichung, welche den Aesten um so näher entspricht, je weiter wir auf ihnen fortgehen, eben selbst die Gleichung für die Asymptote ist. Wenn dagegen die unendlichen Aeste so liegen, dass für sie nur eine der Coordinaten immer fort wächst, z. B. die Abscisse x, während die andre Coordinate z sich einer endlichen Grenze nähert, oder sich sogar dem Null nähert, so müssen zugleich niedrigere Glieder mit in Betrachtung gezogen werden, weil dann $x^3\,z$ nur als ein Glied, das in Beziehung auf die sehr grossen Linien drei Dimensionen hat, kann angesehen werden, ja vielleicht sogar nur als ein Glied von zwei Dimensionen, wenn das Product $z\,x$ sich einem beständigen Werthe $= \lambda^2$ näherte, und also $x^3\,z$ nur als $= \lambda^2\,x^2$ anzusehen wäre, oder desto näher so zu betrachten wäre, je mehr, bei immer wachsendem x, z abnimmt.

Selbst wenn beide Coordinaten unendlich wachsen, kann es sich ereignen, dass das Wachsen der einen in viel stärkerem Masse fortschreitet, und dass

daher ungleich hohe Potenzen beider als in gleichem Masse wachsend anzusehen sind, indem z. B. die dritte Potenz der einen eben so viel gilt als die vierte Potenz der andern. In solchen Fällen tritt gleichfalls eine Berücksichtigung der niedrigern Glieder ein. Zum Beispiel bei der gewöhnlichen Parabel wachsen Abscissen und Ordinaten ins Unendliche, und doch wächst die Abscisse so viel stärker, dass die Quadrate der Ordinate mit den ersten Potenzen der Abscisse in gleichem Masse fortschreiten.

§. 330. Bemerkung. Es ist aus der Theorie der Gleichungen bekannt, dass jede nach den Potenzen von x geordnete, auf Null gebrachte Gleichung sich in so viele einfache Factoren zerlegen lässt, als die Potenz des höchten Gliedes angiebt. Es ist ferner bekannt, dass unter diesen einfachen Factoren unmögliche seyn können, dass diese aber so paarweise vorkommen, dass der aus zweien zusammen gesetzte Factor der zweiten Ordnung möglich und von der Form

$x^2 + 2axz \,.\, Cos\,\zeta + a^2 z^2$ ist *). Wir setzen also als bekannt voraus, dass das höchste Glied einer Gleichung immer in einfache mögliche Factoren des ersten Grades oder in mögliche Factoren des zweiten Grades, z. B. bei der vom vierten Grade das Glied

$$z^4 + m z^3 x + n z^2 x^2 + p z x^3 + q x^4,$$

in vier einfache mögliche Factoren von der Form $\beta z - \alpha x$, oder in zwei Factoren des zweiten Grades von der Form $\beta z^2 + 2\beta\alpha x z \,.\, Cos\,\zeta + \alpha^2 x^2$, oder in zwei von jener Form und in einen von dieser zerlegt werden könne. Wäre z. B. für eine Linie der vierten Ordnung das höchste Glied

$= z^4 + 7 z^3 x + 5 z^2 x^2 - 31 z x^3 - 30 x^4$, so ist dieses

$= (z + 3x)(z - 2x)(z + 5x)(z + x)$.

§. 331. Lehrsatz. Wenn das höchste Glied der Gleichung für eine krumme Linie gar keine mögliche einfache Factoren enthält, so ist die Curve ganz in einem begrenzten Raume enthalten und hat keine unendlichen Aeste.

Beweis. Soll das höchste Glied der Gleichung gar keine möglichen Factoren enthalten, so kann weder das Glied fehlen, worin die höchste Potenz von x, noch das Glied, worin die höchste Potenz von z vorkömmt; denn wäre zum Beispiel in dem höchsten Gliede für Linien der vierten Ordnung $z^4 + m z^3 x + n z^2 x^2 + p z x^3 + q x^4$, $q = o$, so enthielte das ganze höchste Glied den möglichen einfachen Factor z, gegen die Voraussetzung, weil es nun $= z(z^3 + m z^2 x + n z x^2 + p x^3)$ wäre. Da nun die höchsten Potenzen beider Coordinaten vorkommen, so würde, wofern es hier unendliche Aeste geben sollte, es möchte nun x allein, oder z allein, oder es möchten beide unendlich werden, allemal für sehr entfernte Punkte das höchste Glied alle folgende so übertreffen, dass man die übrigen dagegen nicht zu beachten brauchte, sondern

*) Der Factor $Cos\,\zeta$ steht hier, um anzuzeigen, dass der Factor bei $2axz$ jeder Bruch der zwischen $+1$ und -1 liegt, seyn kann.

dieses höchste Glied müsste für sich allein desto näher $= o$ werden, je weiter hinaus man den durch x und z bestimmten Punkt annähme. Aber da das höchste Glied aus Factoren von der Form $\alpha^2 z^2 + 2\alpha\beta xz . Cos\,\zeta + \beta^2 x^2$ besteht, die keine Zerlegung in mögliche einfache Factoren gestatten, dieses Glied aber dennoch nicht anders $= o$ werden kann, als indem einer seiner Factoren $= o$ wird, so müssten wir den sehr entfernten Punkt der Curve als durch eine Gleichung von der Form $\alpha^2 z^2 + 2\alpha\beta xz . Cos\,\zeta + \beta^2 x^2 = o$, bestimmt ansehen, welche $z = -\frac{\beta}{\alpha} x . Cos\,\zeta \pm \sqrt{\{Cos^2\zeta - 1\}}\,\frac{\beta}{\alpha} x$

$$= \left(\frac{\beta}{\alpha} x . \{- Cos\,\zeta \pm Sin\,\zeta . \sqrt{-1}\}\right)$$

also z unmöglich giebt. Das heisst also, in diesem Falle kann kein unendlich weit hinausliegender Punkt, (denn nur für diese ist die letzte Gleichung desto näher passend, je grösser x, z würden,) zur Curve gehören, sondern die Curve ist ganz in einem endlichen Raume eingeschlossen und hat keine unbegrenzt fortlaufenden Aeste.

§. 332. Beispiel. In §. 286. fanden wir, dass die Gleichung für Linien der zweiten Ordnung eine Ellipse bestimmen, wenn in dem höchsten Gliede: $z^2 + m\,xz + n\,x^2$, der Factor $n > \frac{1}{4} m^2$ sey; das ist eben der Fall, wo dieses höchste Glied keine möglichen einfachen Factoren hat.

§. 333. Lehrsatz. Wenn das höchste Glied der Gleichung für eine krumme Linie nur einen möglichen, einfachen Factor enthält, und das nächste Glied nicht $= o$ ist, so hat die krumme Linie eine einzige geradlinige Asymptote.

Beweis. Dieser Fall kann nur für Curven eintreten, die zur dritten, fünften u. s. w., kurz zu einer ungeraden Ordnung gehören, und das höchste Glied lässt sich dann durch

$$(\alpha z - \beta x)\,(\gamma^2 z^2 + 2\gamma\delta\,xz . Cos\,\zeta + \delta^2 x^2)\,(\varepsilon^2 z^2 + 2\varepsilon\eta\,zx . Cos\,\lambda + \eta^2 z^2)$$

darstellen, wo alle Factoren, die nach dem ersten folgen, nicht in einfache mögliche Factoren zerlegbar sind. Ich will als Beispiel eine Gleichung vom dritten Grade nehmen,

$$(\alpha z - \beta x)\,(\gamma^2 z^2 + 2\gamma\delta\,xz . Cos\,\zeta + \delta^2 x^2) + az^2 + bxz + cx^2 + e^2 z + f^2 x + g^3 = o,$$

wo das höchste Glied so, wie unsre Voraussetzung fordert, angenommen ist. Diese Gleichung lässt sich so darstellen:

$$\gamma^2 z^2 + 2\gamma\delta\,xz . Cos\,\zeta + \delta^2 x^2 = -\left(\frac{az^2 + bxz + cx^2 + e^2 z + f^2 x + g^3}{\alpha z - \beta x}\right),$$

und hier wird gewiss die Summe der vor dem Gleichheitszeichen stehenden Glieder ins Unendliche wachsen, da selbst, wenn das mittlere Glied negativ wäre, keinesweges $\gamma z^2 - 2\gamma\delta z . Cos\,\zeta + \delta^2 z^2 = A^2$ einem endlichen Werthe gleich, für x und $z = \infty$ werden kann, indem

$z = \frac{\delta}{\gamma} x \,.\, Cos\,\zeta \pm \sqrt{\left\{A^2 - \frac{\delta^2}{\gamma^2} x^2 \,.\, Sin^2\,\zeta\right\}}$ für unaufhörlich wachsende x gewiss unmöglich würde. Es ist also auch die Summe der nach dem Gleichheitszeichen stehenden Glieder unendlich wachsend, weil sie dem vor dem Gleichheitszeichen stehenden gleich bleiben muss, und insbesondre muss also das nach dem Gleichheitszeichen stehende höchste Glied $= \frac{a z^2 + b x z + c x^2}{\alpha z - \beta x}$ ins Unendliche wachsen und mit $\gamma^2 z^2 + 2 \gamma \delta x z \,.\, Cos\,\zeta + \delta^2 z^2$ gleich stark wachsen, damit diese Glieder, gegen welche $\frac{e^2 z + f^2 x + g^3}{\alpha z - \beta x}$ immer weniger in Betrachtung kömmt, je grösser x, z werden, sich gegen einander aufheben können. Aber $\frac{a z^2 + b x z + c x^2}{\alpha z - \beta x}$ kann mit den quadratischen Gliedern $\gamma^2 z^2 + 2 \gamma \delta x z \,.\, Cos\,\zeta + \delta^2 x^2$ nur dann gleichartig seyn, nur dann eben so stark als sie wachsen, wenn $\alpha z - \beta x = \lambda$ gleich einem endlichen Werthe wird für unendliche x, z, oder sich diesem Werthe desto mehr nähert, jé grösser x und z werden.

Unsre Gleichung fordert also für sehr grosse x und z, dass $\alpha z - \beta x = \lambda$ sey, oder dass die unendlichen Aeste der Curve sich an eine gerade Linie anschliessen, die durch die Gleichung $\alpha z - \beta x = \lambda$, ausgedrückt wird; diese ist demnach die Asymptote.

Ein andrer Beweis. Man könnte sich die gerade Linie, für welche $\alpha z' - \beta x = \lambda$ oder $z' = \frac{\lambda + \beta x}{\alpha}$ die Gleichung ist, als ausgezeichnet vorstellen, und nun den auf der Ordinate z gemessenen Abstand $z - z'$ der Curve von ihr in jedem Punkte bestimmen. Dieser Abstand sey $z - z' = u$, oder es sey $z = \frac{\beta x}{\alpha} + u + \frac{\lambda}{\alpha}$. Wenn man diesen Werth für z in die Gleichung für die Curve setzte, so erhielte man eine Gleichung zwischen x und u, welche für jede Abscisse den Werth von u oder den auf der Ordinate genommenen Abstand der Curve von der geraden Linie angäbe. Da es hier indess nur auf die unendlich fortlaufenden Aeste ankömmt, so lasse ich λ gegen x und die Glieder $e^2 z + f^2 x + g^3$ gegen die höhern Glieder sogleich weg; dann wird

$$(\alpha z - \beta x) = \alpha u + \lambda;$$

$$(\gamma^2 z^2 + 2 \gamma \delta x z \,.\, Cos\,\zeta + \delta^2 x^2 = \left(\frac{\gamma^2 \beta^2}{\alpha^2} + \frac{2 \gamma \beta \delta}{\alpha} \,.\, Cos\,\zeta + \delta^2\right) x^2$$
$$+ \left(\frac{2 \gamma^2 \beta}{\alpha} + 2 \gamma \delta \,.\, Cos\,\zeta\right) x u + \gamma^2 u^2;$$

$$a z^2 + b x z + c x^2 = \left(\frac{a \beta^2}{\alpha^2} + \frac{b \beta}{\alpha} + c\right) x^2 + \left(\frac{2 a \beta}{\alpha} + b\right) u x + a u^2,$$

und es muss

$$(\alpha u+\lambda)\{[\gamma^2\beta^2+2\alpha\beta\gamma\delta.\,Cos\,\zeta+\alpha^2\delta^2]x^2+[2\gamma^2\alpha\beta+2\alpha^2\gamma\delta.\,Cos\,\zeta]xu+\gamma^2\alpha^2u^2\}$$
$$=[a\beta^2+\alpha\beta b+\alpha^2c]x^2+[2a\alpha\beta+\alpha^2b]ux+a\alpha^2u^2$$

seyn. Diese Gleichung soll gelten, wenn x sehr gross wird, weil nur dann die weggelassenen Glieder als gegen die hier vorkommenden unbedeutend anzusehen sind. Würde nun dann auch u sehr gross, so dass man es als in gleichem Verhältnisse mit x wachsend ansehen könnte, so würden die vor dem Gleichheitszeichen stehenden Glieder, wenn man αu statt $\alpha u+\lambda$ allein stehen liesse, sämmtlich drei solche grosse Factoren enthalten, also jedes über den Werth der nach dem Gleichheitszeichen stehenden Glieder weit hinaus gehen; sie müssten sich also selbst einander desto näher aufheben, je grösser x und u würde, weil das nach dem Gleichheitszeichen stehende nur als unbedeutend mit einwirken könnte. Wir müssten also

$$(\beta^2\gamma^2+2\alpha\beta\gamma\delta.\,Cos\,\zeta+\alpha^2\delta^2)x^2+2xu(\gamma^2\alpha\beta+\alpha^2\gamma\delta.\,Cos\,\zeta)+\alpha^2\gamma^2u^2=o$$

setzen; aber das gäbe für u einen unmöglichen Werth, nämlich

$$u=-x\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\delta}{\gamma}.\,Cos\,\zeta\right)\pm\frac{\delta}{\gamma}x.\,Sin\,\zeta.\sqrt{-1}.$$

So stark kann u also nicht wachsen. Setzen wir dagegen u einer beständigen Grösse gleich oder einem beständigen Werthe desto näher gleich werdend, je grösser x wird, so fallen die Glieder, welche xu und u^2 enthalten, gegen x weg, und es soll alsdann

$$(\alpha u+\lambda)(\gamma^2\beta^2+2\alpha\beta\gamma\delta.\,Cos\,\zeta+\alpha^2\delta^2)=a\beta^2+b\alpha\beta+c\alpha^2$$

seyn, wodurch $\alpha u+\lambda$ bestimmt ist.

Diese Betrachtung zeigt also, dass der Ast der Curve, welcher unendlich werdenden x entspricht, je mehr und mehr derjenigen geraden Linie parallel wird, die durch die Gleichung $\alpha z'=\beta x+\lambda$ gegeben wurde, und dass wir λ nur gehörig zu bestimmen brauchen, um die wahre Asymptote, welcher die Curve sich vollkommen anschmiegt, zu finden. Es muss nämlich, damit u sich dem Verschwinden nähere,

$$\lambda=\frac{a\beta^2+b\alpha\beta+c\alpha^2}{\beta^2\gamma^2+2\alpha\beta\gamma\delta.\,Cos\,\zeta+\alpha^2\delta^2}$$ seyn, wo also λ durch gegebne Grössen bestimmt ist.

§. 334. Erstes Beispiel. Es sey $z(x^2+z^2)-bx^2=o$, die Gleichung für eine Curve, so soll nach dem Vorigen $z=\lambda$ die Gleichung für die Asymptote seyn; dann aber ist hier für sehr grosse x, $\lambda x^2=bx^2$. $\lambda=b$. Die Asymptote ist also mit der Abscissenlinie parallel in der Entfernung $=b$.

Hier ergiebt sich eben die Bestimmung der Asymptote noch aus einer andern Betrachtung, indem die Gleichung

$x^2(z-b)=-z^3$, allgemein giebt;

$x = \pm z \sqrt{\frac{z}{b - z}}$, welches unmöglich wird, wenn man $z > b$ setzen wollte, aber auch den Werth $z = b$ erst als zu einem unendlichen x gehörend angiebt. Fig. 109. stellt diese Curve dar. Es ist $AH = b$ und FG die Asymptote.

§. 335. Zweites Beispiel. Es sey $(ax - z)(x^2 + z^2) = bxz - cx^2$, dann soll nach den Angaben von §. 333.

$z' = ax + \lambda$ die Gleichung für die Asymptote seyn, und wenn ich den Abstand $z - z' = u$ setze, $z = ax + \lambda + u$. Der Abstand u würde also völlig allgemein, für jedes grosse oder kleine x, durch die Gleichung

$$- (\lambda + u)((a^2 + 1)x^2 + 2axu + 2a\lambda x + 2\lambda u + \lambda^2 + u^2)$$
$$= (ba - c)x^2 + bxu + b\lambda x$$

bestimmt. Aber wenn x sehr gross wird, so kann gewiss x gegen x^2, u gegen xu weggelassen werden, und es wäre also

$$(\lambda + u)((ax + u)^2 + x^2) = - bx(ax + u) + cx^2.$$

Hier erhellt wieder, dass diese Glieder sich nicht einander aufheben können, wenn u mit x zugleich ins Unendliche wachsen könnte, indem alsdann die Glieder, worin $x^2 u$, u^3 und so weiter vorkämen, zuletzt über x^2, ux und so weiter hinaus wachsen würden, wir müssen also $\lambda + u$ als sich einer bestimmten Grenze nähernd ansehen, und dann

$$(\lambda + u)(a^2 + 1)x^2 = (\div ab + c)x^2, \text{ oder } (\lambda + u = - \left(\frac{ab - c}{a^2 + 1}\right)$$

setzen. Der Ast der Curve schmiegt sich also völlig an die durch $z' = ax + \lambda$ bestimmte Asymptote an, wenn $\lambda = \frac{- ab + c}{a^2 + 1}$ ist, indem dann immer näher $u = o$ wird, je grösser man x nimmt.

Eben das würde die für sehr grosse x geltende Gleichung

$$- (\lambda + u)((ax + u^2)^2 + x^2) = bx(ax + u) - cx^2$$ geben, wenn man aus ihr den Werth von x suchte; sie zeigt nämlich, dass

$$x^2((a^2 + 1)(\lambda + u) - c + ab) + 2x(au(\lambda + u) + \tfrac{1}{2}bu) = - u(\lambda + u);$$

oder $x = \frac{- \frac{1}{2}bu - au(\lambda + u) \pm u\sqrt{\{\frac{1}{4}b^2 - (\lambda + u)^2 + c(\lambda + u)\}}}{(a^2 + 1)(\lambda + u) - c + ab}$;

werden sollte, für sehr grosse x; aber dieser Werth wird unmöglich, sobald $(\lambda + u)^2 - c(\lambda + u) > \frac{1}{4}b^2$ ist; dadurch wird angezeigt, dass u keineswegs ins Unendliche wachsen kann. Ist aber das nicht möglich, so kann der eben gefundene Werth von x nur dann unendlich werden, wenn der Nenner bis auf Null abnimmt, oder $\lambda + u = \frac{- ab + c}{a^2 + 1}$ wird. Dieser Werth liegt innerhalb der Grenzen, in welchen x noch möglich bleibt; denn wirklich ist

$(\lambda + u)^2 - c(\lambda + u)$ nun $= \left(\frac{ab - c}{a^2 + 1}\right)\left(\frac{ab + a^2 c}{a^2 + 1}\right)$ kleiner als $\frac{1}{4} b^2$, indem b unmöglich wäre, wenn man das Gegentheil annehmen und etwa $(ab - c)(ab + a^2 c) = (a^2 + 1)^2 (\frac{1}{4} b^2 + w)$ setzen wollte. Für $a = o$ wäre die Asymptote durch die Gleichung $z' = + c$ ausgedrückt; sie wäre also der Abscissenlinie parallel. Im Allgemeinen wäre $z' = \frac{c - ab}{a^2 + 1} + ax$.

Für den Fall, dass $a = o$ ist, zeigt Fig. 107. die Gestalt dieser Curve.

§. 336. Lehrsatz. Wenn das erste Glied nur einen möglichen einfachen Factor enthält, das zweite Glied aber $= o$ ist, so hat die Curve eine hyperbolische Asymptote, und diese ist von höherer Ordnung, wenn ausser dem zweiten Gliede auch das dritte und vielleicht mehrere auf einander folgende $= o$ wären.

Beweis. Wenn wir bei der Gleichung vom dritten Grade stehen bleiben, so ist hier, weil das Glied fehlt, welches x^2, z^2, xz enthalten sollte, $(\alpha z - \beta x)(\gamma^2 z^2 + 2\gamma\delta xz \,.\, Cos\,\zeta + \delta^2 x^2) = e^2 z + f^2 x + g^3$; es soll also

$\gamma^2 z^2 + 2\gamma\delta xz \,.\, Cos\,\zeta + \delta^2 x^2 = \frac{e^2 z + f^2 x}{\alpha z - \beta x}$ werden für unendlich wachsende x. Das kann aber nur geschehen, wenn $\alpha z - \beta x = \frac{\lambda^2}{x}$ wird, indem dann für unendlich wachsende x und z beinahe $z = \frac{\beta x}{\alpha}$, also

$(\beta^2 \gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma\delta \,.\, Cos\,\zeta + \alpha^2 \delta^2)\, x^2 = \frac{e^2 \beta + f^2 \alpha}{\alpha \lambda^2}\, x^2$ und dadurch λ bestimmt wird. Der ins Unendliche fortgesetzte Ast stimmt also immer näher und näher mit der Hyperbel überein, deren Gleichung $\alpha z - \beta x = \frac{\lambda^2}{x}$ ist, und diese Hyperbel ist seine Asymptote; aber es erhellt, dass die Curve sich auch der geraden Linie, deren Gleichung $\alpha z - \beta x = o$ ist, nahe anschmiegt, indem diese die Asymptote der Hyperbel ist.

Wären e und f beide $= o$, so müsste

$\gamma^2 z^2 + 2\gamma\delta xz \,.\, Cos\,\zeta + \delta^2 x^2 = \frac{f^3}{\alpha z - \beta x}$ seyn für unendlich wachsende Coordinaten. Dazu wird erfordert, dass $\alpha z - \beta x = \frac{\lambda^3}{x^2}$ sey, oder die Asymptote eine Hyperbel der dritten Ordnung, die sich jedoch wieder an die gerade Linie, für welche $z = \frac{\beta}{\alpha}$ ist, anschmiegt, so dass diese gerade Linie

allemal eine Asymptote ist, wenn das erste Glied nur einen möglichen Factor enthält.

§. 337. Lehrsatz. Wenn das höchste Glied der Gleichung zwei einfache, nicht einander gleiche Factoren enthält, so hat die Curve zwei geradlinige Asymptoten, an welche sie sich mit vier unendlichen Aesten anschliesst.

Beweis. Es sey eine Linie der vierten Ordnung durch die Gleichung

$$(\alpha z - \beta x)(\gamma z - \delta x)(\varepsilon^2 z^2 + 2\varepsilon\zeta z x . Cos\,\mu + \zeta^2 x^2) = a z^3 + b x z^2 + c z x^2 + e x^3 + f^2 z^2 + g^2 x z + h^2 x^2 + i^3 z + k^3 x + l^4,$$

bestimmt, so erhellt, dass für unendlich werdende x die Gleichung

$$\varepsilon^2 z^2 + 2\varepsilon\zeta x z . Cos\,\mu + \zeta^2 x^2 = \frac{a z^3 + b x z^2 + c z x^2 + e x^3}{(\alpha z - \beta x)(\gamma z - \delta x)}$$

in zwei verschiedenen Fällen bestehen kann, erstlich wenn $\alpha z - \beta x = \lambda$, und zweitens wenn $\gamma z - \beta x = \nu$ ist. Das heisst: Es giebt für jedes unendlich werdende x zwei Werthe von z, welche der Gleichung Genüge thun, oder über der ins Unendliche fortgesetzten Abscissenlinie laufen gegen die positiven x hin zwei, und gegen die negativen x hin zwei unendliche Aeste hin, welche sich an zwei durch $\alpha z - \beta x = \lambda$ und $\gamma z - \delta x = \nu$ ausgedrückte gerade Asymptoten anschliessen, und λ, ν werden durch die gegebnen Grössen der Gleichung bestimmt.

§. 338. Erstes Beispiel. Die Hyperbel, für welche die Gleichung $a^2 z^2 - b^2 x^2 = a^2 b^2$ war, gehört hierher. Für sie ist $(a z + b x) = \frac{a^2 b^2}{(a z - b x)}$, und hier wäre $a z - b x = o$ die Gleichung für die eine Asymptote. Setzt man nämlich diesen Werth in die Gleichung, so ist

$$a z + b x = \frac{a^2 b^2}{o} = \infty,$$

und eben so würden Punkte auf der andern Asymptote, deren Gleichung $a z + b x = o$ ist, unserer Curve entsprechen. Beide Asymptoten sind also in der Gleichung $z = \pm \frac{b x}{a}$ enthalten.

§. 339. Zweites Beispiel. Es sey $z^4 - x^4 - 4 a x z^2 = o$, eine Gleichung für eine Linie der vierten Ordnung. Hier soll also

$$x^2 + z^2 = \frac{4 a x z^2}{(z - x)(z + x)}$$

seyn. Setzen wir $z - x = \lambda$, so wird für unendlich wachsende x immer näher $z = x$, oder der Werth $z = x + \lambda$ kann desto unbedenklicher mit $z = x$ vertauscht werden, je grösser x ist, daher

$$2 x^2 = \frac{4 a x^3}{\lambda . 2 x} = \frac{2 a x^2}{\lambda}$$

gesetzt werden kann für sehr grosse x, also $\lambda = a$; oder es ist $z - x = a$ die Gleichung für eine der Asymptoten. Die Gleichung

für die zweite Asymptote würde $z + x = - a$ seyn, weil für grosse x beinahe $z = - x$, und $2x^2 = \frac{4ax^3}{-2x.\lambda}$.

Wir können uns hier von der Richtigkeit dieser Folgerungen noch auf einem andern Wege überzeugen. Die Gleichung $z^4 - 4axz^2 = x^4$, giebt allgemein $z^2 = 2ax \pm x\sqrt{(4a^2 + x^2)}$, oder, wenn man das Binomium entwickelt,

$$z^2 = 2ax \pm x\left(x + \tfrac{1}{2}\,\frac{4a^2}{x} - \tfrac{1}{8}\,.\,\frac{16a^4}{x^3} - \text{etc.}\right),$$ welches um desto näher in $z^2 = 2ax \pm x^2 \pm 2a^2$ übergeht, je grösser x wird.

Für positive x ist nur das positive Zeichen brauchbar, da das negative Zeichen z unmöglich gäbe, und es wird für grosse Werthe von x

$$z^2 = 2ax + x^2 + 2a, \quad \text{oder } z^2 - a^2 = a^2 + 2ax + x^2,$$
$$\text{oder } \sqrt{(z^2 - a^2)} = a + x,$$

welches um so näher $z = \pm(a + x)$ giebt, je grösser z wird. Hier haben wir also dieselben zwei Gleichungen $z = a + x$ und $z + x = - a$ für beide Asymptoten.

Diese Curve ist in Fig. 111. dargestellt; es ist $AF = AC = a$ und CG, CH sind die Asymptoten.

§. 340. Lehrsatz. Wenn das höchste Glied der Gleichung für eine Curve zwei einfache mögliche Factoren enthält, die unter sich gleich sind, und es ist nicht zugleich das nächste Glied durch eben den Factor theilbar, auch nicht gleich Null, so hat die Curve zwei unendliche Aeste, die sich an eine gewöhnliche Parabel anschliessen.

Beweis. Wir können diess wieder an einer Linie der vierten Ordnung zeigen, für welche jetzt die Gleichung in Hinsicht auf die vorausgesetzte Beschaffenheit des höchsten Gliedes folgende seyn muss:

$$(\alpha z - \beta x)^2 (\gamma^2 z^2 + 2\gamma\delta xz\,.\,Cos\,\zeta + \delta^2 x^2) = az^3 + bxz^2 + czx^2 + ex^3$$
$$+ f^2 z^2 + g^2 xz + h^2 x^2 + i^3 z + k^3 x + l^4.$$

Und hier erhellt nun schon aus dem Vorigen, dass für sehr gross werdende Coordinaten immer näher

$$\gamma^2 z^2 + 2\gamma\delta xz\,.\,Cos\,z + \delta^2 x^2 = \frac{az^3 + bxz^2 + cx^2 z + ex^3}{(\alpha z - \beta x)^2}$$ werden muss,

weil die folgenden Glieder gegen das erste nach dem Gleichheitszeichen stehende alsdann unbedeutend werden. Aber die eben angeführten Glieder können sich nur dann für grosse Werthe von x und z einander aufheben, wenn $\alpha z - \beta x$ in solchem Masse wächst, dass das Quadrat dieser Grösse der ersten Potenz von x proportional oder wenigstens desto näher proportional ist, je grösser x wird, das heisst, es muss $(\alpha z - \beta x)^2 = \lambda x + \mu^2$ werden, desto näher, je grösser x und z werden, oder mit andern Worten, die Aeste schliessen sich einer durch

diese Gleichung dargestellte Parabel an. Ein einfaches Beispiel wird diess noch mehr erläutern.

§. 341. **Beispiel.** Es sey $z^2(x^2+z^2)=ax^3+b^2z^2+b^4$, oder $x^2+z^2=\frac{ax^3}{z^2}+b^2+\frac{b^4}{z^2}$, so erhellt sogleich, dass für sehr grosse x nur das Glied $\frac{ax^3}{z^2}$ unter den nach dem Gleichheitszeichen stehenden Gliedern in Betrachtung kömmt, und wenn wir für die unendlich wachsenden x

$z^2=\lambda x+\mu^2$ setzen, und dann die Glieder, die gegen die übrigen unbedeutend sind, weglassen, so erhalten wir $x^2+\lambda x=\frac{ax^2}{\lambda}$, oder da auch λx nicht berücksichtiget werden kann, $\lambda=a$; die Aeste schmiegen sich also an die Parabel an, für welche $z^2=ax$, oder deren Parameter $=a$ ist. Die Grösse μ^2 bleibt unbestimmt, weil zwei Parabeln, die durch die Gleichungen $z^2=ax$, und $z'^2=ax+\mu^2$ ausgedrückt werden, sich einander über alle Grenzen nähern, wenn man ihre Aeste immer weiter fortsetzt; denn, da $z'^2=z^2+\mu^2$, also $z'=z+\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{z}-\frac{1}{8}\frac{\mu^4}{z^3}-$ etc. wird, so ist z' desto näher $=z$, je grösser dieses ist.

Wir hätten diese Parabolische Asymptote noch durch eine andre Betrachtung finden können. Die Gleichung $z^4+(x^2-b^2)z^2=ax^3+b^4$ giebt sogleich ganz allgemein $z^2=\frac{1}{2}(b^2-x^2)\pm\sqrt{\{\frac{1}{4}x^4+ax^3-\frac{1}{2}b^2x^2+\frac{5}{4}b^4\}}$, also wenn ich die Wurzel aus dem Polynomium entwickele,

$$z^2=-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}b^2\pm\sqrt{\{\tfrac{1}{2}x^2+ax-(\tfrac{1}{2}b^2+a^2)-\text{etc.}\}}.$$

Die folgenden Glieder können, wenn x gross wird, ganz wegbleiben, ja, je grösser x wird, desto näher wird $z^2=-\frac{1}{2}x^2\pm(\frac{1}{2}x^2+ax)$ den wahren Werth von z darstellen, und dieser doppelte Werth giebt entweder, weil die höchsten Glieder sich aufheben, $z^2=ax$,

oder $z^2=-x^2$.

Die letzte Gleichung giebt unmögliche Werthe für z, und deshalb kommen die zwei unendlichen Aeste nicht vor, die man als ihr entsprechend vermuthen würde; die erste Gleichung gehört aber der Parabel-Asymptote, an welche die Curve sich immer näher anschliesst. Diese Curve ist in Fig. 119. vorgestellt. Die eine Curve ist für $a=8b$, die andre für $a=b$ gezeichnet.

§. 342. **Lehrsatz.** Wenn das höchste Glied der Gleichung zwei mögliche, gleiche, einfache Factoren enthält, und es ist zugleich entweder dieser Factor auch im nächsten Gliede enthalten, oder dieses nächste Glied $=o$, das dritte Glied dagegen nicht $=o$, so hat die Curve entweder vier Aeste, die sich an zwei parallele gerade Linien anschliessen, oder sie hat gar keine Aeste.

Beweis. Eine Gleichung vom vierten Grade kann uns hier wieder als Beispiel dienen. Da die Bestimmung für das höchste und das nächst folgende Glied fordert, dass der Factor, welcher in jenen zweimal vorkömmt, in diesem einmal vorkomme, so gebe ich der Gleichung folgende Form:

$$(\alpha z - \beta x)^2 (\gamma^2 z^2 + 2\gamma\delta x z . Cos\,\zeta + \delta^2 x^2) = (\alpha z - \beta x)(a z^2 + b x z + c x^2) + f^2 z^2 + g^2 x z + h^2 x^2 + i^3 z + k^3 x + l^4;$$

und es ist also

$$\gamma^2 z^2 + 2\gamma\delta x z . Cos\,\zeta + \delta^2 x^2 = \frac{a z^2 + b x z + c x^2}{\alpha z - \beta x} + \frac{f^2 z^2 + g^2 x z + h^2 x^2}{(\alpha z - \beta x)^2} + \frac{i^3 z + k^3 x}{(\alpha z - \beta x)^2} + \frac{l^4}{(\alpha z - \beta x)^2}.$$

Hier könnte keines der nach dem Gleichheitszeichen stehenden Glieder mit dem vor dem Gleichheitszeichen stehenden für sehr grosse x verglichen werden, wenn nicht $\alpha z - \beta x$ sich einem beständigen Werthe näherte, je grösser x und z werden. Wäre dieses nicht der Fall, so würde selbst das höchste Glied nach dem Gleichheitszeichen nur so wachsen, wie es der ersten Potenz von x angemessen wäre, und könnte also nicht, bei immerfort wachsendem x, mit dem Gliede, welches vor dem Gleichheitszeichen steht, gleichmässig wachsen, oder sich gegen dieses aufheben. Daher ist $\alpha z - \beta x = \lambda$, nnd λ muss aus den gegebnen Grössen der Gleichung bestimmt werden. Setzen wir nämlich $z = \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\lambda}{\alpha}$ überall in die Gleichung und lassen die Glieder weg, die niedrigere Potenzen von x als die zweite enthalten, so wird

$$x^2 \left(\frac{\gamma^2\beta^2}{\alpha^2} + \frac{2\gamma\delta\beta}{\alpha} . Cos\,\zeta + \delta^2\right) = \left(\frac{a\beta^2 + b\alpha\beta + c\alpha^2}{\alpha^2\lambda}\right) x^2 + \left(\frac{f^2\beta^2 + g^2\alpha\beta + h^2\alpha^2}{\alpha^2\lambda^2}\right) x^2,$$

also $\lambda^2 - \lambda\left(\frac{a\beta^2 + b\alpha\beta + c\alpha^2}{\gamma^2\beta^2 + 2\alpha\beta\gamma\delta . Cos\,\zeta + \alpha^2\delta^2}\right) = \frac{f^2\beta^2 + \alpha\beta g^2 + \alpha^2 h^2}{\gamma^2\beta^2 + 2\alpha\beta\gamma\delta . Cos\,\zeta + \alpha^2\delta^2}$,

und $\lambda = \frac{\frac{1}{2}(a\beta^2 + b\alpha\beta + c\alpha^2)}{\beta^2\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma\delta . Cos\,\zeta + \alpha^2\delta^2}$

$$\pm \sqrt{\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{a\beta^2 + b\alpha\beta + c\alpha^2}{\beta^2\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma\delta . Cos\,\zeta + \alpha^2\delta^2}\right)^2 + \frac{f^2\beta^2 + g^2\alpha\beta + h^2\alpha^2}{\beta^2\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma\delta . Cos\,\zeta + \alpha^2\delta^2}\right\}}.$$

Hieraus erhellt, dass λ zwei Werthe erhalten kann, und dass folglich, wenn ich diese $= \lambda'$ und $= \lambda''$ nenne, die beiden durch

$$\alpha z - \beta x = \lambda' \text{ und } \alpha z - \beta x = \lambda''$$

ausgedrückten geraden Linien sich den Aesten der Curve anschmiegen. Diese sind einander parallel, denn die Ordinate der einen ist gleich der Ordinate der

andern $+\frac{\lambda''-\lambda'}{\alpha}$. In dem Falle also, wo λ zwei mögliche Werthe erhält, giebt es zwei Parallellinien als Asymptoten der Curve.

Der zweite Fall dagegen, dass die Curve gar keine unendlich fortlaufenden Aeste hat, folglich in einem endlichen Raume begrenzt ist, findet statt, wenn beide Werthe von λ unmöglich werden. Dieses ist allemal der Fall, wenn in der auf Null gebrachten Hauptgleichung das zweite Glied fehlt, und das dritte positiv ist; denn wenn die Gleichung folgende wäre:

$$(\alpha z-\beta x)^2(\gamma^2 z^2+2\gamma\delta xz.\mathrm{Cos}\,\zeta+\delta^2 x^2)+f^2 z^2+g^2 xz+h^2 x^2+i^3 x + k^3 z+l^4=o,$$

so würde $\lambda=\pm\sqrt{\left(\frac{-f^2\beta^2-g^2\alpha\beta-h^2\alpha^2}{\gamma^2\beta^2+2\alpha\beta\gamma\delta.\mathrm{Cos}\,\zeta+\alpha^2\delta^2}\right)}$ unmöglich. Indess kann λ auch unmöglich werden, wenn das zweite Glied nicht fehlt, jedoch nur dann, wenn das dritte Glied in der auf Null gebrachten Gleichung das positive Zeichen hat.

§. 343. Beispiel. Es sey

$$z^2(x^2+z^2)-xz(x-z)a+b^2x^2-b^4=o,$$

oder $x^2+z^2=\frac{x(x-z)a}{z}-\frac{b^2x^2}{z^2}+\frac{b^4}{z^2}$. Nähme hier mit dem immerfort wachsenden x auch z ins Unendliche zu, so könnte keines der nach dem Gleichheitszeichen stehenden Glieder sich gegen das demselben vorangehende aufheben. Setze ich dagegen $z=\lambda$ als den Werth, welchem z sich immer mehr nähert, je grösser x wird, so ist für sehr grosse x sehr nahe

$$x^2=\frac{ax^2}{\lambda}-\frac{b^2x^2}{\lambda^2};\ \text{also}\ \lambda^2-\alpha\lambda=-b^2;$$

$$\lambda=\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2-b^2)},$$

woraus die Lage der beiden Parallellinien bestimmt wird, die hier mit der Abscissenlinie selbst parallel laufen.

Wäre hier $\frac{1}{2}a<b$, oder sogar $a=o$, so würde λ unmöglich, und es gäbe keine unendlichen Aeste.

Die Gleichung für die Curve hätte sich auch so ordnen lassen:

$$x^2(z^2-az+b^2)+xaz^2=b^4-z^4,$$

oder $x^2+\frac{axz^2}{z^2-az+b^2}=\frac{b^4-z^4}{z^2-az+b^2}$, und daraus würde

$$x=-\frac{\frac{1}{2}az^2\pm\sqrt{\{\frac{1}{4}a^2z^4+(b^4-z^4)(z^2-az+b^2)\}}}{z^2-az+b^2}.$$

Hieraus erhellt sogleich, dass x unendlich wird, wenn $z^2-az+b^2=o$ ist, oder z den so eben für λ gefundenen Werth erhält; denn wenn man $\sqrt{\{\frac{1}{4}a^2z^4+(b^4-z^4)(z^2-az+b^2)\}}$ wie eine binomische Grösse nach den fallenden Potenzen des zweiten Gliedes entwickelt, so ist diese Grösse

$$= (b^4 - z^4)^{\frac{1}{2}} . (z^2 - a z + b^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2} . \frac{(\frac{1}{4} a^2 z^4)}{(b^4 - z^4)^{\frac{1}{2}} . (z^2 - a z + b^2)^{\frac{1}{2}}} - \text{etc.}$$

und die folgenden Glieder haben noch höhere Potenzen von $z^2 - a z + b^2$ im Nenner. Es wird also

$$x = \frac{-\frac{1}{2} a z^2}{z^2 - a z + b^2} \pm \frac{(b^4 - z^4)^{\frac{1}{2}}}{(z^2 - a z + b^2)^{\frac{1}{2}}} \pm \frac{\frac{1}{8} a^2 z^4}{(b^4 - z^4)^{\frac{1}{2}} . (z^2 - a z + b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

unendlich, wenn alle Nenner verschwinden. Wie also auch übrigens die Curve beschaffen seyn mag, gewiss liegen die Punkte in unendlicher Entfernung, denen die Werthe $z = \lambda'$ und $z = \lambda''$ zugehören, oder die Curve hat unendliche Aeste, welche sich den in der Entfernung $z = \lambda'$ und $z = \lambda''$ mit der Abscissenlinie parallel gezognen geraden Linien anschmiegen.

Wäre aber in unsrer Gleichung $a = o$ gewesen, so würde λ unmöglich, und es wäre auch

$$x = \pm \sqrt{\left\{\frac{b^4 - z^4}{b^2 + z^2}\right\}}, \text{ oder } x = \pm \sqrt{(b^2 - z^2)}$$

offenbar eine Gleichung für eine Curve ohne unendliche Aeste, nämlich für den Kreis. Wenn das letzte Glied nicht $= b^4$, sondern etwa $= c^4$ gewesen wäre, so würde dennoch, weil $a = o$ seyn soll, aus der Gleichung

$$x^2 (z^2 + b^2) = c^4 - z^4,$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{c^4 - z^4}{z^2 + b^2}}$$ als Gleichung für eine Curve folgen, in der $z = \pm c$ der äusserste Werth von z wäre, und wo auch x nie unendlich würde, weil weder der Zähler unendlich, noch der Nenner Null werden kann.

Eine hierher gehörige Curve, bei welcher die beiden Asymptoten zusammen fallen, zeigt Fig. 115.

§. 344. Lehrsatz. Hat das höchste Glied der Gleichung für eine Curve zwei gleiche einfache Factoren, und es fehlen die zwei nächsten Glieder, oder vielleicht noch mehrere auf einander folgende Glieder ganz, so hat die Curve irgend eine Hyperbel einer höhern Ordnung zur Asymptote.

Beweis. Es sey die Gleichung

$$(\alpha z - \beta x)^2 (\varepsilon^2 z^2 + 2 \varepsilon \zeta x z . \mathrm{Cos}\, \mu + \zeta^2 x^2) = i^3 x + k^3 z + l^4,$$

dass also das Glied, worin x und z dreimal, und das Glied, worin sie zweimal als Factoren vorkommen, fehlt, dann muss für sehr grosse x und z

$$\varepsilon^2 z^2 + 2 \varepsilon \zeta x z . \mathrm{Cos}\, \mu + \zeta^2 x^2 = \frac{i^3 x + k^3 z}{(\alpha z - \beta x)^2}$$ seyn, welches nur dann statt finden kann, wenn $(\alpha z - \beta x)^2 = \frac{\lambda^3}{x}$ ist, indem nur dann

$\frac{i^3 x + k^3 z}{(\alpha z - \beta x)^2} = \frac{i^3 x^2 + k^3 x z}{\lambda^3}$ mit dem vor dem Gleichheitszeichen stehenden gleichartig wird. Die durch die Gleichung $(\alpha z - \beta x)^2 = \frac{\lambda}{x}$ dargestellte Asymptote ist eine Hyperbel der dritten Ordnung. Hätte auch das Glied $i^3 x + k^3 z$ gefehlt, so wäre die Hyperbel von der vierten Ordnung, oder vielmehr eine doppelte gewöhnliche Hyperbel geworden.

§. 345. **Beispiel.** Es sey $(x - z)^2 (x^2 + x z + z^2) = a^5 x + b^4$, oder $x^2 + x z + z^2 = \frac{a^3 x + b^4}{(x - z)^2}$. Eine Gleichung, die für sehr entfernte Punkte der unendlichen Aeste fordert, dass $(x - z)^2 = \frac{\lambda^3}{x}$ oder das Quadrat von $x - z$ umgekehrt der Abscisse proportional sey.

Um zuerst die durch $(x - z)^2 = \frac{\lambda^3}{x}$ ausgedrückte Hyperbel näher kennen zu lernen, dient die Ueberlegung, dass für $z = o$ offenbar $x = \lambda$, dagegen für $x = o$, $z = \pm \infty$ wird. Diese Hyperbel schliesst sich also (Fig. 118.) an die Linie *FG* mit zwei unendlichen Aesten an; da aber auch $x = \frac{\lambda^3}{(x - z)^2}$ zeigt, dass wenn $x = z = \infty$ wird, die Gleichung vielleicht bestehen könne, so müssen wir den dadurch angedeuteten Ast noch näher untersuchen.

Es sey die Linie *AC*, unter dem Winkel von 45 Grad geneigt, gegen *AE* gezogen, und irgend ein Punkt *D* durch $AE = x$, $ED = z$, $AC = u$, $CD = v$ bestimmt, so ist $x = \frac{u + v}{\sqrt{2}}$, $z = \frac{u - v}{\sqrt{2}}$; also $x - z = v . \sqrt{2}$, und daher für die Hyperbel $2 v^2 = \frac{\lambda^3 . \sqrt{2}}{u + v}$, oder $u = - v + \frac{\lambda^3}{v^2 . \sqrt{2}}$. Diese Gleichung zeigt, dass u unendlich wächst, wenn v sich dem Werthe $= o$ nähert, und dass wir für Punkte, die sehr weit entfernt liegen, $v = \pm \sqrt{\frac{\lambda^3}{u . \sqrt{2}}}$ setzen dürfen, woraus dann erhellt, dass die vier Aeste der Hyperbel eine solche Lage haben, dass zwei sich an beide Seiten der *AC* anschmiegen, der dritte sich an *AF*, der vierte an *AG* anschliesst.

Wir wollen jetzt unsre Curve hiermit vergleichen. Setzen wir in der Gleichung $(x - z)^2 . (x^2 + x z + z^2) = a^3 x + b^4$, ebenfalls $x = \frac{u + v}{\sqrt{2}}$ und $z = \frac{u - v}{\sqrt{2}}$, so ist $x^2 + x z + z^2 = \frac{3 u^2 + v^2}{2}$, und die Gleichung wird

$$2v^2\left(\frac{3u^2+v^2}{2}\right)=\frac{a^3(u+v)}{\sqrt{2}}+b^4,$$

oder $3u^2+v^2=\frac{a^3u}{v^2.\sqrt{2}}+\frac{b^4}{v^2}+\frac{a^3}{v\sqrt{2}}$,

oder $u^2-\frac{1}{3}\frac{a^3u}{v^2\sqrt{2}}=-\frac{1}{3}v^2+\frac{b^4}{3v^2}+\frac{a^3}{3v.\sqrt{2}}$,

also $u=\frac{1}{6}\frac{a^3}{v^2.\sqrt{2}}\pm\sqrt{\left\{\frac{1}{72}\frac{a^6}{v^4}+\frac{b^4}{3v^2}+\frac{a^3}{3v.\sqrt{2}}-\frac{1}{3}v^2\right\}}$,

und u wird unendlich, wenn $v=o$ ist. In jener asymptotischen Hyperbel wurde $u=-v+\frac{\lambda^3}{v^2.\sqrt{2}}$, und folglich für sehr kleine v,

$u=\frac{\lambda^3}{v^2.\sqrt{2}}$, statt dass in unsrer Curve für sehr kleine v

$u=\frac{1}{3}\frac{a^3}{v^2.\sqrt{2}}$ wird. Damit also die Aeste der Curve zusammen schliessen, muss $\lambda^3=\frac{1}{3}a^3$ seyn; und da für unsre Curve der genauere Werth für $u=\frac{1}{3}\frac{a^3}{v^2.\sqrt{2}}+\frac{b^4\sqrt{2}}{a^3}$ ist, so schliesst die Curve sich etwas langsamer als die Hyperbel an die gerade Linie AC an. In Fig. 118. ist diese Curve gezeichnet, die zwei Aeste der asymptotischen Hyperbel, die an FG liegen, haben mit der Curve keine weitere Verbindung.

§. 346. Lehrsatz. Wenn das höchste Glied der Gleichung drei einfache, von einander verschiedene Factoren hat, so hat die Curve drei geradlinige Asymptoten.

Beweis. Ich will als Beispiel die Gleichung der dritten Ordnung $mz(x+z)(x-z)=ax^2+bz^2+cz^2+g^3$ annehmen, wo sogleich erhellt, dass $m=\frac{ax^2+bz^2}{z(x+z)(x-z)}$ werden muss, wenn wir Punkte auf den unendlichen Aesten verlangen. Dieses kann statt finden, erstlich wenn $z=\lambda$ wird für unendlich wachsende x, zweitens wenn $z=\mu-x$ wird für unendlich wachsende x, drittens wenn $z=\nu+x$ wird für unendlich wachsende x. Diese drei Werthe kann also die Ordinate erhalten, wenn x sehr gross ist, und jedem sehr entfernten Punkte der Abscissenlinie entsprechen also drei Werthe der Ordinate, das ist, drei Aeste der Curve laufen über der nach der Richtung der positiven x verlängerten Abscissenlinie, und drei Aeste laufen über der nach der Richtung der negativen x verlängerten Abscissenlinie hin; der eine schliesst sich an die Asymptote, deren Gleichung $z=\lambda=\frac{a}{m}$ ist, an; für den zweiten

wird die Asymptote durch $z = \mu - x = \frac{-(a+b)}{2m} - x$ ausgedrückt; für den dritten ist die Asymptote in der Gleichung $z = \nu + x = + \frac{a+b}{2m} + x$ enthalten. In Fig. 120. 121. 122. 130. 131. 132. sind solche Curven dargestellt.

§. 347. Lehrsatz. Wenn das höchste Glied der Gleichung drei einfache Factoren enthält, unter denen zwei gleiche sind; wenn ferner das nächst folgende Glied diesen dort zweimal vorkommenden Factor nicht enthält, auch nicht $= o$ ist, so hat die Curve eine geradlinige Asymptote und eine Asymptote, die eine gewöhnliche Parabel ist.

Beweis. Wir wollen eine Curve der dritten Ordnung annehmen, für welche also der allgemeinste Ausdruck, der auf unsern Fall passt, folgender ist:

$$(\alpha z - \beta x)^2 (\gamma z - \delta x) = a z^2 + b x z + c x^2 + e^2 z + f^2 x + g^3.$$

Nehme ich hier $\gamma z - \delta x = \lambda$ als Gleichung für die geradlinige Asymptote an, so ist für diese in jedem Punkte, wenn ich ihre Ordinate $= z'$ nenne, $z' = \frac{\delta x}{\gamma} + \frac{\lambda}{\gamma}$; und wenn wir untersuchen, wie weit die Curve sich von der so bestimmten geraden Linie entfernt, so wird sich finden, dass für sehr grosse Werthe von x die Entfernung zwischen der Asymptote und dem Aste der Curve sich einem constanten Werthe nähert. Es sey also allgemein $z = z' + u$, so wird ganz allgemein

$$\left(\frac{\alpha\delta x}{\gamma} + \frac{\alpha\lambda}{\gamma} + \alpha u - \beta x\right)^2 (\lambda + \gamma u) = a\left(\frac{\delta x}{\gamma} + u + \frac{\lambda}{\gamma}\right)^2 + b x\left(\frac{\delta x}{\gamma} + u + \frac{\lambda}{\gamma}\right)$$
$$+ c x^2 + e^2\left(\frac{\delta x}{\gamma} + u + \frac{\lambda}{\gamma}\right) + f^2 x + g^3;$$

also für unendliche x, wo Glieder, welche niedrigere Potenzen von x als die zweite enthalten, in Vergleichung gegen x^2 wegbleiben, und so auch u gegen u^2 u. s. w.

$$\left(\left(\frac{\alpha\delta - \gamma\beta}{\gamma}\right)^2 x^2 + \frac{2\alpha}{\gamma}(\alpha\delta - \beta\gamma) u x + \alpha^2 u^2\right)\gamma u = a\left(\frac{\delta^2 x^2}{\gamma^2} + \frac{2\delta x u}{\gamma} + u^2\right)$$
$$+ b\frac{\delta}{\gamma} x^2 + b x u + c x^2.$$

Damit hier die nach dem Gleichheitszeichen stehenden Glieder sich gegen die vor demselben stehenden aufheben können, muss entweder $u = \mu =$ einer beständigen Grösse werden, wenn x ins Unendliche wächst, oder es müsste der Factor $\left(\left(\frac{\alpha\delta - \gamma\beta}{\gamma}\right)^2 x^2 + \frac{2\alpha}{\gamma}(\alpha\delta - \beta\gamma) u x + \alpha^2 u^2\right) = \nu x + \varrho$, seyn, das ist, u müsste so ausgedrückt seyn, dass sich die quadratischen Glieder sämmtlich einander aufhöben. Das erstere findet statt für die Aeste, welche mit eben

jener geradlinigen Asymptote, die in der Gleichung $\gamma z - \delta x = \lambda$, enthalten war, je weiter hinaus, desto mehr parallel werden; das andre findet statt für Aeste, welche sich einer parabolischen Asymptote anschliessen, indem die Gleichung $\left(\frac{\alpha\delta - \gamma\beta}{\gamma}\right)^2 x^2 + \frac{2\alpha}{\gamma}(\alpha\delta - \gamma\beta)\, x u + \alpha^2 u^2 = \nu x + \varrho$, eine Gleichung für die Parabel ist (§. 284.).

So finden wir also durch diese Betrachtung sogleich alle vier unendliche Aeste, als den angegebnen Asymptoten sich anschliessend.

Hätte ich die Betrachtung umgekehrt von der Parabel-Asymptote angefangen, so hätte ich so schliessen müssen. Zeichnen wir über eben der Abscissenlinie eine durch die Gleichung $(\alpha z' - \beta x)^2 = \mu x + \sigma$ ausgedrückte Parabel, so können wir untersuchen, wie gross für jeden Punkt der Abscissenlinie der Unterschied zwischen den Ordinaten z der Curve und z' der Parabel ist. Um diess bequemer zu thun, wollen wir $z' = \frac{\beta x}{\alpha} + v$ setzen,

$$\text{dagegen } z = \frac{\beta x}{\alpha} + u.$$

Wir stellen uns nämlich vom Anfangspunkte der Coordinaten aus eine Linie unter dem Winkel η, dessen Tangente $\tang \eta = \frac{\beta}{\alpha}$ ist, gegen die Abscissenlinie geneigt, vor; diese schneidet auf den Ordinaten das Stück $\frac{\beta x}{\alpha}$ ab, und v, u bedeuten also die jenseits dieser geraden Linie liegenden Stücke der Ordinate. Dann ist für jedes x, $\alpha^2 v^2 = \mu x + \sigma$, die Gleichung für die Parabel, und

$$\alpha^2 u^2 \left(\frac{\gamma\beta x}{\alpha} + \gamma u - \delta x\right) = \alpha\left(\frac{\beta x}{\alpha} + u\right)^2 + (bx + e^2)\left(\frac{\beta x}{\alpha} + u\right) + c x^2 + f^2 x + g^3,$$

für die Curve. In Beziehung auf die unendlichen Aeste, oder für $x = \infty$, kann die letztere Gleichung erstlich bestehen, wenn $\left(\frac{\gamma\beta x}{\alpha} - \delta x + \gamma u\right) =$ einer beständigen Grösse ist, und dann befinden wir uns auf den Aesten, welche der geradlinigen Asymptote parallel sind. Aber die Gleichung kann auch zweitens bestehen, wenn für sehr grosse x, u^2 der ersten Potenz von x proportional ist. Um das letztere zu beweisen, wollen wir $u = v + w$ setzen, so dass w die nach der Richtung der z gemessenen Abstände zwischen Parabel und Curve sind; dann wäre mit blosser Berücksichtigung der höchsten Glieder

$$\alpha^2 (v + w)^2 \left(\left(\frac{\gamma\beta - \alpha\delta}{\alpha}\right) x + \gamma (v + w)\right) = a\left(\frac{\beta}{\alpha} x + v + w\right)^2 + bx\left(\frac{\beta}{\alpha} x + v + w\right) + c x^2;$$

oder da $v^2 = \frac{\mu x}{\alpha^2}$ (indem σ hier darf weggelassen werden, §. 341.), und folglich v gegen x eine Grösse von geringerer Ordnung ist, auch (mit Weglassung der Glieder, welche v enthalten, in Vergleichung gegen das grössere x und das noch unbekannte w),

$$(\mu x + 2\alpha w \sqrt{\mu x} + \alpha^2 w^2)\left(\left(\frac{\gamma\beta - \alpha\delta}{\alpha}\right)x + \gamma w\right) = a\left(\frac{\beta}{\alpha}x + w\right)^2 + cx^2 + bx\left(\frac{\beta}{\alpha}x + w\right).$$

Da wir hier die Voraussetzung, dass $\left(\frac{\gamma\beta - \alpha\delta}{\alpha}\right)x + \gamma w =$ einer beständigen Grösse werde, nicht gebrauchen wollen, indem wir schon wissen, dass diese sich auf den mit der geraden Asymptote parallelen Ast bezieht, so bleibt uns nichts übrig, als entweder anzunehmen, w sey von einer höhern Ordnung als x, oder w von einer niedrigern Ordnung als x; das heisst, entweder vorauszusetzen, dass w in viel stärkerm Masse als x wachse, oder in viel schwächerm Masse. Sollte w von einer höhern Ordnung oder stärker wachsend als x seyn, so könnten Potenzen von x gegen die gleich hohen von w wegfallen, und die Gleichung ginge endlich in $\alpha^2 \gamma w^3 = a w^2$ über, was nicht statt finden kann; nehmen wir dagegen w als von einer niedrigern Ordnung an, so geht die Gleichung in

$$(\mu x + 2\alpha w \sqrt{\mu} . \sqrt{x} + \alpha^2 w^2)\left(\frac{\gamma\beta - \alpha\delta}{\alpha}\right)x = x^2\left(\frac{a\beta^2}{\alpha^2} + c + \frac{b\beta}{\alpha}\right) \text{ über,}$$

oder $\mu + \frac{2\alpha w \sqrt{\mu}}{\sqrt{x}} + \frac{\alpha^2 w^2}{x} = \frac{a\beta^2 + c\alpha^2 + b\beta\alpha}{\alpha(\gamma\beta - \alpha\delta)}$,

und es muss folglich $\frac{w^2}{x} = o$ seyn, wenn wir das bis jetzt noch unbestimmte μ so annehmen, dass es $= \frac{a\beta^2 + c\alpha^2 + b\beta\alpha}{\alpha(\gamma\beta - \alpha\delta)}$ sey.

Wenn wir also die asymptotische Parabel so annehmen, dass für sie μ den eben angegebnen Werth erhalte, so schliesst sie sich an die Aeste der Curve genau an, indem für die unendlichen Aeste $w = o$ wird. In der Gleichung $(\alpha z' - \beta x)^2 = \mu x + \sigma$, oder $v^2 = \frac{\mu x + \sigma}{\alpha^2}$, bleibt σ unbestimmt, weil es auf die Lage des Scheitels gar nicht ankömmt (§. 341.).

§. 348. Lehrsatz. Wenn das höchste Glied drei mögliche Factoren hat, unter denen zwei einander gleich sind, und es ist dieser zweimal vorkommende Factor auch ein Factor des zweiten Gliedes, oder dieses Glied ist $= o$, so hat die Curve in jedem Falle eine geradlinige Asymptote,

die dem einmal vorkommenden Factor im höchsten Gliede entspricht; ausserdem aber hat sie entweder vier Aeste, die sich an zwei Parallellinien anschliessen, oder diese Aeste sind gar nicht vorhanden, oder es kommen Aeste vor, die sich an Hyperbeln irgend einer Ordnung anschliessen.

Der Beweis und die ganze Untersuchung wird so wie §. 342 — 345. geführt, und die verschiedenen, im Lehrsatze erwähnten Fälle finden eben so wie dort statt.

§. 349. Beispiel. Die Gleichung sey $x z^2 - a(x+z) z = b^2 x + c^3$, so kann die Gleichung $x = \frac{a(x+z)}{z} + \frac{b^2 x}{z^2} + \frac{c^3}{z^2}$, wofern x unendliche Werthe erhalten soll, ganz gewiss bestehen, wenn $z = \lambda$ ist, und dann wird $x = \frac{a}{\lambda} + \frac{b^2}{\lambda^2} x$, oder $\lambda = +\frac{1}{2} a \pm \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 + b^2)}$, und die Curve hat also zwei parallele Asymptoten in der Entfernung $z = \frac{1}{2} a + \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 + b^2)}$ und in der Entfernung $z = \frac{1}{2} a - \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 + b^2)}$ von der Abscissenlinie. Aber die Gleichung kann auch bestehen, wenn z unendlich und $x = \mu = a$ ist, das heisst, es giebt auch eine auf die Abscissenlinie senkrechte Asymptote, für welche $x = a$ ist. Beide Asymptoten ergeben sich auch leicht aus den Werthen für x und z, die man aus der Gleichung findet; denn $x = \frac{c^3 + a z^2}{z^2 - a z - b^2}$ wird unendlich, wenn der Nenner verschwindet, und

$$z = \frac{\frac{1}{2} a x}{x - a} \pm \sqrt{\left\{\frac{\frac{1}{4} a^2 x^2}{(x-a)^2} + \frac{b^2 x + c^3}{x - a}\right\}} \text{ wird unendlich für } x = a.$$

In Fig. 123. ist eine solche Curve gezeichnet. A ist der Anfangspunkt der Abscissen, $AB = a$, CD, die auf x senkrechte Asymptote, an welche die beiden Aeste EF, GH sich anschliessen. IK, LM sind die beiden mit x parallelen Asymptoten.

Die Zeichnung ist für den Fall $b = \frac{3}{5} a$, $c = \frac{1}{5} a$ eingerichtet.

§. 350. Wäre in der letzten Gleichung das Glied $b^2 x$ negativ und so gross, dass der irrationale Theil von z unmöglich würde für unendliche x, so gäbe es nicht zwei solche parallele Asymptoten.

Es sey $x z^2 - a z (x + z) = - b^2 x + c^3$ und $b > \frac{1}{2} a$, so wird λ unmöglich. Fig. 124. zeigt eine solche Curve, wo $b = a = 5c$ ist, und nur die Asymptote CD vorkömmt.

§. 351. Lehrsatz. Wenn das höchste Glied der Gleichung drei unter sich gleiche einfache Factoren enthält, und es kömmt dieser Factor im nächsten Gliede nicht vor, und dieses Glied ist auch nicht $= o$, so hat die Curve eine Parabel der dritten Ordnung zur Asymptote und folglich nur zwei sich an diese anschliessende Aeste.

Beweis. Da aus dem Vorigen nun leicht erhellt, dass eine Gleichung, wie $m(\alpha z - \beta x)^3 = az^2 + bxz + cx^2 + e^2 z + f^2 x + g^3$ nur dann in Beziehung auf unendliche Werthe der Coordinaten bestehen kann, wenn $(\alpha z - \beta x)^3 = \lambda x^2 + \mu$ ist, so erhellt auch sogleich, dass diess die Gleichung für die Asymptote ist, welche folglich eine Parabel der dritten Ordnung wird.

§. 352. **Beispiel.** Es sey $z^3 = a(x^2 - z^2) + b^2 x - c^3$, so ist $z' = a^{\frac{1}{3}} . x^{\frac{2}{3}}$, die Gleichung für die Asymptote. Die allgemeine Bestimmung von x hätte gegeben:

$$x = -\tfrac{1}{2}\frac{b^2}{a} \pm \sqrt{\left\{\frac{z^3}{a} + z^2 + \frac{b^4}{4a^2} + \frac{c^3}{a}\right\}},$$

welches für sehr grosse Werthe von z immer näher in $x = \pm \sqrt{\frac{z^3}{a}}$, oder $z = a^{\frac{1}{3}} . x^{\frac{2}{3}}$ übergeht. Fig. 125. zeigt eine solche Curve, AB, AC sind die Aeste der Asymptote; $DEFGAH$ ist die Curve selbst.

§. 353. **Lehrsatz.** Wenn in dem höchsten Gliede der Gleichung die dritte Potenz eines einfachen Factors vorkömmt, und es findet sich zugleich die erste Potenz dieses Factors im zweiten Gliede, so hat die Curve eine gerade Linie und eine gewöhnliche Parabel zu Asymptoten.

Beweis. Die Gleichung

$$m(\alpha z - \beta x)^3 = (\alpha z - \beta x)(ax + bz) + c^2 x + e^2 z + f^3$$

ist von dieser Beschaffenheit, und hier soll also

$$m = \frac{ax + bz}{(\alpha z - bx)^2} + \frac{c^2 x + e^2 z}{(\alpha z - \beta x)^3} + \frac{f^3}{(\alpha z - \beta x)^3},$$ seyn, welches für unendliche x und z nur statt findet, wenn entweder $(\alpha z - \beta x)^2 = \lambda x + \mu$ oder auch $(\alpha z - \beta x) = \nu$ ist. Ist nämlich $(\alpha z - \beta x)^2 = \lambda x + \mu$, so nähert sich, bei immer wachsenden x und z, das Glied $\frac{ax + bz}{(\alpha z - \beta x)^2}$ einem beständigen Werthe, und die folgenden Glieder werden unbedeutend; dagegen wenn $\alpha z - \beta x = \nu =$ einer beständigen Grösse, so sind die Glieder $\frac{ax + bz}{(\alpha z - \beta x)^2}$, und $\frac{c^2 x + e^2 z}{(\alpha z - \beta x)^3}$ von gleichem Grade, und können sich gegen einander aufheben.

Um diess noch genauer zu übersehen, wollen wir

$$z' = \frac{\beta x}{\alpha} + \frac{\nu}{\alpha}$$ als Gleichung für eine gerade Linie und nun für unsre Curve $z = z' + u$ setzen, so dass u der Abstand zwischen zwei auf der geraden Linie und der Curve liegenden Punkten ist, die beide derselben Abscisse x zugehören. Dann ist allgemein, wenn ich $z = \frac{\beta x}{\alpha} + \frac{\nu}{\alpha} + \frac{u}{\alpha}$ setze,

$$m(v+u)^3=(v+u)\left(ax+\frac{b\beta}{\alpha}x+\frac{bv}{\alpha}+\frac{bu}{\alpha}\right)+c^2x+\frac{e^2\beta}{\alpha}x+\frac{e^2v}{\alpha}+\frac{e^2u}{\alpha}+f^3,$$

also für unendlich entfernte Punkte, wo beständige Grössen, und solche, die mit $v+u$ dividirt sind, ohne x im Zähler zu enthalten, gewiss wegbleiben dürfen, $m(v+u)^2=\left(\frac{a\alpha+b\beta}{\alpha}\right)x+\frac{bu}{\alpha}+\frac{\left(\frac{\alpha c^2+\beta e^2}{\alpha}\right)x}{v+u}$.

Diese Gleichung, die nur in Beziehung auf sehr grosse x gilt, findet erstlich statt, wenn $u=o$ und $v=-\frac{\alpha c^2+\beta e^2}{a\alpha+b\beta}$ ist, und es schliessen sich also zwei Aeste der Curve an die gerade Linie an, deren Gleichung

$$z'=\frac{\beta x}{\alpha}+\frac{\alpha c^2+\beta e^2}{a\alpha^2+b\alpha\beta}\text{ ist;}$$

sie findet aber auch statt, wenn $(v+u)^2=\lambda x$ ist, und vermöge dieser Gleichung giebt es noch zwei parabolische Aeste, zu deren Bestimmung

$$m\lambda x=\frac{a\alpha+\beta b}{\alpha}x+\frac{b}{\alpha}\sqrt{\lambda x}+\frac{\left(c^2+\frac{\beta}{\alpha}\right)\sqrt{x}}{\sqrt{\lambda}},$$

oder mit Weglassung der niedrigern Potenz gegen die höhere

$$\lambda=\frac{a\alpha+b\beta}{\alpha m}\text{ wird.}$$

§. 354. Wäre das Glied c^2x+e^2z durch $\alpha z-\beta x$ theilbar gewesen, so hätte die Gleichung, in welcher ich nun $c^2x-e^2z=(\alpha z-\beta x)g^2$ setze, die Form, $m=\frac{ax+bz}{(\alpha z-\beta x)^2}+\frac{g^2}{(\alpha z-\beta x)^2}+\frac{f^3}{(\alpha z-\beta x)^3}$ erhalten, und auch hier würde für unendliche x die Form zweier Aeste durch $(\alpha z-\beta x)^2=\lambda x$ und $m=\frac{a\alpha+b\beta}{\alpha\lambda}$ bestimmt, dagegen die Form zweier Aeste durch $\alpha z-\beta x=o$. Denn hätte ich $\alpha z-\beta x=u$ gesetzt, so wäre

$$m=\frac{\left(ax+\frac{b\beta}{\alpha}x+\frac{bu}{\alpha}+g^2\right)u+f^3}{u^3},\text{ wo } x=\frac{-f^3\alpha}{(\alpha a+\beta b)u}=\infty\text{ ist,}$$

für $u=o$.

§. 355. Um ein Beispiel zu diesem Falle zu geben, sey

$mz^3=z(ax+b^2)+c^3$, so wird $x=\frac{mz^3-c^3}{az}-\frac{b^2}{a}$, und diese Gleichung kann für ein immer wachsendes x bestehen, sowohl wenn alsdann $ax=mz^2$ für parabolische Aeste, als wenn $z=o$ für geradlinigte Aeste wird.

In Fig. 126. sieht man die vier Aeste dieser Curve, deren zwei BC, DE sich an die gerade Linie, und zwei BF, GH sich an eine Parabel anschliessen.

§. 356. **Lehrsatz.** Wenn das höchste Glied den Factor $(\alpha z - bx)^3$ enthält, und es kömmt zugleich im nächsten Gliede der Factor $(\alpha z - \beta x)^2$ vor, so hat entweder auch das dritte Glied den Factor $(\alpha z - \beta x)$, und dann hat die Curve entweder drei unter sich parallele oder nur eine geradlinige Asymptote, oder das dritte Glied hat nicht den Factor $(\alpha z - \beta x)$, und dann hat die Curve eine parabolische Asymptote der dritten Ordnung.

Beweis. Erster Fall. Es sey

$$(\alpha z - \beta x)^3 z = ax(\alpha z - \beta x)^2 + b^2 z(\alpha z - \beta x) + c^3 z + e^4,$$

so kann der Gleichung

$$z = \frac{ax}{\alpha z - \beta x} + \frac{b^2 z}{(\alpha z - \beta x)^2} + \frac{c^3 z + e^4}{(\alpha z - \beta x)^3}$$

für entfernte Punkte der unendlichen Aeste nur dann Genüge geschehen, wenn $\alpha z - \beta x = \lambda$ gleich einer beständigen Grösse ist. Da man aber dann für so grosse Werthe $z = \frac{\beta x}{\alpha}$ setzen kann, so ist

$$\frac{\beta x}{\alpha} = \frac{a}{\lambda} x + \frac{b^2 \beta}{\alpha \lambda^2} x + \frac{c^3 \beta}{\alpha \lambda^3} x,$$

und λ wird durch eine Gleichung vom dritten Grade

$\lambda^3 - \frac{a\alpha}{\beta} \lambda^2 - b^2 \lambda - c^3 = o$ bestimmt. Hat diese drei mögliche Wurzeln, so hat die Linie drei geradlinige Asymptoten, hat sie nur eine mögliche Wurzel, so hat sie nur eine Asymptote.

Als Beispiel nehme ich

$$(3z - 4x)^3 . z = 4x . a(3z - 4x)^2 + a^2 z(3z - 4x) - 3za^3 + 0{,}05\, a^4.$$

Nehme ich hier Fig. 127. eine neue Abscissenlinie GK so an, dass $tang\, LGK = tang\, \eta = \frac{4}{3}$ ist, und setze $GK = u$, $KM = v$, so wird

$$GN = x = u . Cos\, \eta + v . Sin\, \eta = \frac{3u + 4v}{5},$$

$$NM = z = u . Sin\, \eta - v . Cos\, \eta = \frac{4u - 3v}{5}.$$

$3z - 4x = -5v$, und unsre Gleichung wird

$$(3v - 4u) . 25 . v^3 = (3u + 4v) . 20\, av^2 - a^2(4u - 3v)\, v - \tfrac{3}{5}(4u - 3v)\, a^3 + 0{,}05\, a^4,$$

oder $75\, v^4 - 80 . a v^3 - 3 a^2 v^2 - \frac{9}{5} a^3 v - 0{,}05\, a^4$

$$= u\{100 v^3 + 60 a v^2 - 4a^2 v - \tfrac{12}{5} a^3\},$$

also $u = \dfrac{75 v^4 - 80 a v^3 - 3 a^2 v^2 - \frac{9}{5} a^3 v - 0{,}05 . a^4}{100 v^3 + 60 a v^2 - 4 a^2 v - \frac{12}{5} a^3}$;

λ aber wird durch die Gleichung

$$\lambda^3 = 3\lambda^2 a - a^2\lambda + 3a^3 \text{ gegeben}$$

und erhält die drei Werthe $= a$ oder $= 3a$ oder $= -a$, so dass u unendlich wird für $v = -\frac{1}{5}a$, $-\frac{3}{5}a$ und $+\frac{1}{5}a$.

In Fig. 127. sind AB, CD, EF die drei parallelen Asymptoten, an welche sich sechs Aeste der Curve anschliessen; aber da im höchsten Gliede auch noch der einfache Factor z vorkömmt, so hat die Curve (§. 333.) noch eine mit den Abscissen x parallele Asymptote HI, an welche sich bei I und H noch zwei Aeste der Curve anschliessen.

Zweiter Fall. Es sey $m(\alpha z - \beta x)^3 = a(\alpha z - \beta x)^2 + b^2 x + c^2 z + e^4$, eine Gleichung, die den angegebnen Bedingungen entspricht, so kann für unendliche x die Gleichung $m = \frac{a}{\alpha z - \beta x} + \frac{b^2 x + c^2 z}{(\alpha z - \beta x)^3}$ nur dann bestehen, wenn $(\alpha z - \beta x)^3 = \lambda^2 x$, und $\lambda^2 = \frac{b^2 + \frac{\beta c^2}{\alpha}}{m}$ ist. Die Aeste schliessen sich also dann an die parabolische Asymptote an, deren Gleichung $(\alpha z - \beta x)^3 = \frac{x}{\alpha m}(\alpha b^2 + \beta c^2)$ ist.

Beispiel. Es sey $z^3 = a z^2 + b^2 x + c^3$, oder $x = \frac{z^3 - a z^2 - c^3}{b^2}$. Diese Linie (Fig. 128.) schliesst sich an eine Parabel an, deren Gleichung $z^3 = b^2 x$ wäre.

§. 357. Wenn das höchste Glied drei gleiche Factoren hat, und es fehlt das nächste Glied oder beide nächste, so erfolgt eben das, als wenn diese Glieder jenen Factor enthalten hätten, indem z. B., §. 356. erster Fall, dann der Werth $z = \frac{c^3 z + e^4}{(\alpha z - \beta x)^3}$ nur bestehen könnte für $\alpha z - \beta x = \lambda$.

§. 358. Lehrsatz. Wenn das höchste Glied den Factor $(\alpha z - \beta x)^3$ enthält, und es fehlen die drei folgenden Glieder oder noch mehrere ganz, so werden die Aeste sich an hyperbolische Asymptoten irgend einer Ordnung anschliessen.

Beweis. Es sey

$$(\alpha z - \beta x)^3 (\gamma^2 z^2 + 2\gamma\delta x z . Cos\,\zeta + \delta^2 x^2) = a^4 x + b^4 z + e^5, \text{ so soll}$$

$\gamma^2 z^2 + 2\gamma\delta x z . Cos\,\zeta + \delta^2 x^2 = \frac{a^4 x + b^4 z}{(\alpha z - \beta x)^3}$ eine richtige Gleichung geben für unendliche x. Dieses findet nur dann statt, wenn $(\alpha z - \beta x)^3 = \frac{\lambda^4}{x}$ ist, indem alsdann für unendliche x

$(\gamma^2\beta^2 + 2\alpha\beta\gamma\delta \,.\, Cos\,\zeta + \alpha^2\delta^2)\,x^2 = \frac{(a^4\alpha + b^4\beta)}{\alpha\lambda^4}\,x^2$ und λ eine bestimmte beständige Grösse wird. Die Asymptote ist hier eine Hyperbel der vierten Ordnung.

Wären a und $b = o$ gewesen, so hätte $\frac{e^5}{(\alpha z - \beta x)^3}$ mit x^2 von gleicher Ordnung werden müssen, und es wäre daher $(\alpha z - \beta x)^3 = \frac{\lambda^5}{x^2}$, die Asymptote also eine Hyperbel der fünften Ordnung geworden.

§. 359. Beispiel. Es sey $z^3 \,.\, (x + z)\,x = e^5$, so ist $z^3 = \frac{\lambda^5}{x^2}$ die Gleichung für die Asymptote und es ist $\lambda = e$. Die Curve hat (Fig. 129.) sechs Aeste, deren zwei AB, DE sich an diese hyperbolische Asymptote anschliessen; zwei schliessen sich an die geradlinige Asymptote, deren Gleichung $x = o$ ist, und zwei an die geradlinige Asymptote, deren Gleichung $x + z = o$ ist.

§. 360. Bemerkung. Da wo wir auf hyperbolische Asymptoten geführt werden, giebt es allemal auch geradlinige Asymptoten für die Curve, wie schon (§. 336.) erwähnt ist; aber da wir in Fällen, wie die eben betrachteten, auf diese erst mittelbar geführt werden, so sind wir genöthigt, uns sogleich die Kenntniss der krummlinigen Asymptoten selbst zu verschaffen. Dagegen könnten wir auch umgekehrt da, wo wir sogleich auf geradlinige Asymptoten geführt werden, weiter fragen, mit welcher Art von Hyperbeln denn der Ast der Curve am meisten übereinstimme, also auch da eine krummlinige Asymptote suchen. Um das zu thun, müssten wir in diesen Fällen nicht bloss auf die sich gegenseitig aufhebenden höchsten Glieder sehen, sondern auch die nächst niedrigern Potenzen noch mit berücksichtigen.

Wir würden z. B. in §. 334., wo $z\,(x^2 + z^2) = b\,x^2$ war, $z = b + \frac{u^2}{x}$ setzen und dann wegen des vorausgesetzten grossen Werthes von x nur die Glieder, welche x im Nenner enthalten, weglassen, also

$b\,x^2 + u^2 x + b^3 = b\,x^2$, das ist

$u^2 x = - b^3$ erhalten,

also $z - b = \frac{- b^3}{x^2}$,

das heisst, wie gross man x nehme, so wird doch z nie völlig $= b$, sondern bleibt um etwas kleiner. Indem wir also die Hyperbel der dritten Ordnung, deren Gleichung $(z - b)\,x^2 = - b^3$ ist, als eine Asymptote kennen lernen, die sich an die Curve anschliesst, finden wir zugleich, an welcher Seite der geraden Asymptote der Ast der Curve liegt, worüber wir durch die Ueberzeugung, dass jene gerade Linie eine Asymptote sey, noch nicht belehrt wurden.

Diese Bestimmung der krummlinigen Asymptote werde ich an einzelnen Beispielen in der Folge noch weiter zeigen.

§. 361. Bemerkung. Diese Betrachtungen lassen hinreichend übersehen, wie man bei vier und mehr einfachen Factoren des ersten Gliedes die Rechnung einrichten müsste, dass vier ungleiche einfache Factoren auf vier geradlinige Asymptoten, zwei gleiche und zwei ungleiche Factoren auf zwei geradlinige und eine parabolische Asymptote hindeuten und so ferner, wobei jedoch die einzelnen Fälle noch sorgfältiger müssten unterschieden werden.

Zwölfter Abschnitt.

Allgemeine Bestimmung der Tangenten der Curven, ihrer doppelten Punkte, Knoten und Spitzen.

§. 362. Bemerkung. Die bisherigen Betrachtungen haben uns über die Form der unendlichen Aeste belehrt, aber enthalten nichts, was uns über die Gestalt der näher liegenden Theile einer Curve Aufschluss geben könnte. Freilich könnten wir die einzelnen Punkte der Curve durch Rechnung bestimmen; denn wenn die bekannten Linien in Zahlen, als nach einem gegebnen Massstabe abgemessen, bestimmt sind, so würde für jeden willkürlich angenommenen Werth von x die zugehörige Ordinate z vermittelst einer Gleichung vom höheren Grade gefunden, und folglich für jedes x der Punkt der Curve aufgetragen werden; aber dies gewährte uns theils nur unvollkommen, theils nicht auf dem Wege einer strengen und allgemeinen Betrachtung die Beantwortung der Fragen, welche sich uns hier darbieten.

§. 363. Diese Fragen knüpfen sich grösstentheils an die Frage nach der Richtung, welche die Curve in einem gegebnen Punkte hat, an, und diese Frage wäre beantwortet, wenn wir die Lage der Tangente für jeden Punkt der krummen Linie anzugeben im Stande wären. Wir fangen daher mit der Bestimmung der Tangente, oder vielmehr zuerst mit der Bestimmung der Sehne einer Curve an.

§. 364. Aufgabe. Es ist eine Gleichung für eine krumme Linie gegeben, man sucht eine Bestimmung für die Lage einer Sehne, deren Endpunkte zweien Abscissen x und $x + \Delta x$ entsprechen *).

*) Ich bediene mich des Zeichens Δx, um anzudeuten, dass die zweite Abscisse um etwas verschieden von der ersten sey, Δx ist der Unterschied beider Abscissen, also eine Linie.

Auflösung. Wenn (Fig. 101.) D ein Punkt ist, für welchen die Coordinaten x und z, E ein Punkt, für welchen sie $(x + \Delta x)$ und $(z + \Delta z)$ sind, so ist $BC = \Delta x$, und wenn DG mit BC parallel gezogen, $GE = \Delta z$.

Die Sehne ist also unter einem Winkel $EDG = \varphi$ gegen die Abscissenlinie geneigt, für welchen $tang\,\varphi = \frac{\Delta z}{\Delta x}$ ist, und die Lage der Sehne ist bestimmt, wenn man diesen Winkel, und den Einschnittspunkt F der Sehne oder ihrer Verlängerung in die Abscissenlinie kennt, welcher durch

$FB = \frac{\Delta x}{\Delta z} \cdot z = \frac{z}{tang\,\varphi}$ angegeben wird.

§. 365. Aus der Gleichung für die Curve ist hier z durch x, und Δz durch x und Δx bestimmt, so dass, wenn man x und Δx als gegeben annimmt, die Lage der Sehne immer völlig bestimmt ist.

§. 366. Wenn man auf die angegebne Weise Δx und Δz in die Betrachtung einführt, so würde man zu Bestimmung derselben in den meisten Fällen eine Gleichung von höherem Grade erhalten, die nicht so leicht aufzulösen wäre. Aber unser Zweck ist fast immer, nur dann Gebrauch von diesen Bestimmungen zu machen, wenn Δx und Δz sehr klein sind, das ist, wenn die beiden Punkte auf der Curve einander sehr nahe liegen, und in diesem Falle können wir höhere Potenzen dieser kleinen Grössen als unbedeutend weglassen. Wenn wir also auch für jetzt die Sehne nur als eine ziemlich kleine ansehen, so erhellt doch, dass wir eine gute Annäherung zur Bestimmung von $\frac{\Delta z}{\Delta x} = tang\,\varphi$ schon erhalten, wenn wir nur die niedrigsten Potenzen von Δz und Δx, ja selbst nur die erste Potenz berücksichtigen. Die aus dem ersten Gliede erlangte Bestimmung kann uns aber selbst auch dienen, um eine noch genauere Annäherung zu erhalten, wie folgendes Beispiel zeigt.

§. 367. Aufgabe. Für die Ellipse den Werth von $tang\,\varphi$ durch eine Reihe auszudrücken.

Auflösung. Es sey für die Ellipse $z^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$, so ist für einen zweiten Punkt auch $(z + \Delta z)^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}(x + \Delta x)^2$, oder

$$z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} - \left(\frac{2xb^2}{a^2}\Delta x + \frac{b^2}{a^2}(\Delta x)^2\right), \text{ und da}$$

$$z^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}, \text{ war}$$

$$2z\Delta z + (\Delta z)^2 = -\frac{2b^2}{a^2}x\Delta x - \frac{b^2}{a^2}(\Delta x)^2.$$

Statt diese Gleichung vom zweiten Grade aufzulösen, ist es für kleine Werthe von Δz, Δx hinreichend, nur die Glieder zu betrachten, worin die ersten Potenzen vorkommen und $2z\Delta z = -\frac{2b^2x\Delta x}{a^2}$, also $\frac{\Delta z}{\Delta x} = -\frac{b^2x}{a^2z}$ zu setzen. Um indess den Werth genauer zu bestimmen, ist es bequem, ihn nach den Potenzen von Δx entwickelt weiter zu suchen, was mit Hülfe des eben gefundnen beinahe richtigen Ausdrucks geschehen kann.

Da nämlich völlig allgemein, die Grössen Δx und Δz mögen auch grosse Werthe haben, immer $2z\Delta z\,(\Delta z)^2 = -\frac{2b^2x}{a^2}\Delta x - \frac{b^2}{a^2}(\Delta x)^2$ seyn soll, so setzen wir nach der eben gefundenen annähernden Bestimmung $\Delta z = -\frac{b^2x}{a^2z}\Delta x + U$ in die Gleichung, wo U das ausdrücken soll, was jenem Näherungswerthe an völliger Richtigkeit fehlte, und so wird

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{2b^2x}{a^2}\Delta x + 2zU \\ \qquad + \frac{b^4x^2}{a^4z^2}(\Delta x)^2 - \frac{2b^2x.U}{a^2z}\Delta x + U^2 \\ +\frac{2b^2x}{a^2}\Delta x + \frac{b^2}{a^2}(\Delta x)^2 \end{array}\right\} = o,$$

eine allgemeine Bestimmung für U geben. Wenn wir hier wieder nur mit Berücksichtigung der niedrigsten Glieder (welches jetzt, nachdem die, worin Δx stand, sich aufgehoben haben, diejenigen sind, worin U und $(\Delta x)^2$ vorkömmt), rechnen, so dürfen wir

$2zU + \left(\frac{b^4x^2}{a^4z^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)(\Delta x)^2 = o$ setzen, und dieses gäbe

$U = -\frac{b^2}{2a^2z}\left(\frac{b^2x^2}{a^2z^2} + 1\right)(\Delta x)^2$. Da aber dieser Werth von U nicht genau ist, so mag wieder $U = -\frac{b^2}{2a^2z}\left(\frac{b^2x^2}{a^2z^2} + 1\right)(\Delta x)^2 + V$ den genauern Werth vorstellen, und dieses giebt, für U gesetzt in der vollkommen genauen Gleichung, $2Uz = -\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{b^2x^2}{a^2z^2} + 1\right)(\Delta x)^2 + 2zV$

$$\begin{array}{lcl} +\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{b^2x^2}{a^2z^2}+1\right)(\Delta x)^2 & = & +\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{b^2x^2}{a^2z^2}+1\right)(\Delta x)^2 \\ -2\frac{b^2x}{a^2z}U\Delta x & = & +\frac{b^4x}{a^4z^2}\left(\frac{b^2x^2}{a^2z^2}+1\right)(\Delta x)^3 - \frac{2b^2xV}{a^2z}\Delta x \\ U^2 & = & \left(\frac{-b^2}{2a^2z}\left(\frac{b^2x^2}{a^2z^2}+1\right)(\Delta x)^2 + V\right). \end{array}$$

Die Summe hiervon soll $= o$ seyn, also wenn bloss die Glieder berücksichtigt werden, worin $(\Delta x)^3$ und worin V vorkömmt, welches hier die bedeutendsten sind, so ist

$$V = -\frac{b^4 x}{2 a^4 z^3}\left(\frac{b^2 x^2}{a^2 z^2} + 1\right)(\Delta x)^3,$$

also wenn wir uns mit dieser Entwickelung begnügen

$$\Delta z = -\frac{b^2 x}{a^2 z}\Delta x - \frac{b^2}{2 a^2 z}\left(\frac{b^2 x^2}{a^2 z^2} + 1\right)(\Delta x)^2 - \frac{b^4 x}{2 a^4 z^3}\left(\frac{b^2 x^2}{a^2 z^2} + 1\right)(\Delta x)^3.$$

§. 368. Diese Entwickelung des Werthes von Δz ist allemal brauchbar, wenn Δx, Δz von ziemlich geringer Grösse sind, und sie hat den Vorzug, dass sie auch da anwendbar ist, wo z durch eine schwer aufzulösende höhere Gleichung gegeben wird. Sind die Fälle nicht schwieriger als der eben betrachtete, wo z als Wurzel einer zusammengetzten Function von x gegeben wird, so können wir auf dem gewöhnlichern Wege, indem wir die Wurzel mit Hülfe des binomischen oder polynomischen Lehrsatzes in eine Reihe entwickeln, ebenfalls den Werth von Δz erhalten.

Für die Ellipse ist nämlich $z = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$,

also auch $z + \Delta z = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - (x + \Delta x)^2)}$,

das ist $z + \Delta z = \sqrt{\left\{z^2 - \frac{2 b^2 x \Delta x}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}(\Delta x)^2\right\}}$.

Entwickelt man hier die Potenz, deren Exponent ein Halbes ist, nach den steigenden Potenzen von Δx, so ist

$$z + \Delta z = z - \frac{b^2 x \Delta x}{a^2 z} - \tfrac{1}{2}\frac{b^2}{a^2 z}(\Delta x)^2 - \frac{b^4 x}{2 a^4 z^3}(\Delta x)^3$$
$$- \tfrac{1}{2}\frac{b^4 x^2}{a^4 z^3}(\Delta x)^2 - \frac{b^6 x^3}{2 a^6 z^5}(\Delta x)^3 - \text{etc.},$$

also auch hier $\frac{\Delta z}{\Delta x} = -\frac{b^2 x}{a^2 z} - \left\{\frac{b^2}{a^2 z} + \frac{b^4 x^2}{a^4 z^3}\right\}\frac{(\Delta x)^2}{2} - \text{etc.}$

§. 369. Wir wollen eben diese Entwickelung noch an einem andern Beispiel näher betrachten.

Es sey für eine Linie der dritten Ordnung

$z^3 + x^2 z + b x^2 - a x z = o$,

also auch

$(z + \Delta z)^3 + (x + \Delta x)^2 (z + \Delta z) + b (x + \Delta x)^2 - a (x + \Delta x)(z + \Delta z) = o$,

so wird, wenn man entwickelt, und die Glieder nach den Potenzen von Δz und Δx zusammen ordnet;

$$\left.\begin{array}{l} z^3 + 3z^2\Delta z + 3z(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3 \\ x^2 z + 2xz\Delta x + z(\Delta x)^2 \\ \quad + x^2\Delta z + 2x\Delta x\,.\,\Delta z + \Delta z(\Delta x)^2 \\ bx^2 + 2bx\Delta x + b(\Delta x)^2 \\ - axz - ax\Delta z \\ \quad - az\Delta x - a\Delta x\,.\,\Delta z \end{array}\right\} = o,$$

oder da die Glieder $z^3 + x^2 z + bx^2 - axz$ selbst $= o$ sind:

$$(3z^2 + x^2 - ax)\Delta z + (2xz + 2bx - az)\Delta x + 3z(\Delta z)^2 + (b+z)(\Delta x)^2$$
$$+ (2x - a)\Delta x\,.\,\Delta z + \Delta z\,.\,(\Delta x)^2 + (\Delta z)^3 = o.$$

Wenn hier Δx und Δz so klein wären, dass man bloss die erste Potenz zu berücksichtigen brauchte, so würde

$$\Delta z = \left(\frac{az - 2x(b+z)}{3z^2 + x^2 - ax}\right)\Delta x \text{ seyn; ich setze daher}$$

$$\Delta z = \left(\frac{az - 2x(b+z)}{3z^2 + x^2 - ax}\right)\Delta x + U \text{ und müsste nun diesen Werth in}$$

die eben gefundene Gleichung setzen. Da wir indess die Reihen-Entwickelung nie bis auf sehr viele Glieder fortzusetzen brauchen, so können wir uns die Mühe, alle Glieder vollständig ausgeführt darzustellen, ersparen, wir können zum Beispiel, wenn wir nur bis zu dem Gliede, welches $(\Delta x)^3$ enthält, rechnen wollen, alle die Glieder weglassen, welche $(\Delta x)^4$ oder $U(\Delta x)^3$ oder U^2 enthalten, und so abgekürzt nun setzen:

$$\begin{array}{lcr} (3z^2 + x^2 - ax)\Delta z & = & (az - 2x(b+z))\Delta x + (3z^2 + x^2 - ax)U \\ +(2xz + 2bx - az)\Delta x & = & -(az - 2x(b+z))\Delta x \\ + 3z(\Delta z)^2 & = & +3z\left(\frac{az - 2x(b+z)}{3z^2 + x^2 - ax}\right)^2(\Delta x)^2 + 6z\left(\frac{az - 2x(b+z)}{3z^2 + x^2 - ax}\right)U\Delta x \\ +(b+z)(\Delta x)^2 & = & + (b+z)(\Delta x)^2 \\ +(2x - a)\Delta x\,.\,\Delta z & = & +(2x - a)\left(\frac{az - 2x(b+z)}{3z^2 + x^2 - ax}\right)(\Delta x)^2 + (2x - a)U\Delta x \\ +\Delta z\,.\,(\Delta x)^2 & = & +\left(\frac{az - 2x(b+z)}{3z^2 + x^2 - ax}\right)(\Delta x)^3 \\ +(\Delta z)^3 & = & \left(\frac{az - 2x(b+z)}{3z^2 + x^2 - ax}\right)^3(\Delta x)^3, \end{array}$$

also wenn man bloss das zweite Glied berücksichtigt:

$$U = \left\{\frac{-(2x - a)(az - 2x(b+z))}{(3z^2 + x^2 - ax)^2} - \frac{b+z}{(3z^2 + x^2 - ax)} - \frac{3z(az - 2x(b+z))^2}{(3z^2 + x^2 - ax)^3}\right\}(\Delta x)^2.$$

Setze ich dieses kurz $= A(\Delta x)^2$, und das genauere U

$U = A(\Delta x)^2 + V$, so wird V durch $(\Delta x)^3$ ausgedrückt und also Producte aus V in Δx, bei den Grenzen der Entwickelung, die wir uns vorgesetzt haben, weggelassen; dann giebt das gehörig entwickelte Glied, worin $(\Delta x)^3$ vorkam,

$$V = \left\{ -6z \cdot A\left(\frac{az - 2x(b+z)}{(3z^2 + x^2 - ax)^2}\right) + \frac{(2x-a)A}{3z^2 + x^2 - ax} - \frac{az - 2x(b+z)}{(3z^2+x^2-ax)^2} - \frac{(az - 2x(b+z))^3}{(3z^2 + x^2 - ax)^4} \right\} (\Delta x)^3,$$

und dieser Ausdruck würde sich noch abkürzen, wenn man für A seinen Werth setzte.

§. 370. **Bemerkung.** Diese Entwickelung, wobei wir Δz, Δx als ziemlich klein ansehen, gewährt besonders bei der Bestimmung für die Lage der Tangente einen grossen Vortheil. Zieht man von dem Punkte D in der Curve (Fig. 101.) aus, mehrere Sehnen DE, DH, so wird für jede von ihnen der Winkel $EDG = \varphi$ um desto näher dem Winkel KDG, welchen die Tangente an D mit der Abscissenlinie macht, gleich werde, je kleiner der Abstand der Punkte D, E von einander, oder je kleiner Δz, Δx ist. So erhellt also, dass wir die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Berührungslinie mit der Abscissenlinie macht, wenigstens sehr nahe durch das erste Glied des entwickelten Werthes von $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ ausdrücken können, weil die zur Berührungslinie werdende Sehne gewiss sehr kleine Δx, Δz voraussetzt; aber wir können sogar beweisen, dass hier das erste Glied strenge genau zur Bestimmung des Winkels $KDG = KIC$ dient, welchen die Berührungslinie mit der Abscissenlinie macht.

§. 371. **Lehrsatz.** Wenn man nach der Anleitung, die im Vorigen gegeben worden, den Werth von $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ nach den Potenzen von Δx entwickelt, so drückt schon das erste Glied, in welchem Δx gar nicht als Factor vorkömmt, die genaue trigonometrische Tangente des Winkels aus, welchen an dem durch x, z bestimmten Punkte der Curve die Berührungslinie mit der Abscissenlinie macht.

Beweis. Wenn ich unter A, B, C die Grössen verstehe, welche durch die Entwickelung (in §. 367. 368. 369.) als Coefficienten der Potenzen von Δx gefunden werden, so ist für irgend eine Sehne

$$\Delta z = A\Delta x + B(\Delta x)^2 + C(\Delta x)^3 + \text{etc.},$$

oder $\frac{\Delta z}{\Delta x} = tang\, \varphi = A + B \cdot \Delta x + C(\Delta x)^2 + \text{etc.}$, wenn (Fig. 101.) $\varphi = EDG$ ist. Dieser Werth ist, wenn man ihn weiter entwickelt, ganz allgemein für jede Sehne, und man wird nur deswegen Δx gern nicht zu gross nehmen, damit die folgenden Glieder als klein genug weggelassen werden dürfen.

Je kleiner man nun Δx nimmt, desto weniger wird sich $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ von A un-

terscheiden, und man kann dadurch, dass man immer kleinere Werthe von Δx annimmt, dem Werthe $= A$ so nahe kommen, als man will. Indess, wie klein man auch Δx nehme, ganz erreicht ist diese Grenze nie, so lange man für Δx noch eine bestimmte, wenn gleich kleine, Grösse setzt, oder so lange noch von einer Sehne, zwischen zwei Punkten der Curve gezogen, die Rede ist. Und gerade so, wie hier sich bei der arithmetischen Betrachtung der Werth von $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ der Grenze A immer mehr nähert, je kleiner man Δx annimmt, eben so nähert sich in der geometrischen Betrachtung der Werth des Winkels EDG der Grenze $= KDG$ immer mehr, je näher der zweite Endpunkt der Sehne an den ersten D heran rückt. Auch hier ist diese Grenze nie erreicht, so lange die Sehne noch Sehne bleibt, oder E, wenn auch nahe an D liegend, doch noch ein von D verschiedener Punkt ist, aber sie ist erreicht, wenn die Sehne zur Tangente wird. So wie also allgemeine $tang\ EDG$ gleich dem vollständigen Werthe von $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ war, so wird auch die trigonometrische Tangente des Winkels, der die Grenze aller jener Winkel ist, das ist $tang\ KDG$ gleich der Grenze, welchem der Werth von $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ sich immer mehr nähert; oder es ist strenge genau $tang\ KDG = A$, wenn KD die Berührungslinie an D ist.

§. 372. Beispiel. Um die Richtung der Berührungslinie für die Ellipse zu finden, haben wir also nun, wenn ich jetzt unter φ den Winkel verstehe, den sie mit der grossen Hauptaxe macht (aus §. 367. 368.)

$tang\ \varphi = -\frac{b^2 x}{a^2 z}$ und die Subtangente $= IB$ (Fig. 101.) $= -\frac{a^2 z^2}{b^2 x} = -\frac{(a^2 - x^2)}{x}$,

wie wir es schon in §. 226. fanden.

§. 373. Beispiel. Für die Curve, deren Gleichung

$z^3 + x^2 z + b x^2 - a x z = o$ war, ist in Beziehung auf die Berührungslinie (nach §. 369.) $tang\ \varphi = \frac{a z - 2 x (b + z)}{3 z^2 + x^2 - a x}$, wo man nun für z den durch x bestimmten Werth setzen könnte, um $tang\ \varphi$ ganz durch x darzustellen.

§. 374. Bemerkung. Weil wegen dieser und vieler anderer Betrachtungen die Grenze, welcher sich der Werth von $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ desto mehr nähert, je kleiner man Δx und Δz nimmt, von grosser Wichtigkeit ist, so ist für sie die eigne Bezeichnung eingeführt, dass man $\frac{dz}{dx}$ schreibt, wenn von dieser Grenze die Rede ist. So werde ich in der Folge auch diese Bezeichnungen gebrauchen

dass $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ allgemein den Werth andeutet, der durch die vollständig entwickelte Reihe sollte ausgedrückt werden; $\frac{dz}{dx}$ dagegen nur das erste Glied dieser Reihe oder der Werth ist, welchem wir bei immer geringer angenommener Grösse der Δx und Δz immer näher kommen. So ist also $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ gleich der trigonometrischen Tangente des Winkels, welchen irgend eine Sehne mit der Abscissenlinie macht, aber $\frac{dz}{dx}$ die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Berührungslinie mit der Abscissenlinie macht.

§. 375. Aufgabe. Die Stelle einer Curve zu finden, wo die Berührungslinie einen gegebnen Winkel mit der Abscissenlinie macht.

Auflösung. Wenn allgemein $tang\ \varphi$ durch x und z gegeben ist, aber auch, wie allemal der Fall ist, z durch x ausgedrückt werden kann, so erhält man eine bestimmte Gleichung für die Abscisse x, welche nämlich demjenigen Punkte entspricht, an welchem die Berührungslinie den verlangten Winkel mit der Abscissenlinie macht.

§. 376. Beispiel. Soll bei der Ellipse $\varphi = 45°$, also $tang\ \varphi = 1$ seyn, so haben wir (§. 367.) $1 = \frac{-b^2 x}{a^2 z}$, oder $z = -\frac{b^2 x}{a^2}$; da aber für jeden Punkt der Ellipse auch $z = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$ ist, so haben wir $\frac{b^4 x^2}{a^4} = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, das ist $x^2 = \frac{a^4}{a^2 + b^2}$, oder $x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$, als Abscisse des verlangten Punktes, wo jedoch zu bemerken ist, dass wir für das positive x das negative z, und für das negative x das positive z nehmen müssen, um den Winkel, den wir eigentlich $+\varphi$ nennen, der zwischen den wachsenden positiven Abscissen und Ordinaten eingeschlossen ist, $= 45°$ zu erhalten, so würde (Fig. 102.) $BAD = EAF$, $= \varphi$ seyn.

Beispiel. Sollte bei der Hyperbel $\varphi = 45°$ seyn, so würde

$$z = \frac{b^2 x}{a^2} = \frac{b}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)}, \text{ also}$$

$$x^2 = \frac{a^2}{a^2 - b^2}$$ seyn, also x nur dann möglich, wenn $b < a$, oder die Tangente des halben Asymptotenwinkels kleiner als 1 ist, indem, wenn der halbe Asymptotenwinkel $> 45°$ wäre, die Hyperbel keine Tangente hat, die unter einem so kleinen Winkel gegen die Hauptaxe geneigt wäre.

§. 377. **Beispiel.** Für die Curve, deren Gleichung $z^3 + x^2 z + b x^2 - a x z = o$ ist, die Stelle zu finden, wo die Berührungslinie senkrecht gegen die Abscissenlinie, $tang\ \varphi = \infty$ ist.

Da (§. 373.) $tang\ \varphi = \frac{a z - 2x(b+z)}{3 z^2 + x^2 - a x}$ war, und z, wie eine nähere Betrachtung der Gleichung zeigt, nie unendlich werden kann, so kann $tang\ \varphi$ nur dann ins Unendliche wachsen, wenn der Nenner verschwindet, oder $3 z^2 + x^2 = a x$ wird.

Setze ich den Werth $3 z^2 = a x - x^2$ in die Hauptgleichung (vgl. §. 373.) $z^3 + x^2 z + b x^2 - a x z = o$, die jedem Punkte der Curve entspricht, so giebt sie $z^3 - 3 z^3 + b x^2 = o$, oder $b x^2 = 2 z^3$, also $b x^2 = 2 \left(\frac{ax - x^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, oder $b^2 x^4 = \frac{4}{27} x^3 (a^3 - 3 a^2 x + 3 a x^2 - x^3)$, woraus entweder $x = o$, oder $x^3 - 3 a x^2 + (3 a^2 + \frac{27}{4} b^2) x - a^3 = o$ folgt. Die letztere Gleichung, deren Auflösung sich leicht finden liesse, giebt ohne Schwierigkeit einen Punkt an, wo die Berührungslinie die verlangte senkrechte Lage erhält. Die erstere Gleichung dagegen würde, weil die Hauptgleichung $z^3 + x^2 z + b x^2 - a x z = o$ zeigt, dass für $x = o$, auch $z = o$ wird, uns

$tang\ \varphi = \frac{o}{o}$ geben, — einen Werth, der gar nichts zu entscheiden scheint, dessen wichtige Bedeutung wir aber nun näher betrachten wollen.

§. 378. **Bemerkung.** Um die Fälle vollständig zu übersehen, in welchen der Ausdruck $tang\ \varphi = \frac{o}{o}$ hervorgeht, wollen wir uns die Gleichung für die Curve denken, welche für die Abscisse x die Ordinate z und für die Abscisse $x + \Delta x$ die Ordinate $z + \Delta z$ bestimmt. In der letztern kommen Glieder vor, die Δx, Δz, andre, die $(\Delta x)^2$; $\Delta x \,.\, \Delta z$; $(\Delta z)^2$; und höhere Potenzen und Producte enthalten, und da tritt nun der Fall $tang\ \varphi = \frac{o}{o}$ dann ein, wenn die Glieder, wo Δx, Δz zu der ersten Potenz erhoben vorkommen, solche Coefficienten haben, die bei dem bestimmten Werthe, den man x zu geben versucht, verschwinden. So war in der eben betrachteten Curve

$$(z + \Delta z)^3 + (x + \Delta x)^2 (z + \Delta z) + b (x + \Delta x)^2 - a (x + \Delta x)(z + \Delta z) = o$$

und die Glieder, wo Δz oder Δx vorkömmt, sind

$(3 z^2 + x^2 - a x) \Delta z$ und $(2 x z + 2 b x - a z) \Delta x$, die den Factor $= o$ enthalten, wenn x und z beide $= o$ sind.

Ich will diese Glieder die der ersten Ordnung nennen, die hingegen, welche die Quadrate von Δx, Δz, oder auch das Product $\Delta x \,.\, \Delta z$ enthalten, Glieder der zweiten Ordnung u. s. w.

§. 379. **Lehrsatz.** Wenn man in die Gleichung für eine Curve überall $x + \Delta x$ statt x, und $z + \Delta z$ statt z setzt, und dadurch eine Gleichung erhält, in welcher für einen gewissen Punkt der Curve die Glieder der ersten Ordnung ganz verschwinden, so hat die Curve an dieser bestimmten Stelle einen doppelten Punkt, wenn das Glied der zweiten Ordnung nicht verschwindet, aber einen dreifachen oder vielfachen Punkt, wenn auch das Glied der zweiten Ordnung oder mehrere nach einander $= o$ würden. Diese Regel leidet nur alsdann eine Ausnahme, wenn das Glied, welches unter den nicht verschwindenden das erste oder bedeutendste ist, zu unmöglichen Werthen für Δz führt.

Beweis. Wir haben gefunden, dass im Allgemeinen die Gleichung, in welcher $x + \Delta z$ für x, und $z + \Delta z$ für z gesetzt worden, eine Form wie

$$U \Delta z + V \Delta z + W (\Delta x)^2 + X \Delta x \,.\, \Delta z + Y (\Delta z)^2 + \text{etc.} = o$$ erhält,

und die Betrachtung (§. 371.) lehrte uns, dass die Grenze des daraus hervorgehenden Werthes für $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ die Lage der Berührungslinie bestimme. Sobald nun U und V wirkliche, von Null verschiedene Werthe haben, so war jene Grenze des Werthes von $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ durch $\frac{V}{U}$ bestimmt; aber wenn diese Glieder fehlen, so muss offenbar die Bestimmung aus den Gliedern der zweiten Ordnung hervorgehen, und diese allein betrachtet, geben jeszt eben so gut den Werth der Grenze von $\frac{\Delta z}{\Delta x}$, als es vorhin die Glieder der ersten Ordnung allein betrachtet thaten. Aber die Gleichung $W + X \frac{\Delta z}{\Delta x} + Y \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2 = o$, giebt für $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ einen doppelten Werth als Grenze an, und es wird daher an diesem Punkte nicht die Lage einer Tangente, sondern zweier Tangenten bestimmt, welches nur dann geschehen kann, wenn an diesem Punkte zwei Aeste der Curve zusammen treffen.

Wären auch die Coefficienten W, X, Y sämmtlich $= o$, so müsste man die Glieder der dritten Ordnung betrachten und aus ihnen die Grenze des Werthes $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ herleiten, oder die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Berührungslinie mit der Abscissenlinie macht, bestimmen. Aber diese Bestimmung führt in solchem Falle auf eine Gleichung vom dritten Grade, deren drei Wurzeln, wenn sie alle möglich sind, auf drei Lagen der Tangente, also auf drei sich berührende oder schneidende Zweige der Curve hindeuten.

Wenn in dem Falle, wo die Betrachtung des zweiten Gliedes eintrat, beide Wurzeln unmöglich werden, so heisst das, es gebe hier keine Tangente, — diesen Fall werden wir sogleich näher betrachten. Wenn bei der Auflösung

der Gleichung vom dritten Grade nur eine Wurzel möglich ist, so kann die Tangente nur eine seyn, und der dreifache Punkt, der uns angedeutet ward, muss von einer andern Beschaffenheit seyn (vergl. §. 384. 386.).

§. 380. Beispiel. In der in §. 369. 377. betrachteten Curve werden x und z zugleich $= o$, und wenn man

$$(z+\Delta z)^3 + (x+\Delta x)^2 (z+\Delta z) + b(x+\Delta x)^2 - a(x+\Delta x)(z+\Delta z) = o$$

entwickelt, und nun den Fall betrachtet, wo $z = x = o$ ist, so erhält man

$$b(\Delta x)^2 - a\Delta x \,.\, \Delta z + (\Delta z)^3 + \Delta z (\Delta x)^2 = o, \text{ und daraus}$$

$$\Delta x = \frac{\tfrac{1}{2} a \Delta z}{b + \Delta z} \pm \sqrt{\left\{\frac{\tfrac{1}{4} a^2 (\Delta z)^2}{(b+\Delta z)^2} - \frac{(\Delta z)^3}{b+\Delta z}\right\}}, \text{ das ist, wenn man}$$

$$\sqrt{\left\{\frac{\tfrac{1}{4} a^2 (\Delta z)^2}{(b+\Delta z)^2} - \frac{(\Delta z)^3}{b+\Delta z}\right\}} = \frac{\Delta z}{b+\Delta z} \sqrt{\{\tfrac{1}{4} a^2 - b\,\Delta z - (\Delta z)^2\}} \text{ nach den}$$

Potenzen von Δz entwickelt $= \dfrac{\Delta z}{b+\Delta z}\left\{\tfrac{1}{2} a - \dfrac{b\,\Delta z}{a} - \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{b^2}{a^3}\right)(\Delta z)^2 - \text{etc.}\right\}$,

$$\text{oder } \Delta x = \frac{\tfrac{1}{2} a \Delta z \pm \tfrac{1}{2} a \Delta z \mp \dfrac{b\,\Delta z^2}{a}}{b+\Delta z} = \frac{(\tfrac{1}{2} a \pm \tfrac{1}{2} a)\Delta z}{b} - \left(\frac{\tfrac{1}{2} a \pm \tfrac{1}{2} a}{b^2} \pm \frac{1}{a}\right)(\Delta z)^2,$$

wenn man mit $(b+\Delta z)^{-1} = b^{-1} - \Delta z \,.\, b^{-2} + \text{etc.}$ multipliciret. Die Grenze des Werthes $\dfrac{\Delta x}{\Delta z}$ ist also $= \dfrac{\tfrac{1}{2} a \pm \tfrac{1}{2} a}{b} = \dfrac{dx}{dz}$,

das heisst, *Cotang* φ entweder $= \dfrac{a}{b}$,

oder $= o$.

Die eine Berührungslinie ist also so gegen die Abscissenlinie geneigt, dass *tang* $\varphi = \dfrac{b}{a}$ ist, die andre ist senkrecht gegen dieselbe.

Ich hätte kürzer zu diesem Resultat gelangen können, wenn ich sogleich das Glied der zweiten Ordnung $= o$ gesetzt und daraus

$$(\Delta x)^2 - \frac{a}{b}\,\Delta x \,.\, \Delta z = o,$$

$$\text{also } \Delta x = \tfrac{1}{2}\frac{a\,\Delta z}{b} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\frac{a^2 (\Delta z)^2}{b^2}\right)},$$

das ist $\dfrac{\Delta x}{\Delta z} = \dfrac{\tfrac{1}{2} a \pm \tfrac{1}{2} a}{b} = \dfrac{dx}{dz}$ hergeleitet hätte. Jene Reihe zeigt, wie die Entwickelung für eine Sehne, welche von dem Punkte, wo $x = z = o$ ist, ausginge, bestimmt werden könnte, und wie die Tangente als Grenze aller Sehnen sich an diese anschliesst.

§. 381. Beispiel. Die Curve $z^4 - x^4 - 4axz^2 = o$, giebt auch $z = o$, wenn $x = o$ ist, oder die Curve geht durch den Anfangspunkt der Co-

ordinaten. Setzt man hier $z + \Delta z$ statt z, und $x + \Delta x$ statt x, so wird, nach den Potenzen von Δx, Δz geordnet,

$$\left.\begin{array}{l} z^4 + 4z^3\Delta z + 6z^2(\Delta z)^2 + 4z(\Delta z)^3 + (\Delta z)^4 \\ - x^4 - 4x^3\Delta x - 6x^2(\Delta x)^2 - 4x(\Delta x)^3 - (\Delta x)^4 \\ -4axz^2 - 8axz\Delta z - 4ax(\Delta z)^2 \\ - 4az^2(\Delta x) - 8az\Delta x.\Delta z - 4a\Delta x.(\Delta z)^2 \end{array}\right\} = o,$$

Für $x = z = o$ bleiben also bloss die Glieder

$- 4a\Delta x . (\Delta z)^2 + (\Delta z)^4 - (\Delta x)^4 = o$ übrig, und das grösste unter ihnen $- 4a . \Delta x . (\Delta z)^2$ giebt uns an, dass der Punkt, wo x und z beide $= o$ sind, ein dreifacher Punkt seyn muss, für den man entweder Δx oder besser $\frac{\Delta x}{\Delta z}$ oder $\frac{dx}{dz} = o$, $Cotang\, \varphi = o$ setzen, oder dagegen $\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = tang^2\, \varphi = o$ setzen muss; der erste Werth von φ zeigt uns bei A einen auf die Abscissenlinie senkrechten, der andre zwei mit ihr parallele Aeste, für welche an beiden Seiten der Abscissenlinie der Winkel φ einen immer kleinern Werth erhält, und so gleichsam in $\pm o$ übergeht (Fig. 111.).

Hätten wir die Lage der von diesem Punkte ausgehenden Sehne gesucht, so würde die Gleichung

$$(\Delta z)^4 - 4a\Delta x . (\Delta z)^2 = (\Delta x)^4$$

geben $(\Delta z)^2 = 2a\Delta x \pm \Delta x \sqrt{\{4a^2 + (\Delta x)^2\}}$

$$= \left\{2a \pm 2a \pm \frac{\frac{1}{2}(\Delta x)^2}{2a} \pm \text{etc.}\right\} \Delta x.$$

Je kleiner also Δx, Δz werden, desto mehr nähert sich, erstlich wenn das obere Zeichen gilt, $\frac{(\Delta z)^2}{\Delta x}$ dem Werthe $= 4a$, oder die Grenze von $\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{dz}{dx} = tang\, \varphi$ dem Werthe $= \frac{4a}{\Delta z}$, welcher ins Unendliche wächst, wenn Δz abnimmt, also φ immer näher an 90 Grade giebt; zweitens, wenn das untere Zeichen gilt, nähert sich $(\Delta z)^2$ dem Werthe $= - \frac{\frac{1}{2}(\Delta x)^3}{2a}$, und Δz wird also nur möglich für negative Δx, für diese aber ist die Grenze $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \left(\frac{\Delta x}{4a}\right)$ bis zu o abnehmend, wenn man Δx immerfort abnehmen lässt, also $tang\, \varphi = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{4a}\right)}$ an beiden Seiten der Abscissenlinie abnehmend, und $tang\, \varphi$ nähert sich dem Werthe $= o$ desto mehr, je kleiner Δx angenommen wird.

§. 382. Erklärung. Ein Punkt heisst ein der Curve zugeordneter Punkt, wenn er nicht in dem Zuge der Curve, sondern ganz von die-

sem getrennt liegt, dennoch aber die Gleichung, welche die Curve ausdrückt, auch für ihn passt.

§. 383. Beispiel. Es sey eine Curve durch die Gleichung
$(x^2 + z^2)(a - x)^2 = b^2 x^2$ gegeben. Wenn hier $b < a$, oder $b = a - c$ ist, so erhält man für $z = o$, für x die Werthe aus der Gleichung
$x^2 (a - x)^2 = b^2 x^2$, das heisst für $z = o$ wird entweder $x = o$, oder $(a - x)^2 = (a - c)^2$, das ist $a - x = \pm (a - c)$,

$$x = a \mp a \pm c,$$

also mit $z = o$ gehören drei Werthe für x,
$x = o$, $x = c$, $x = 2a - c$ zusammen.

Sucht man nun die Werthe, welche x für sehr kleine z erhält, so findet man zwar, dass durch $x = c$ und $x = 2a - c$ fortlaufende Theile der Curve gehen, um $x = o$ aber sich gar kein Punkt der Curve weiter findet. Der Punkt, wo $x = o$, $z = o$ ist, hat also, obgleich er mit den übrigen Theilen der Curve nicht zusammen hängt, dennoch die Eigenschaft, dass die Gleichung für ihn passt, und so heisst er ein der Curve zugeordneter Punkt.

§. 384. Lehrsatz. Wenn man in die Gleichung für eine Curve $x + \Delta x$ statt x, und $z + \Delta z$ statt z setzt, und es verschwinden dann für einen gewissen Punkt alle Glieder, welche Δx, Δz enthalten, die Glieder der zweiten Ordnung aber geben einen unmöglichen Werth für $\frac{\Delta z}{\Delta x}$, so ist jener Punkt ein einzeln liegender, bloss der Curve zugeordneter Punkt.

Beweis. In einem solchen Punkte wird die Lage der Berührungslinie als unmöglich angegeben, obgleich doch der Punkt sich unter denen befindet, die zur Curve gehören. Es kann also durch ihn kein fortlaufender Theil der Curve gehen, indem der so gut hier als anderswo eine Berührungslinie haben würde. Der Punkt muss also genau so einzeln liegen, wie wir es bei den zugeordneten Punkten gefunden haben.

§. 385. Beispiel. Setzt man in der Gleichung (§. 383.)
$(x^2 + z^2)(a - x)^2 = b^2 x^2$, überall $x + \Delta x$ statt x, und $z + \Delta z$ statt z, so wird

$$o = \left\{ \begin{array}{l} x^4 + 4x^3(\Delta x) + 6x^2(\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4 \\ + x^2 z^2 + 2x^2 z \Delta z + x^2 (\Delta z)^2 \\ \quad + 2xz^2 \Delta x + 4xz \Delta x . \Delta z + 2x \Delta x (\Delta z)^2 \\ \quad\quad + z^2 (\Delta x)^2 + 2z \Delta z (\Delta x)^2 + (\Delta z)^2 (\Delta x)^2 \\ - 2ax^3 - 6ax^2 \Delta x - 6ax(\Delta x)^2 - 2a(\Delta x)^3 \\ - 2axz^2 - 4axz \Delta z - 2ax(\Delta z)^2 \\ \quad - 2az^2 \Delta x - 4az \Delta z . \Delta x - 2a \Delta x . (\Delta z)^2 \\ + (a^2 - b^2)x^2 + 2(a^2 - b^2)x \Delta x + (a^2 - b^2)(\Delta x)^2 \\ + a^2 z^2 + 2a^2 z \Delta z + a^2 (\Delta z)^2. \end{array} \right.$$

Verlangt man hier die Lage der Tangente für $x = z = o$, so ergiebt sich $o = (a^2 - b^2)(\Delta x)^2 + a^2 (\Delta z)^2$ als das höchste Glied, also
$\frac{dz}{dx} = \pm \sqrt{\left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right)}$, welches unmöglich wird für $a > b$.

Hätte man die Gleichung für die von eben jenem Punkte ausgehenden Sehnen betrachten wollen, so wäre für sie

$$o = (a^2 - b^2)(\Delta x) + a^2 (\Delta z)^2 - 2a(\Delta x)^3 - 2a \Delta x (\Delta z)^2 + (\Delta x)^4 + (\Delta z)^2 . (\Delta x)^2;$$

also $\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2 \left\{1 - \frac{2a}{\Delta x} + \frac{a^2}{(\Delta x)^2}\right\} = \frac{2a}{\Delta x} - 1 - \frac{(a^2 - b^2)}{(\Delta x)^2}$,

oder $\frac{\Delta z}{\Delta x} = \pm \sqrt{\left\{\frac{2a \Delta x - (\Delta x)^2 - (a^2 - b^2)}{(\Delta x)^2 - 2a \Delta x + a^2}\right\}}$,

ein Werth, der allemal unmöglich ist, wenn $b^2 < (a - \Delta x)^2$ ist. Ist also $b < a$, so lassen sich nur dann Sehnen von dem durch $x = o$, $z = o$ bestimmten Punkte aus ziehen, wenn $\Delta x > (a - b)$ ist; es finden also nicht immer kleinere und kleinere Sehnen zwischen jenem Punkte und andern immer näher genommenen statt. Die genauere Betrachtung dieser Curve wird uns hierüber in der Folge weiter belehren.

§. 386. Auf ähnliche Weise müssen wir nun auch den Fall deuten, wo $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ durch eine Gleichung des dritten Gliedes, die zwei unmögliche Wurzeln hat, ausgedrückt wird. Der Punkt, wo das statt findet, hat die Eigenschaften eines dreifachen Punktes, aber doch ist nur *eine* Tangente an ihm möglich; es ist daher so anzusehen, als ob ein zugeordneter Punkt sich auf dem Zweige der Curve selbst befände. Die nachher an Beispielen dargestellte Entstehung dieser zugeordneten Punkte wird mehr Belehrung darüber darbieten.

Dreizehnter Abschnitt.

Umständlichere Betrachtung einzelner Linien höherer Ordnungen.

1. Die Linie, deren Gleichung ist:

$$z^4 + x^4 + 2x^2 z^2 + 2a^2 (z^2 - x^2) = f^4 - a^4.$$

§. 387. Bemerkung. Wir fanden oben (§. 70.) den geometrischen Ort einer Dreiecksspitze durch diese Gleichung ausgedrückt, wenn die Grundlinie unveränderlich und das Rechteck aus beiden Schenkeln des Dreiecks immer gleich ausfallen sollte. Wir wollen jetzt die Curve näher betrachten.

§. 388. Lehrsatz. Die Curve ist in einem endlichen Raume enthalten und hat keine unendlichen Aeste.

Beweis. Das höchste Glied $z^4 + 2x^2 z^2 + x^4$, welches $= (z^2 + x^2)^2$ ist, hat keine möglichen Factoren (§. 331.).

Auch die Werthe für z und x in §. 70. zeigen diess, da weder

$$z = \pm \sqrt{\{- a^2 - x^2 + \sqrt{(f^4 + 4a^2 x^2)}\}},$$

noch $x = \pm \sqrt{\{a^2 - z^2 \pm \sqrt{(f^2 - 4a^2 z^2)}\}}$ möglich bleibt, wenn die andre Ordinate unendlich wächst.

§. 389 Bemerkung. Da f und a kein gegebnes Verhältniss zu einander haben, so bieten sich uns drei Fälle zur nähern Betrachtung dar, wenn $f > a$, $f = a$, $f < a$ ist.

§. 390. Lehrsatz. Die Curve erhält verschiedene Gestalten, je nachdem $f > a$, oder $f = a$, oder $f < a$ ist, indem sie im ersten Falle die Abscissenlinie nur zweimal schneidet und einen ovalen Raum umschliesst, im dritten Falle dagegen aus zwei von einander getrennten Ovalen besteht, statt dass im zweiten Falle endlich die Umfangslinien dieser beiden begrenzten Räume einen Punkt gemein haben.

Beweis. Erster Fall. Es sey $f > a$, so erhält auch für $x = o$, z zwei mögliche Werthe, $= \pm \sqrt{(f^2 - a^2)}$, und z bleibt immer möglich, so lange x kleiner als $\pm \sqrt{(f^2 + a^2)}$ ist. Ueber und unter dem ganzen, hierdurch bestimmten Theile der Abscissenlinie liegt also ein fortlaufender Theil der Curve, und der ovale Raum, dessen ganze Länge $= 2\sqrt{(f^2 + a^2)}$ und Breite $= 2\sqrt{(f^2 - a^2)}$ ist, wird von der Curve umschlossen. Wir können daher (Fig 104.) $CB = \sqrt{(f^2 + a^2)}$ die halbe grosse Axe, $CD = \sqrt{(f^2 - a^2)}$ die halbe kleine Axe nennen.

Ist dagegen $f < a$, so ist $z = \pm \sqrt{\{- a^2 - x^2 + \sqrt{(f^4 + 4a^2 x^2)}\}}$ unmöglich, so lange $\sqrt{(f^4 + 4a^2 x^2)} < a^2 + x^2$ bleibt, oder so lange $f^4 + 4a^2 x^2 < (a^2 + x^2)^2$, oder $f^4 < (a^2 - x^2)^2$, oder $x^2 < a^2 - f^2$ ist. Für alle Punkte der Abscissenlinie also, für welche x noch nicht $\pm \sqrt{(a^2 - f^2)}$ beträgt, findet man keinen Punkt der Curve; dagegen wenn x grösser wird, so bleibt z möglich, bis es für $x = \sqrt{(a^2 + f^2)}$ wieder verschwindet und für grössere Werthe unmöglich wird. Die Curve umschliesst also, Fig. 106., an der positiven wie an der negativen Seite des Anfangspunktes der Abscisse einen Raum, dessen äusserste Punkte durch $x' = \sqrt{(a^2 - f^2)}$ und $x'' = (a^2 + f^2)$ angegeben werden. Dass z möglich bleibt für alle zwischen diese Werthe fallende Abscissen, erhellt, wenn man $x^2 = x'^2 + nf^2$ setzt, dann ist

$$z^2 = - a^2 - (a^2 - f^2) - nf^2 + \sqrt{(f^4 + 4a^4 - 4a^2 f^2 + 4a^2 n f^2)},$$

oder $z^2 = -(2a^2 - f^2) - nf^2 + \sqrt{((2a^2 - f^2)^2 + 4a^2 n f^2)}$, und z bleibt möglich, so lange $(2a^2 - f^2)^2 + 4a^2 n f^2 > ((2a^2 - f^2) + nf^2)^2$, oder $o > - 2nf^4 + n^2 f^4$, das ist, so lange $2n > n^2$, $2 > n$ ist, also bis dahin, wo $x^2 = x'^2 + 2f^2 = x''^2$ wird.

Für $f = a$ ist allgemein $z = \pm \surd(-a^2 - x^2 + f \cdot \surd(f^2 + 4x^2))$, und folglich $z = o$ für $x = o$, aber z behält mögliche Werthe, bis $x = f \cdot \surd 2$ wird, wo z wieder verschwindet. Die Curve umschliesst daher zwei Flächenräume, deren Umfangslinien den Punkt, wo $x = o$, $z = o$ ist, gemein haben.

§. 391. In dem zuletzt betrachteten Falle wird die rationale Gleichung für die Linie folgende:

$$(z^2 + x^2)^2 + 2a^2(z^2 - x^2) = o,$$

und es ist die unter dem Namen Lemniscata (Schleifenlinie) bekannte Curve.

§. 392. Aufgabe. Die Punkte der Curve zu finden, wo ihre Berührungslinie mit der Abscissenlinie parallel ist, und wo folglich z grössere oder kleinere Werthe als in den benachbarten Punkten hat.

Auflösung. Sucht man allgemein die Gleichung für die Lage einer Sehne, deren Endpunkte durch x und z und durch $x + \Delta x$ und $z + \Delta z$ bestimmt sind, so muss zugleich, vermöge der Hauptgleichung

$$(z^2 + x^2)^2 + 2a^2(z^2 - x^2) - f^4 + a^4 = o, \text{ und}$$

$$(z + \Delta z)^4 + 2(z + \Delta z)^2(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)^4 + 2a^2(z + \Delta z)^2 - 2a^2(x + \Delta x)^2 - f^4 + a^4 = o, \text{ seyn,}$$

also, wenn man entwickelt, auch

$$\left.\begin{array}{llll} 4z^3\Delta z & + 6z^2(\Delta z)^2 & + 4z(\Delta z)^3 & + (\Delta z)^4 \\ + 4zx^2\Delta z & + 2x^2\Delta z^2 & & \\ + 4z^2x\Delta x & + 8xz\Delta x . \Delta z & + 4x\Delta x(\Delta z)^2 & \\ & + 2z^2(\Delta x)^2 & + 4z\Delta z(\Delta x)^2 & + 2(\Delta z)^2(\Delta x)^2 \\ + 4x^3\Delta x & + 6x^2(\Delta x)^2 & + 4x(\Delta x)^3 & + (\Delta x)^4 \\ + 4a^2z\Delta z & + 2a^2(\Delta z)^2 & & \\ - 4a^2x\Delta x & - 2a^2(\Delta x)^2 & & \end{array}\right\} = o.$$

Für die Lage der Berührungslinie finden wir also allgemein, wenn der Winkel, den sie mit der Abscissenlinie macht, $= \varphi$ heisst,

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{x \cdot (a^2 - x^2 - z^2)}{z(z^2 + x^2 + a^2)} = \frac{dz}{dx},$$ und es erhellt, dass $\text{tang}\,\varphi = o$, oder die Berührungslinie mit der Abscissenlinie parallel wird, erstlich wenn $x = o$, zweitens wenn $x^2 + z^2 = a^2$, also $4a^4 - f^4 - 4a^2x^2 = o$,

$$\text{oder } x^2 = a^2 - \frac{f^4}{4a^2} \text{ ist.}$$

Der erste Werth $x = o$ ist nur da brauchbar, wo $f > a$ ist, weil für $f < a$ die Curve gar keinen Punkt hat, für welchen $x = o$ wäre, und für $f = a$ $\text{tang}\,\varphi = \frac{o}{o}$ unbestimmt wird, wenn zugleich x und z verschwinden. Die andern beiden Werthe $x = \pm \frac{\surd(4a^4 - f^4)}{2a}$ geben immer Punkte, wo die Curve der grossen Axe parallel ist, wenn nicht etwa $2a^2 < f^2$ ist.

Wir können also folgende Fälle unterscheiden: 1. Wenn $f > a$ und zugleich $> a . \sqrt{2}$, so ist die Curve ein wirkliches Oval, dessen höchster und tiefster Punkt über dem Mittelpunkte, oder da, wo $x = o$ ist, liegt (Fig. 103.). 2. Ist zwar $f > a$ aber $f < a . \sqrt{2}$, so hat die Curve zwei den Abscissen $x = \pm \frac{\sqrt{(4a^4 - f^4)}}{2a}$ entsprechende Ordinaten, welche die grössesten sind, und zwischen ihnen liegen kleinere, unter welchen die für $x = o$ die kleinste ist (Fig. 104). 3. Ist $f = a$, so liegen die grössten Ordinaten da, wo $x = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$ ist, im Anfangspunkte der Abscissen aber schneidet die Curve die Abscissenlinie und hat hier, wie $tang\, \varphi = \frac{o}{o}$ verräth, einen doppelten Punkt (Fig. 105.). 4. Für $f < a$ liegen die grössten Ordinaten beider Ovale in der Entfernung $x = \frac{\sqrt{(4a^4 - f^4)}}{2a}$ vom Mittelpunkte (Fig. 106.).

§. 393. Die grösste Ordinate selbst wird gefunden, wenn wir $x^2 = a^2 - \frac{f^4}{4a^2}$ in den Werth für z setzen, wodurch

$$z^2 = -a^2 - x^2 + \sqrt{(f^4 + 4a^2 x^2)} \text{ nun übergeht in}$$

$$z^2 = -2a^2 + \frac{f^4}{4a^2} + \sqrt{(4a^4)} = \frac{f^4}{4a^2},$$

$$z = \frac{f^2}{2a}.$$

§. 394. Da für die höchsten Punkte der Curve $x^2 + z^2 = a^2$ ist, so liegen diese Punkte H, K, L, I auf dem um den Mittelpunkt gezognen Kreise, dessen Halbmesser $= a$ ist.

§. 395. Lehrsatz. Die Richtung der Curve ist nur da senkrecht auf der Abscissenlinie, wo $z = o$ ist.

Beweis. Da $tang\, \varphi = \infty$ seyn muss, wenn die Curve senkrecht gegen die Abscissenlinie seyn soll, aber der Zähler des Werthes von $tang\, \varphi$ (§. 392.) nicht unendlich werden kann, so tritt jener Werth nur ein, wenn der Nenner $= o$ ist. Der Nenner kann nur in dem einzigen Falle $= o$ werden, wenn $z = o$ ist, weil der andre Factor $x^2 + z^2 + a^2$, gleich Null gesetzt, etwas Unmögliches gäbe.

Für $f > a$ wird also die Curve an zwei Stellen, für $f < a$ wird sie an vier Stellen gegen die Abscissenlinie senkrecht. Wenn $f = a$ ist, so findet eben das für $z = o$ und $x = \sqrt{(a^2 + f^2)}$ statt; was aber geschieht, wenn $z = o$ und $x = o$ ist, muss noch besonders untersucht werden, da alsdann $tang\, \varphi = \frac{o}{o}$ unbestimmt erscheint.

§. 396. **Lehrsatz.** Wenn $f = a$, so hat die Curve da, wo $z = x = o$ ist, einen Knoten, und die Berührungslinien beider sich hier durchschneidenden Theile der Curve sind so gegen die Abscissenlinie geneigt, dass $tang\ \varphi = \pm 1$ ist.

Beweis. Da für $x = z = o$ alle Glieder der ersten Ordnung in der Gleichung zwischen Δz und Δx (§. 392.) verschwinden, und von den Gliedern der zweiten Ordnung (§. 378.) nur $2a^2\{(\Delta z)^2 - (\Delta x)^2\}$ übrig bleiben, so wird die Lage der Berührungslinie in diesem Punkte durch $tang\ \varphi = \pm 1$, oder $\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2 = 1$ ausgedrückt. Die Curve hat hier also zwei unter dem Winkel $\varphi = 45°$ und $\varphi = 135°$ gegen die Abscissenlinie geneigte Tangenten.

§. 397. Bei denjenigen unter unsern Curven, wo f und a ungleich sind, kann es keine doppelten Punkte geben; denn diese kommen nur da vor, wo $\frac{dz}{dx}$, aus dem Gliede der ersten Ordnung hergeleitet, als $= \frac{o}{o}$ erscheint, und das kann hier nur eintreten, wenn $z = o$ ist, da der andre Factor nicht verschwinden kann. Aber wenn f und a ungleich sind, so verschwindet der Zähler nicht, wenn $z = o$ ist.

§. 398. **Aufgabe.** Die Subtangente und Subnormallinie unsrer Curve zu bestimmen.

Auflösung. Die Subtangente ist $= z\ .\ Cotang\ \varphi = z \frac{dx}{dz}$

$$= \frac{z^2 (z^2 + x^2 + a^2)}{x (a^2 - z^2 - x^2)},\ \text{also} = \frac{z^2 \sqrt{(f^4 + 4a^2 x^2)}}{x (2a^2 - \sqrt{(f^4 + 4a^2 x^2)})}.$$

Die Subnormallinie ist

$$= z\ .\ tang\ \varphi = \frac{x (a^2 - z^2 - x^2)}{z^2 + x^2 + a^2} = \frac{x (2a^2 - \sqrt{(f^4 + 4a^2 x^2)})}{\sqrt{(f^4 + 4a^2 x^2)}}.$$

§. 399. Wenn $x = o$ ist, so ist die Subnormallinie $= o$, und eben das ist abermals der Fall, wenn $x = \frac{\sqrt{(4a^4 - f^4)}}{2a}$ ist, oder in dem Punkte, wo die Curve sich am höchsten erhebt, in H, K (Fig. 103 bis 106.). Zwischen diesen muss ein Punkt liegen, in welchem die Subnormallinie am grössesten wird, den man durch die Auflösung einer Gleichung vom vierten Grade finden würde.

Es kann offenbar nur da vorkommen, wo die Curve, wie in Fig. 104. 105., einen Wendungspunkt hat. Diesen Wendungspunkt selbst würde man finden, wenn man bestimmte, welches der grösste Werth von φ ist, den dieser Winkel zwischen D und K erreichen kann.

§. 400. Man könnte fragen, ob die Subtangente jemals $= x$ werden, oder die Berührungslinie durch den Mittelpunkt gehen könnte. Sollte das ge-

schehen, so müsste für diesen besondern Fall werden:

$$x' = \frac{z'^2 \sqrt{(f^4 + 4a^2 x'^2)}}{x'(2a^2 - \sqrt{(f^4 + 4a^2 x'^2)})}, \text{ oder}$$

$$(x'^2 + z'^2) \sqrt{(f^4 + 4a^2 x'^2)} = 2a^2 x'^2, \text{ oder}$$

$$\{-a^2 + \sqrt{(f^4 + 4a^2 x'^2)}\} \sqrt{(f^4 + 4a^2 x'^2)} = 2a^2 x'^2,$$

das ist $-a^2 \sqrt{(f^4 + 4a^2 x'^2)} + f^4 + 4a^2 x'^2 = 2a^2 x'^2$,

oder $a^4 f^4 + 4a^6 x'^2 = f^8 + 4a^2 x'^2 f^4 + 4a^4 x'^4$.

Es wird also $x'^4 + \left(\frac{f^4}{a^2} - a^2\right) x'^2 = -f^4 \left(\frac{f^4 - a^4}{4a^4}\right)$

und $x'^2 = \frac{a^4 - f^4}{2a^2} \pm \sqrt{\left\{\frac{a^4 - f^4}{4}\right\}}$.

Diese Lage der Subtangente kann also nur dann statt finden, wenn $f < a$ ist, also nur in Fig. 105. 106., in Fig. 105. für $x' = o$, in Fig. 106., wenn x den eben angezeigten Werth erhält. Sucht man aus diesem Werthe den Abstand des Punktes, wo dieses geschieht, vom Mittelpunkte C, und nennt diesen r, so ist $r^2 = x^2 + z^2$, also ganz allgemein (§. 388.).

$$r^2 = -a^2 + \sqrt{(f^4 + 4a^2 x^2)},$$

in unserm besondern Falle also

$$r'^2 = -a^2 + \sqrt{\{2a^4 - f^4 + 2a^2 \sqrt{(a^4 - f^4)}\}};$$

oder da die Wurzelgrösse $= a^2 + \sqrt{(a^4 - f^4)}$ ist,

$$r'^2 = \sqrt{(a^2 - f^4)}.$$

Der Punkt, wo die Tangente gegen den Mittelpunkt C zu gerichtet ist, hat also eine solche Lage, dass r'^2 die mittlere Proportionalgrösse zwischen $a^2 + f^2$ und $a^2 - f^2$ ist.

§. 401. Wollte man wissen, ob noch anderswo, als in D, E, die Normallinie durch den Mittelpunkt ginge, so könnte man die Subnormallinie $= x''$ der Abscisse gleich setzen, also $x'' = \frac{x''(2a^2 - \sqrt{(f^4 + 4a^2 x''^2)})}{\sqrt{(f^4 + 4a^2 x''^2}}$; das gäbe entweder $x'' = o$, und führte uns auf die Punkte D, E zurück, oder es gäbe $\sqrt{(f^4 + 4a^2 x''^2)} = 2a^2 - \sqrt{(f^4 + 4a^2 x''^2)}$

$$f^4 - a^4 = -4a^2 x''^2, \text{ also } x'' = \frac{\sqrt{(a^4 - f^4)}}{2a},$$

und der Fall kann allerdings eintreten, wenn $a > f$ ist. Für Curven, wie Fig. 104., findet es dagegen nicht statt.

§. 402. Bemerkung. Die hier betrachteten Curven kommen bei Beantwortung einer astronomischen Frage vor. Denkt man sich einen von der Sonne erleuchteten Körper, der von der Erde aus gesehen wird, so ist sein Glanz, wenn man auf Verschiedenheit der Phasen nicht Rücksicht nimmt, dem Quadrate des Abstandes von der Sonne und dem Quadrate des Abstandes von der Erde um-

gekehrt proportional, oder sein Glanz wird durch $\frac{A}{r^2 \cdot \varrho^2}$ ausgedrückt, wenn r, ϱ jene Abstände sind. Der Glanz bleibt also gleich, wenn das Product $r \cdot \varrho$ gleich bleibt; oder wenn die Sonne sich in F, die Erde in G befände, so würde der Körper einen unveränderten Glanz behalten, wenn er auf unsrer Curve fortginge.

Die Curve ist auch unter dem Namen der Cassinischen Curve bekannt, weil Cassini glaubte, die Planetenbahnen hätten die Form unsrer Curve (Fig. 103.).

§. 403. Die Lemniscata ist noch wegen einer andern Eigenschaft berühmt. Es lässt sich nämlich, wenn irgend ein Bogen CM bestimmt ist, der Punkt N so angeben, dass Bogen BN = Bogen CM ist u. s. w.

2. Die Curve, deren Gleichung ist:

$$z^3 + x^2 z - axz + bx^2 = o.\ ^{*)}$$

§. 404. Aufgabe. Es ist eine gerade Linie AB (Fig. 107.) und in ihr der Punkt A gegeben. Zieht man nun durch einen gegebnen Punkt D ausser ihr eine willkürliche Linie DE, welche AB in E schneidet, errichtet in E, FE auf DE senkrecht und zieht auf FE die Senkrechte AG an A aus, so soll der geometrische Ort des Punktes G, wo diese Senkrechte die EF trifft, bestimmt werden.

Auflösung. Da A und D gegebne Punkte sind, so sey DB senkrecht auf AB, und $AB = a$, $BD = b$, für den zu bestimmenden Punkt aber $AX = x$, $XG = z$, so ist zuerst offenbar $z^2 = x \cdot XE$, weil AGE ein rechter Winkel ist; ferner $EB = \frac{b\,x}{z}$, und $a = x + XE + EB$, also $a = x + \frac{z^2}{x} + \frac{b\,x}{z}$, das ist $z^3 + x^2 z + b\,x^2 - axz = o$.

Der geometrische Ort des so bestimmten Punktes G ist also eine Linie der dritten Ordnung, die durch A geht, indem sogleich erhellt, dass für $x = o$, auch $z = o$ wird.

§. 405. Lehrsatz. Die Curve hat eine geradlinige Asymptote, die mit der Abscissenlinie parallel und von ihr um den Abstand $= b$ entfernt ist.

Beweis. Das höchste Glied der Gleichung ist $z(z^2 + x^2)$; es hat also den einen möglichen Factor z, und $z = \lambda$ ist (§. 333.) die Gleichung für die Asymptote. Um aber λ zu bestimmen, giebt die vollständige Gleichung:

$z(z^2 + x^2) = (az - bx)\,x$, wenn man für sehr grosse x, $z = \lambda$ setzt und die Glieder weglässt, welche gegen den sehr grossen Werth von x unbedeutend sind,

$$\lambda x^2 = -\,bx^2, \text{ also } \lambda = -\,b;$$

*) Uhthorns Ophiuride.

die Asymptote liegt also in der Tiefe $= b$, unterhalb der Abscissenlinie, und HI stellt diese Asymptote dar.

Etwas hiermit ganz Uebereinstimmendes giebt §. 335., wenn man das dortige $a = o$ setzt.

§. 406. Hätte ich den allgemeinen Werth von x aus der Gleichung $x^2(b+z) - axz = -z^3$ entwickelt, so würde auch dieser
$x = \frac{az}{2(b+z)} \pm \frac{\sqrt{(\frac{1}{4}a^2z^2 - z^3(b+z))}}{b+z}$ zeigen, dass x unendlich wächst, wenn z sich dem Werthe $z = -b$ nähert. Hieraus erhellt also, dass die unendlichen Aeste sich an die in der Entfernung $= b$ liegende Asymptote anschmiegen; um aber zu sehen, an welcher Seite derselben sie sich befinden, wollen wir die Ordinaten $u = b + z$ von der Asymptote HI an rechnen, also
$x^2 . u - ax(u-b) + (u-b)^3 = o$ setzen. Ist nun hier u sehr klein gegen b, so kann man sich begnügen, die erste Potenz von u beizubehalten und setzen $x^2u - axu + axb - b^3 + 3b^2u = o$,
also $u = \frac{(ax - b^2)b}{-x^2 + ax - 3b^2}$, oder weil hier nur die Betrachtung auf diejenigen Werthe von u gerichtet ist, die es erhält für sehr grosse x, wo man alle Grössen von geringerm Grade gegen die höhern weglassen darf, $u = -\frac{ab}{(x-a)}$.
Ist also x positiv, so liegt der Ast der Curve an der negativen Seite der HI, hingegen für negative x befindet sich der Ast an der andern Seite.

§. 407. Lehrsatz. Die Aeste der Curve haben zugleich eine gewöhnliche gleichseitige Hyperbel, deren Mittelpunkt da liegt, wo DB die geradlinige Asymptote schneidet, zu ihrer Asymptote, oder schliessen sich an sie an.

Beweis. Die eben gefundene Gleichung $u = -\frac{ab}{x-a}$, welche die sehr entfernt auf dem Aste der Curve liegenden Punkte angab, gehört einer Hyperbel an, deren eine Asymptote HI, die andre KD ist, deren Mittelpunkt also in K liegt. Wenn man den etwas vollständigern Werth von u,
$u = -\left(\frac{bax - b^3}{x^2 - ax + 3b^2}\right)$ entwickelt, so werden durch Division seine ersten Glieder nahe genug $u = -\frac{ab}{x-a} + \frac{b^3}{x(x-a)}$, das heisst, die sehr entfernten Theile der Curve liegen immer etwas höher als die Aeste der Hyperbel, so dass an der positiven Seite die Curve sich eher als die Hyperbel der geradlinigen Asymptote anschmiegt, statt dass es an der negativen Seite umgekehrt der Fall ist.

§. 408. Beispiel. Es sey z. B. $a = 4b$, so ist in der Hyperbel $u = -\frac{4b^2}{x-4b}$, in der Curve $x = \frac{2bz}{b+z} \pm \frac{\sqrt{(4b^2z^2 - z^3(b+z))}}{b+z}$.

Nehme ich also in der Hyperbel $x = 10000.b$, so ist genau $u = -\frac{4b}{9996} = -0{,}00040016.b$. Suchen wir nun, welchen Werth x haben muss, damit in der Curve der Abstand u diesen Werth erreiche, oder $z = -b + u = -1{,}00040016.b$ werde, so ergiebt sich $x = 5000.b \pm 4999{,}2.b$. Derselben Ordinate entspricht also eine etwas kleinere positive Abscisse bei der Curve als bei der Hyperbel, oder die Curve hat sich schon früher als die Hyperbel bis zu dieser Nähe an die Asymptote angeschmiegt. An der negativen Seite findet das Gegentheil statt.

§. 409. Lehrsatz. Die grösste Entfernung von der Abscissenlinie, welche die Curve an der positiven Seite erreicht, ist $= \frac{1}{2}AD - \frac{1}{2}DB = \frac{1}{2}(-b + \sqrt{(a^2+b^2)})$, die grösste Entfernung, welche sie an der negativen Seite erreicht $= \frac{1}{2}(b + \sqrt{(a^2+b^2)}) = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}DB$, und AD ist hier der Abstand der beiden gegebnen Punkte von einander, BD des Punktes D Abstand von der Abscissenlinie.

Beweis. Da $x = \frac{az}{2(b+z)} \pm \frac{\sqrt{(\frac{1}{4}a^2z^2 - z^3(b+z))}}{b+z}$ ist, so wird x unmöglich, wenn man $z(b+z) > \frac{1}{4}a^2$ annehmen wollte. Man findet daher den äussersten Werth von z, wobei x noch möglich bleibt, wenn man

$$z^2 + bz = \tfrac{1}{4}a^2,$$

oder $$z' = -\tfrac{1}{2}b \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}$$

setzt. In dieser Höhe oder Tiefe wird eine mit AB parallel gezogne Linie zur Tangente, und der Berührungspunkt liegt da, wo $x = \frac{az'}{2(b+z')}$ ist, auch im Nenner muss $\pm\sqrt{(a^2+b^2)}$ stehen, das ist, wo $x = \frac{1}{2}a\left(\frac{-b \pm \sqrt{(a^2+b^2)}}{b \pm (\sqrt{(a^2+b^2)}}\right)$ ist. Der Punkt also, wo z seinen grössten positiven Werth hat, entspricht der Abscisse $x' = \frac{1}{2}a\left(\frac{\sqrt{(a^2+b^2)} - b}{\sqrt{(a^2+b^2)} + b}\right) = \frac{1}{2}a\left(\frac{AD - DB}{AD + DB}\right)$, der Punkt, wo z seinen grössten negativen Werth erreicht, gehört der Abscisse

$$x'' = \tfrac{1}{2}a\left(\frac{\sqrt{(a^2+b^2)} + b}{\sqrt{(a^2+b^2)} - b}\right) = \tfrac{1}{2}a\left(\frac{AD + DB}{AD - DB}\right).$$

§. 410. Die Punkte M und L sind diese höchsten und tiefsten Punkte. Für sie ist also x die vierte Proportionallinie zu $(AD + DB)$, $(AD - DB)$ und $\frac{1}{2}a$, wenn man M, oder die vierte Proportionallinie zu $(AD - DB)$, $(AD + DB)$ und $\frac{1}{2}a$, wenn man L sucht.

§. 411. Wenn man nach der in § 404. angegebnen Construction den höchsten Punkt M oder tiefsten L der Curve bestimmt, so dass DNL, NLA

rechte Winkel sind, und eben so DPM, PMA rechte Winkel, so ist der Abstand $ON = PQ = \frac{1}{2}a$; denn es ist

$$ON = \frac{OL^2}{OA} = \frac{(-\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)})^2 (\sqrt{(a^2+b^2)} - b)}{\frac{1}{2}a(\sqrt{(a^2+b^2)} + b)} = \frac{1}{2}a, \text{ und eben so}$$

$$PQ = \frac{QN^2}{AQ}, \text{ oder } PQ = \frac{(-\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)})(b + \sqrt{(a^2+b^2)})}{a} = \frac{1}{2}a.$$

§. 412. **Lehrsatz.** Wenn man vom Anfangspunkte A der Abscissen die Linien AM, AL nach dem höchsten und tiefsten Punkte zieht, so ist MAL ein rechter Winkel.

Beweis. Da $tang\, MAB = \frac{z'}{x'}$ und $tang\, LAB = \frac{z''}{x''}$ ist, und

$$\frac{z'}{x'} = \frac{(\sqrt{(a^2+b^2)} + b)}{a}, \text{ dagegen } \frac{z''}{x''} = \frac{\sqrt{(a^2+b^2)} - b}{a} = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)} + b}$$

wird, so ist $tang\, MAB = Cotang\, LAB$.

§. 413. **Bemerkung.** Die Gleichung $x^2(b+z) - axz + z^3 = o$, war in Beziehung auf x vom zweiten Grade, und alle mit AB parallele Linien schneiden also nur zweimal in die Curve ein, oder gar nicht, wenn sie über die Grenzen der möglichen z hinaus liegen. Dagegen ist eben die Gleichung vom dritten Grade in Beziehung auf z, und die mit BD parallelen Linien schneiden also entweder dreimal ein, wenn die Gleichung drei mögliche Wurzeln hat, oder nur einmal, wenn sie nur eine mögliche Wurzel hat.

Da, wo es drei mögliche Wurzeln giebt, muss die Summe aller Wurzeln $= o$ seyn, weil das Glied fehlt, worin die zweite Potenz von z vorkommen sollte, dessen Coefficient bekanntlich die Summe aller Wurzeln der Gleichung darstellt. Es muss daher $QM + QR = QS$ seyn. Wenn es eine Stelle wie bei T giebt, wo die Ordinate z zur Tangente wird, so müssen da zwei Wurzeln gleich seyn, und die Betrachtung der Gleichung $z^3 + (x^2 - ax)z + bx^2 = o$ würde nun *), wenn die gleichen Wurzeln z', z', die dritte aber z'' hiesse, ergeben: $2z' + z'' = o$, $z'^2 + 2z'z'' = (x'^2 - ax')$; endlich $z'^2 . z'' = - bx'^2$, und daraus liesse sich x', das ist derjenige Ort bestimmen, wo es zwei solche gleiche Wurzeln giebt. Wir werden diese Untersuchung aber noch auf einem andern Wege beendigen.

§. 414. **Aufgabe.** Die Stelle der Curve zu finden, wo die Tangente der Curve senkrecht gegen die Abscissenlinie ist.

Auflösung. Um die Lage der Tangente allgemein zu bestimmen, setze ich $x + \Delta x$ und $z + \Delta z$ in die Gleichung, wodurch sie dann wird:

*) Diess gründet sich auf den bekannten Satz, dass der Coefficient des zweiten Gliedes gleich der Summe aller Wurzeln; der Coefficient des dritten Gliedes gleich der Summe aller Producte aus zwei Wurzeln u. s. w. ist.

$$\left.\begin{array}{l} z^3 + 3z^2\Delta z + 3z(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3 \\ + x^2 z + 2xz\Delta x + z(\Delta x)^2 \\ \qquad + x^2\Delta z + 2x\Delta z.\Delta x + (\Delta x)^2.\Delta z \\ - axz - ax\Delta z \\ \qquad - az\Delta x - a\Delta x.\Delta z \\ + bx^2 + 2bx\Delta x + b(\Delta x)^2 \end{array}\right\} = o.$$

Für die Berührungslinie wird das Glied der ersten Ordnung für sich $= o$ und giebt $tang\,\varphi = \frac{dz}{dx} = \frac{2xz - az + 2bx}{ax - x^2 - 3z^2}$, wenn φ den Winkel bezeichnet, den die Berührungslinie mit der Abscissenlinie macht. Soll also dieser $= 90°$ werden, so muss der Nenner jenes Ausdrucks verschwinden, welches erstlich geschehen kann, wenn x und z beide $= o$ sind, dann aber auch, wenn $3z^3 = ax - x^2$ ist. Das erstere würde zu dem unbestimmten $\frac{o}{o}$ führen. Wir wollen hier nur den zweiten Ausdruck betrachten. Da die Hauptgleichung allemal statt findet in dem gesuchten Punkte, aber auch die eben erwähnte Gleichung, welche $3z^2 = x(a - x)$ giebt, so wird, wenn man diesen Werth in die Hauptgleichung setzt, $-\frac{2}{3}(ax - x^2)\sqrt{(\frac{1}{3}ax - \frac{1}{3}x^2)} = -bx^2$,
oder $\frac{4}{27}(ax - x^2)^3 = b^2x^4$, als eine Gleichung zu Bestimmung desjenigen Werthes von x, wobei die senkrechte Ordinate berührt. Die Gleichung giebt entwickelt $4a^3x^3 - 12a^2x^4 + 12ax^5 - 4x^6 = 27b^2x^4$,
oder $4x^3 - 12ax^2 + (12a^2 + 27b^2)x - 4a^3 = o$.
Eine Gleichung, die sich nach gehöriger Vorbereitung immer nach der Cardanschen Regel auflösen lässt.

§. 415. **Beispiel.** Es sey $b^2 = \frac{10}{27}a^2$, dann wird unsre Gleichung:
$4x^3 - 12ax^2 + 22a^2x - 4a^3 = o$.
Die einzige mögliche Wurzel dieser Gleichung ist $x = 0{,}203 \,.\, a$ als Werth der Abscisse, wo die senkrechte Ordinate berührt.

§. 416. So lange x kleiner ist, als es der aus der Gleichung $4x^3 - 12ax^2 + (12a^2 + 27b^2)x - 4a^3 = o$ folgende Werth fordert, hat die Hauptgleichung drei mögliche Werthe für z; wenn dagegen x grösser ist, hat z nur einen möglichen Werth.

Die merkwürdige Bestimmung in §. 414., dass an dieser Stelle $\frac{4}{27}(a - x)^3 = b^2x$, oder $\left(\frac{a-x}{3}\right)^3 = \frac{1}{4}b^2x$, oder $\left(\frac{a-x}{3x}\right)^3 = \left(\frac{b}{2x}\right)^2$, oder $\frac{1}{3}(a - x) : x = (\frac{1}{2}b)^2 : \left(\frac{a-x}{3}\right)^2$, und zugleich $z^2 = \frac{1}{3}(a - x)x$ seyn soll, giebt $\left(\frac{z^2}{x}\right)^3 = \frac{1}{4}b^2x$, oder $z^3 = \frac{1}{2}bx^2$, oder $z : \frac{1}{2}b = x^2 : z^2$.

Diese Betrachtungen zeigen, wenn (Fig. 108.) T der Punkt ist, wo die Tangente TU senkrecht wird, dass dann, wenn ATV ein rechter Winkel ist, $UV = \frac{1}{3}(a - x) = \frac{1}{3}\,UB$ seyn wird, weil $z^2 = \frac{1}{3}(a - x)\,x$, in diesem Falle war, zugleich aber, wenn man $BD = b$ halbirt und WZ mit VD parallel zieht, ist offenbar

$$AU : UT = UT : UV = WB : BZ,$$

oder weil $UV = WB = \frac{1}{3}(a - x)$,

$$AU : UT = UT : UV = UV : BZ,$$

das ist $x : z = z : \frac{1}{3}(a - x) = \frac{1}{3}(a - x) : \frac{1}{2}b$.

So sind also UT, UV zwei mittlere Proportionallinien zwischen AU und BZ, oder z und $\frac{1}{3}(a - x)$ sind zwei mittlere Proportionallinien zwischen x und $\frac{1}{2}b$, wenn x die Abscisse jenes Punktes ist.

§. 417. Wir hätten aus der allgemeinen Gleichung zur Bestimmung des Winkels φ, oder aus dem Werthe von $\frac{dz}{dx}$ auch die Stellen, wo die Berührungslinie mit den Abscissen parallel ist, finden können; da aber dies schon §. 409. geschehen ist, so übergehe ich es. Wollte man die Punkte finden, wo die Tangente andre Lagen hat, so setzt man $\frac{dz}{dx}$ gleich dem hiernach bestimmten Werthe von $tang\ \varphi$. Soll die Neigung der Berührungslinie gegen die Abscissenlinie $= 45° = \varphi$ seyn, so ist $tang\ \varphi = 1$, also $1 = \frac{2xz - az + 2bx}{ax - x^2 - 3z^2}$,

$$\text{oder } -x^2 - 2(z + b - \tfrac{1}{2}a)\,x = 3z^2 - az.$$

Der hieraus gefundene Werth von x wird dem in §. 409. gefundenen gleich gesetzt und daraus der bestimmte Werth, den z an dieser Stelle erhält, hergeleitet. Und so könnte man den ganzen Gang der Curve rechnend verfolgen.

§. 418. Lehrsatz. Die Curve hat da, wo x und z beide $= o$ sind, einen Knoten. Es durchschneiden sich dort zwei Theile der Curve, deren einer gegen die Abscissenlinie senkrecht, der andre unter einem Winkel geneigt ist, für den $tang\ \varphi = \frac{b}{a}$ ist.

Beweis. Wenn man in §. 414., wo $x + \Delta x$ für x und $z + \Delta z$ für z gesetzt wurde, x und $z = o$ setzt, so wird jene Gleichung

$$-a\,\Delta z\,.\,\Delta x + b\,(\Delta x)^2 + (\Delta z)^3 + (\Delta x)^2\,\Delta z = o$$

die Gleichung, welche die Lage der Sehne bestimmt.

Sucht man aber die Grenze, welche $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ desto näher erreicht, je näher die Sehne der Tangente kömmt, so wird für diese $-a\,\Delta z\,.\,\Delta x + b\,(\Delta x)^2 = o$,

also wenn ich den so gefundenen Werth von $\frac{\Delta x}{\Delta z}$ durch $\frac{dx}{dz}$ darstelle,

$$\frac{dx}{dz} = \tfrac{1}{2}\frac{a}{b} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\frac{a^2}{b^2}},$$

also $\frac{dx}{dz} = Cotang\ \varphi$ entweder $= \frac{a}{b}$, oder $= o$, das ist, es schneiden sich hier einander zwei Theile der Curve, deren einer unter dem Winkel $\varphi = 90°$ gegen die Abscissenlinie geneigt ist, der andre einen Winkel, dessen Tangente $= \frac{a}{b}$ ist, mit der Abscissenlinie macht.

Die Tangente des letztern ist also die durch A und D gezogne Linie.

§. 419. Bemerkung. Durch diese Betrachtungen sind wir zu einer vollständigen Kenntniss der ganzen Curve gelangt, indem wir die Lage der unendlichen Aeste kennen; indem wir wissen, dass nur bis zu UT hin (Fig. 108.) die Ordinate drei Werthe erhalten kann, also zwischen A und UT ein geschlossener Theil der Curve liegen muss; indem wir die höchste und tiefste Stelle der Curve, ja ihre Richtung in jedem gegebnen Punkte angeben können.

Man könnte noch den Wendungspunkt suchen, der in Fig. 107. nicht weit von V entfernt liegen würde; aber seine Lage wird durch keine merkwürdigen Bestimmungen angegeben.

3. Die Cissoide, deren Gleichung $z^3 + z\,x^2 + b\,x^2 = o$ ist.

§. 420. Bemerkung. Wenn man in der eben betrachteten Curve $a = o$ oder (Fig. 107.) den Punkt D in der durch A auf AB senkrecht gesetzten Linie annimmt, so ist die Gleichung $z(z^2 + x^2) + bx^2 = o$. Die in dieser Gleichung enthaltene Curve ist schon von den Alten unter dem Namen Cissoide betrachtet worden.

§. 421. Aufgabe. Die Abscisse x für irgend ein gegebnes z zu bestimmen.

Auflösung. Die Gleichung giebt $x^2 = \frac{-z^3}{b+z}$ und x wird unmöglich für alle positive Werthe von z, wird aber z negativ $= -y$, so ist $x^2 = \frac{y^3}{b-y}$, und $x = \pm y\sqrt{\frac{y}{b-y}}$.

Die Linie ist also durch AH (Fig. 109.) in zwei symmetrische Hälften getheilt.

§. 422. Lehrsatz. Die Curve hat eine geradlinige, mit der Abscissenlinie in der Entfernung $= b$ parallele Asymptote.

Beweis. Aus §. 421. folgt, dass y nie grösser als b werden kann, und dass es diesen Werth erst erreicht, wenn x unendlich wird.

Auch die Betrachtung des höchsten Gliedes würde (nach §. 333.) zeigen, dass $\lambda(z^2 + x^2) + bx^2 = o$ für $x = \infty$ seyn müsse, oder da z nicht unendlich werden kann, für den unendlichen Ast $\lambda x^2 + bx^2 = o$, $\lambda = - b$ sey (vergl. §. 334.).

§. 423. Lehrsatz. Die Aeste schliessen sich einer Hyperbel der dritten Ordnung an, für welche $x^2 w = b^3$ die Gleichung zwischen rechtwinklichen Coordinaten ist.

Beweis. Es sey $y = b - w$, so giebt w allemal an, wie weit entfernt von der Asymptote jeder Punkt der Curve ist, und wir erhalten allgemein $x^2 = \frac{b^3 - 3b^2 w + 3bw^2 - w^3}{w}$; aber wenn w sehr klein, also x sehr gross wird, so ist $x^2 = \frac{b^3}{w}$, oder $x^2 . w = b^3$ ein sehr nahe richtiger Ausdruck für die entfernteren Theile der Curve. Diese Gleichung $x^2 w = b^3$ gehört einer Hyperbel der dritten Ordnung an, die also in entferntern Punkten der Aeste sehr nahe mit unsrer Curve übereinstimmt. Da indess, wenn wir das nächste Glied noch mit berücksichtigen, der Werth von x durch $x^2 = \frac{b^3}{w} - 3b^2$ angegeben wird, so erhellt, dass ein bestimmter Abstand $= w$ von der Asymptote früher bei der Cissoide als bei der Hyperbel erreicht wird; denn bei der Hyperbel muss $x = \pm \sqrt{\frac{b^3}{w}}$ seyn, wenn die Entfernung nur noch $= w$ seyn soll, bei der Cissoide ist x etwas kleiner. Diese liegt also zwischen der geraden Asymptote und der hyperbolischen Asymptote.

§. 424. Aufgabe. Die allgemeine Formel zur Bestimmung der Berührungslinie der Cissoide zu finden.

Auflösung. Setzt man in die Hauptgleichung $y^3 + yx^2 - bx^2 = o$ überall $x + \Delta x$ statt x und $y + \Delta y$ statt y, so wird

$$o = \begin{cases} y^3 + 3y^2 \Delta y + 3y(\Delta y)^2 + (\Delta y)^3 \\ + x^2 y + 2xy\Delta x + y(\Delta x)^2 \\ \qquad + x^2 \Delta y + 2x\Delta y . \Delta x + \Delta y . (\Delta x)^2 \\ - bx^2 - 2bx\Delta x - b(\Delta x)^2 . \end{cases}$$

Die Lage der Sehne würde hier durch $\frac{\Delta y}{\Delta x} = tang\, \varphi$ bestimmt, wenn φ der Winkel ist, den die Sehne mit der Abscissenlinie macht; aber für die Tangente geht diese Bestimmung bloss aus der Betrachtung des ersten Gliedes

hervor und giebt $tang\,\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{2x(b-y)}{3y^2+x^2} = \frac{2y \cdot \sqrt{(by-y^2)}\,(b-y)}{(3b-2y)\,y^2}$

$$= \frac{2(b-y)\sqrt{\left(\frac{b}{y}-1\right)}}{3b-2y}.$$

§. 425. Soll hier $tang\,\varphi = o$, die Berührungslinie mit der Abscissenlinie parallel werden, so muss $y = b$ seyn, welches erst bei einem unendlichen x statt fände. Aber senkrecht auf die Axe kann sie nur für $y = o$ werden, wo $tang\,\varphi = \pm \frac{2}{3}\sqrt{\frac{b}{y}}$ unendlich wird und einen doppelten Werth erhält, weil hier ein doppelter Punkt ist. Der Nenner $3b - 2y$ kann nicht verschwinden, da niemals $y = \frac{3}{2}\,b$ seyn kann.

Dass wirklich an der Stelle, wo y und zugleich x verschwindet, die Cissoide einen doppelten Punkt hat, erhellt aus der eben angegebnen Gleichung, indem für sehr kleine Werthe von y der Ausdruck für $tang\,\varphi$ wegen seines doppelten Zeichens so wohl einem wenig vom rechten verschiedenen spitzen Winkel, als einem, den rechten wenig übertreffenden stumpfen Winkel zugehört. Die beiden Aeste der Curve laufen also hier in eine Spitze zusammen und haben eine gemeinschaftliche Tangente, die auf AX senkrecht ist.

Eben das hätte man gefunden, wenn man in der ersten Gleichung §. 424. x und $y = o$ gesetzt hätte. Dann wäre

$$-b(\Delta x)^2 + (\Delta y)^3 + \Delta y \cdot (\Delta x)^2 = o,$$

oder $(\Delta x)^2 = \frac{(\Delta y)^3}{b - \Delta y} = \frac{(\Delta y)^3}{b} + \frac{(\Delta y)^4}{b^2} + \text{etc.},$

also $\Delta x = \pm \Delta y \cdot \sqrt{\left\{\frac{\Delta y}{b} + \left(\frac{\Delta y}{b}\right)^2\right\}},$

und $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ nähert sich dem Werthe $= o$ immer mehr, je kleiner man die Sehne nimmt; der doppelte Werth der sich immer verkleinernden $tang\,\varphi$ zeigt aber, dass hier zwei Aeste einander berühren, deren einer auf der einen, der andre auf der andern Seite von AH liegt.

§. 426. Bemerkung. Wenn man von irgend einem Punkte Z der Cissoide eine gerade Linie nach dem Anfangspunkte A der Coordinaten zieht, und diese $AZ = r$ nennt, so ist $r^2 = x^2 + y^2 = \frac{by^2}{b-y}$. Verlängert man eben diesen Radius, bis er in die Asymptote einschneidet, so ist

$$AK = \varrho = \frac{r \cdot b}{y} = \frac{b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(b-y)}} \text{ und } HK = \frac{xb}{y} = b\sqrt{\frac{y}{b-y}}, \text{ mithin}$$

$HK^2 = r \cdot \varrho$. Diese Betrachtung führt zu einem merkwürdigen Theoreme.

§. 427. Lehrsatz. Wenn man in dem Anfangspunkte A die Senkrechte AH errichtet, $AI = \frac{1}{2} b = \frac{1}{2} AH$ nimmt, und um I mit dem Halbmesser $= \frac{1}{2} b$ einen Kreis beschreibt, so wird jeder Radius AZ der Cissoide von diesem Kreise so in L geschnitten, dass $AZ = KL$ ist.

Beweis. Bekanntlich ist $KH^2 = KA \,.\, KL$, da KH eine Tangente ist; aber wir haben eben gesehen, dass auch $KH^2 = r \,.\, \varrho = AK \,.\, AZ$ sey, also $KL = AZ$ für jeden Punkt der Cissoide.

§. 428. Um also die Cissoide zu zeichnen, kann man zuerst den Kreis zeichnen, dessen Durchmesser $= b$ ist, an ihn die Tangenten AD, HG parallel unter sich ziehen, dann so viele Linien AK, Ak, als man will, ziehen, und allemal $AZ = KL$, $Az = kl$ nehmen, so sind Z, z Punkte in der Cissoide.

§. 429. Lehrsatz. Wenn man durch irgend einen Punkt Z der Cissoide auf AH die Senkrechte ZM zieht, so erhält man zwischen ZM und MH zwei mittlere Proportionallinien, nämlich $ZM : AM = AM : MN = MN : MH$, wenn N der Punkt ist, in welchem ZM den Kreis trifft.

Beweis. Es ist $MZ = x$, $AM = y$, bekanntlich auch $MN^2 = AM \,.\, MH$, oder $MN^2 = y \,.\, (b - y)$. Da nun $x = y \,.\, \sqrt{\frac{y}{b - y}}$ war (§. 421.), so erhellt sogleich, dass

$$y \,.\, \sqrt{\frac{y}{b-y}} : y = y : \sqrt{(y\,(b-y))} = \sqrt{(y \,.\, (b-y))} : b - y,$$

$$\text{oder} \quad x : y = y : \quad MN \quad = \quad MN : MH.$$

§. 430. Wenn man also zwischen zwei gegebnen Linien f und g zwei mittlere geometrische Proportionallinien finden sollte, so könnte das dadurch geschehen, dass man $OH = f$, $OP = g$ senkrecht gegen einander auftrüge, HP zöge und den Punkt Z der Cissoide bestimmte, wo sie schneidet. Da man dann AM, MN als mittlere Proportionallinie zwischen MZ, MH kennen lernt, so würde man nach verkleinertem Massstabe auch leicht die zu f und g gesuchten finden.

§. 431. Lehrsatz. Wenn man den auf AH senkrechten Durchmesser IQ jenes Kreises zieht, und bis zu ihm oder seiner Verlängerung die durch irgend einen Punkt Z der Cissoide gehenden geraden Linien AZ, HZ fortsetzt, die ihn in Q, R treffen; wenn man endlich S so annimmt, dass IS die mittlere Proportionale zwischen IQ und IR ist, so hat man

$$IQ : IS = IS : IR = IR : \frac{b}{2}.$$

Beweis. Nach der Construction ist $MZ = x$,

$$IQ = \frac{x \,.\, \frac{1}{2} b}{b - y}; \quad IR = \frac{x \,.\, \frac{1}{2} b}{y},$$

also soll $IS = \frac{\frac{1}{2} b x}{\sqrt{(y b - y^2)}}$ seyn, und dann ist wirklich $\frac{1}{2} b . IS = IR^2$, weil

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{x}{\sqrt{(b y - y^2)}}, \text{ oder } x = y \sqrt{\frac{y}{b - y}} \text{ ist.}$$

§. 432. Sollen also zwischen zwei Linien f und g zwei mittlere Proportionallinien gefunden werden, so nimmt man die eine $= g$ zum Halbmesser des Kreises ALH, zieht die Durchmesser IQ, IA auf einander senkrecht, und zeichnet die zugehörige Cissoide. Nimmt man nun $IQ = f$ und bestimmt, indem man QH zieht, einen Punkt Z der Cissoide, so schneidet ZA die erste mittlere Proportionale IR ab, und es ist nun leicht, den Punkt S zu finden, so dass $IR : IS = IS : IQ$ sey.

Bei dem Problem von der Verdoppelung des Cubus müsste man, wenn IA die Seite des gegebnen Cubus war, $Iq'' = 2\, IA$ nehmen, dann bestimmt auf der richtig gezeichneten Cissoide die $q''H$ den Punkt z'', und $z''A$ schneidet in r'' so ein, dass Ir'' die Seite des verlangten Cubus ist. Es ist nämlich

$$IA : Ir'' = Ir'' : \frac{Ir''^2}{IA} = \frac{Ir''^2}{IA} : 2\, IA, \text{ also } 2\, IA = \frac{Ir^3}{IA^2}, \text{ das ist}$$

$$2 \,.\, IA^3 = Ir^3.$$

§. 433. Lehrsatz. Wenn man (Fig. 110.) durch den Mittelpunkt I des Kreises eine Linie IT mit der Asymptote HG parallel zieht; dann um einen willkürlichen Punkt Z der Cissoide mit dem Halbmesser $ZT = AI$ einen Kreis beschreibt und von dem Einschnitte T in IT den Durchmesser TU zieht, so trifft die auf UT in U senkrecht gesetzte Linie UE allemal in dem verlängerten Durchmesser HA in einerlei Punkte E ein, und es ist $AE = AI$.

Beweis. Es sey $IV = x$, $VZ = y - \frac{1}{2} b$, $ZT = \frac{1}{2} b$, so ist, wenn auch UW auf IT senkrecht ist, $UW = 2\left(y - \frac{b}{2}\right)$, $VT = \sqrt{(b y - y^2)}$,

$WT = 2\sqrt{(b y - y^2)}$, und $UX = \frac{b \,.\, WU}{WT} = \frac{b\,(2y - b)}{2\sqrt{y}\sqrt{(b - y)}}$. Da nun ferner $WX = \frac{WU^2}{WT} = \frac{2\,(y - \frac{1}{2} b)^2}{\sqrt{y} \,.\, \sqrt{(b - y)}}$, also $IX = x - WV - WX$, oder

$$IX = x - \sqrt{(b y - y^2)} - \frac{2\,(y - \frac{1}{2} b)^2}{\sqrt{(b y - y^2)}} = x - \left(\frac{y^2 - b y + \frac{1}{2} b^2}{\sqrt{(b y - y^2)}}\right)$$

$$= \frac{b y - \frac{1}{2} b^2}{\sqrt{(b y - y^2)}} = UX.$$

So also ist bewiesen, dass allemal $UX = IX$, also auch $IE = UT = b$ sey, da die Winkel in den Dreiecken IXE, UXT übereinstimmend sind. Also ist AE allemal $= \frac{1}{2} b$.

§. 434. Dieses Theorem leitet zu einer Methode, um die Cissoide durch eine stetige Bewegung zu beschreiben. Ist nämlich EUT ein Winkelmass, dessen einer Schenkel $UT = b$ ist, der andre aber von unbegrenzter Länge, so nehme man $EI = b$, ziehe IT darauf senkrecht, und lasse nun den unbegrenzten Schenkel sich an den Punkt E anstützen, während man den Punkt T auf der geraden Linie IT fortführt; so beschreibt der Punkt Z, der in der Mitte des Schenkels UT liegt, die Cissoide.

Man könnte auch die Kreisscheibe TU, an welcher die berührende UE befestigt ist, so fortschieben, dass der dem Berührungspunkte U gegenüber liegende Punkt T immer auf IT fortrücke, die berührende UE aber sich an den Punkt E anlehne; so beschreibt der Mittelpunkt die Cissoide.

§. 435. Schon Diocles entdeckte einige Eigenschaften der Cissoide; und da er bloss den Theil $Az\,AZ$ betrachtete (Fig. 109.), so entlehnte er ihren Namen von der Aehnlichkeit mit dem Epheublatte.

4. Die Curve, deren Gleichung $z^4 - x^4 - 4axz^2 = o$ ist *).

§. 436. Bemerkung. Wir haben diese Linie schon oben §. 339. betrachtet, und den allgemeinen Werth der Ordinate

$$z^2 = 2ax \pm x\sqrt{(4a^2 + x^2)},$$ hergeleitet.

Dort ergab sich auch, dass die Curve zwei geradlinige Asymptoten hat, für welche die beiden Gleichungen $z = x + a$

und $z = -x - a$

waren. Nimmt man also in A den Anfangspunkt der Abscissen Fig. 111. und trägt auf AB die positiven Abscissen $= x$ auf, so liegt beider Asymptoten Durchschnittspunkt in C, wenn $AC = a$ ist; denn für beide wird $x = -a$, wenn $z = o$ ist. Trägt man $AE = +a$, $AD = -a$ senkrecht auf AC auf, als die Werthe, welche z erhält für $x = o$, so sind CD, CE die geraden Linien, an welche die Aeste der Curve sich anschmiegen. Nimmt man zugleich auch $AF = a$, so dient der Punkt A, um auf eine leichte Weise so viele Punkte der Curve, als man will, anzugeben.

§. 437. Lehrsatz. Zieht man von F eine willkürliche gerade Linie FG, welche AD, oder ihre Verlängerung in G schneidet, errichtet dann HI in G auf FG senkrecht, und nimmt $GH = GI = AG$, so sind H, I Punkte in unsrer Curve.

Beweis. Zieht man von H, HK auf AB senkrecht, nennet $AK = x$, $KH = z$, so ist, wenn GL mit AB parallel ist, $z = AG + LH = HG + LH$, und $LG = x$, also $x^2 = AG^2 - (z - AG)^2 = 2AG \cdot z - z^2$, zugleich aber,

*) Uhlhorns Scyphoide. (vergl. Uhlhorns Entdeckungen in der höhern Geometrie.)

weil die Dreiecke HGL, FGA ähnlich sind, $x : (z - AG) = AG : a$, oder da $AG = \frac{x^2 + z^2}{2z}$ war, $ax = \left(\frac{x^2 + z^2}{2z}\right)\left(z - \frac{x^2 + z^2}{2z}\right)$,

$$\text{das ist } ax = \frac{(x^2 + z^2)(z^2 - x^2)}{4z^2},$$

$$\text{oder } z^4 - x^4 = 4axz^2.$$

Eben die Gleichung, die wir angenommen hatten.

Für I würde eben so, wenn man I durch die Abscisse $Ak = x$ und Ordinate $Ik = z$ bestimmt, $GI^2 - (IG - z)^2 = x^2$,

$$\text{oder } IG = \frac{x^2 + z^2}{2z} = AG,$$

und $-x : AG - z = AG : a$, $-ax = \frac{(x^2 + z^2)(x^2 - z^2)}{4z^2}$, wie vorhin.

§. 438. Die Curve besteht aus zwei symmetrischen Theilen, die zu beiden Seiten der Axe AB liegen; denn man findet einerlei Werth von x, man mag z positiv oder negativ nehmen. Dagegen sind die diesseits und jenseits EG liegenden Theile der Curve nicht symmetrisch, weil von x die erste Potenz vorkömmt.

§. 439. Obgleich die Gleichung $z^2 = 2ax \pm x\sqrt{(4a^2 + x^2)}$ vier Werthe von z anzugeben scheint, so sind doch darunter nur zwei mögliche; denn allemal ist $x\sqrt{(4a^2 + x^2)}$ grösser als $2ax$, wollte man also $z^2 = 2ax - x\sqrt{(4a^2 + x^2)}$ nehmen, so würde z^2 negativ. Folglich ist

$$z = \pm \sqrt{\{2ax + x\sqrt{(4a^2 + x^2)}\}}$$

der vollständige Ausdruck für z, so lange x positiv ist; für negative x dagegen müsste man das andre Zeichen gebrauchen, und

$$z = \pm \sqrt{\{2ax - x\sqrt{(4a^2 + x^2)}\}}$$

setzen, da dieser Werth möglich wird, für negative x.

z erhält an beiden Seiten der Abscissenlinie und sowohl für positive als negative x immer grössere Werthe, wenn x wächst. Die Curve schliesst sich daher an die schon bestimmten Asymptoten mit vier Aesten an.

§. 440. Um zu sehen, an welcher Seite der Asymptote jeder Ast der Curve liegt, sey AM der einen Asymptote parallel, und von einem Punkte H der Curve HM auf AM senkrecht gesetzt; es sey $AM = u$, $MH = v$. Da $MAG = 45°$ ist, so wird $z = (u + v)\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, und $x = (u - v)\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, folglich wird aus $z^4 - x^4 - 4axz^2 = o$, jetzt

$$2uv(u^2 + v^2) - \frac{2a}{\sqrt{2}}(u - v)(u + v)^2 = o, \text{ oder}$$

$$u^3\left(v - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) - \frac{au^2v}{\sqrt{2}} + uv^2\left(v + \frac{a}{\sqrt{2}}\right) + \frac{a}{\sqrt{2}}v^3 = o.$$

Diese Gleichung würde allgemein den Werth von v durch u ausgedrückt

angeben. Aber für sehr grosse u wird sehr nahe $v = \frac{a}{\sqrt{2}}$, wie theils die Betrachtung des Gliedes zeigt, welches u^3 enthält, theils auch schon aus dem Vorigen bekannt ist, indem $\frac{1}{2}\, EC = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ist; daher ist für sehr grosse u, wenn man die zwei höchsten Potenzen von u berücksichtigt,

$$u\left(v - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) - \frac{a\,v}{\sqrt{2}} = o, \text{ oder}$$

$$v = \frac{a\,u}{u\,.\sqrt{2} - a},$$

oder wenn ich $v - \frac{a}{\sqrt{2}} = t$ nenne, darunter also den senkrechten Abstand von CD verstehe, $t = \frac{+ a\left(t + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)}{u\sqrt{2}}$, das ist $t = \frac{+ a^2}{2u - a\sqrt{2}}$. Der Ast der Curve liegt also für positive u innerhalb des Winkels DCI, für negative, sehr grosse u ist t negativ, und die Curve liegt innerhalb des Winkels OCE. Für die zweite Asymptote findet eben das statt.

§. 441. Wenn ich zugleich $v = t + \frac{a}{\sqrt{2}}$ und $s = u - \frac{a}{\sqrt{2}}$ setze, so ist die eben gefundene Gleichung $t = \frac{\frac{1}{2}\,a^2}{s}$, die Gleichung für eine gewöhnliche Hyperbel, deren Mittelpunkt C ist. Um zu sehen, wie die Aeste dieser Hyperbel sich an unsre Curve anschliessen, setze ich in der Gleichung

$$u^3\left(v - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) - \frac{a\,u^2\,v}{\sqrt{2}} + u\,v^2\left(v + \frac{a}{\sqrt{2}}\right) + \frac{a}{\sqrt{2}}\,v^3 = o,$$

für u und v diese Werthe, behalte aber nur die Glieder von den zwei höchsten Ordnungen bei, nämlich $s^3\,t - \frac{1}{2}\,a^2\,s^2 + a\,r^2\,t\,.\sqrt{2} = o$,

$$\text{oder } s^2\,(s\,t - \tfrac{1}{2}\,a^2) + \frac{2\,a\,s}{\sqrt{2}} = o.$$

Wenn wir hier den Werth von s bestimmen, bei welchem t eine bestimmte Grösse $= t'$ erhält, so ist dieser in der Hyperbel $s' = \frac{a^2}{2\,t'}$, in unsrer Curve dagegen $s'' = \frac{a^2}{2\,t} - a\sqrt{2}$. Bei unsrer Curve erfolgt also das Annähern an die Asymptote, wenn t positiv ist, schneller als bei der Hyperbel, oder sie läuft zwischen der geradlinigen Asymptote und der Hyperbel hin.

§. 442. Nach diesen Bestimmungen können wir die Aeste der Curve als genau bekannt ansehen. Aber auch die näher liegenden Punkte der Curve sind,

nach §. 437., leicht zu bestimmen. Die Lage ihrer Tangente bietet in den übrigen Punkten nichts besonders Merkwürdiges dar; ich betrachte daher nur noch den dreifachen Punkt bei A, wo x und z beide verschwinden.

§. 443. **Lehrsatz.** Die Curve hat da, wo x und z verschwinden, einen dreifachen Punkt, indem sich an die mit x parallele Tangente zwei Aeste anschliessen und eine Spitze bilden, zugleich aber ein andrer Theil der Curve, dessen Tangente mit z parallel ist, durch eben den Punkt geht.

Beweis. Die Hauptgleichung $z^4 - x^4 - 4axz^2 = o$ giebt, wenn man $z + \Delta z$ statt z, und $x + \Delta x$ statt x schreibt, dann aber die zusammen $= o$ werdenden Glieder, die kein Δz, Δx enthalten, weglässt, ganz allgemein folgende:

$$= o \left\{ \begin{array}{llll} 4z^3\Delta z & + 6z^2(\Delta z)^2 & + 4z(\Delta z)^3 & + (\Delta z)^4 \\ -4x^3\Delta x & - 6x^2(\Delta x)^2 & - 4x(\Delta x)^3 & - (\Delta x)^4 \\ -8axz\Delta z & - 4ax(\Delta z)^2 & & \\ -4az^2\Delta x & - 8az(\Delta x)(\Delta z) & - 4a\Delta x\,.\,(\Delta z)^2. & \end{array} \right.$$

Wenn man hier x und z beide $= o$ setzt, so fallen alle Glieder der ersten und zweiten Ordnung weg, und indem so die Lage der Berührungslinie durch eine Gleichung vom dritten Grade angegeben wird, erhalten wir schon die Ueberzeugung, dass der diesen Werthen von x, z entsprechende Punkt ein dreifacher Punkt ist. Die Differenzgleichung wird in diesem Falle

$$o = 4a\Delta x(\Delta z)^2 + (\Delta x)^4 - (\Delta z)^4,$$

also $\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^4 - \frac{4a}{\Delta x}\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2 = 1,$

oder $\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2 = \frac{2a}{\Delta x} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{4a^2}{(\Delta x)^2}\right)} = \frac{2a}{\Delta x} \pm \frac{2a}{\Delta x} \pm \frac{\Delta x}{4a}$, indem ich höhere Potenzen von Δx in der entwickelten Wurzel

$$\sqrt{\left(\frac{4a^2}{(\Delta x)^2} + 1\right)} = \frac{2a}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{4a} - \tfrac{1}{8}\,.\,\frac{(\Delta x)^3}{8a^3} + \text{etc.}$$ weglasse. Daraus folgt also, dass $\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2$ entweder $= \frac{4a}{\Delta x}$, oder $= o - \frac{\Delta x}{4a}$ werde. Der erste Werth wird für positive Δx möglich und giebt $\frac{\Delta z}{\Delta x} = \pm\sqrt{\frac{4a}{\Delta x}}$, welches sich dem Werthe $= \infty$ desto mehr nähert, je kleiner Δx wird, also angiebt, dass der auf der positiven Seite von DA, das ist oberhalb DA liegende Theil der Curve in A, die Linie DA selbst zur Tangente hat, indem die beiden von A ausgehenden Sehnen desto näher rechte Winkel mit AB bilden, je kleiner diese Sehnen sind. Der zweite Werth wird für negative Δx möglich und zeigt, dass die von A aus nach Punkten unterhalb AD gezognen Sehnen desto kleinere Winkel mit AC machen, je kleiner die Sehnen werden, so dass also hier von beiden Seiten her sich Aeste der Curve berührend an CA anschmiegen.

Kürzer hätten wir dies so übersehen können. Wenn wir in der Gleichung $o = 4a\,\Delta x\,(\Delta z)^2 + (\Delta x)^4 - (\Delta z)^4$, nur das bedeutendste Glied beibehalten, und $o = 4a\,\Delta x\,(\Delta z)^2$ setzen, so giebt dieses drei Werthe an, entweder $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = o$, oder $tang\,\varphi = \pm\, o$, das ist, sowohl von der positiven als von der negativen Seite her berührt ein Ast die *AC*; oder $\frac{dx}{dz} = o$, $Cotang\,\varphi = o$, das ist, ein Theil der Curve geht senkrecht auf *AC* durch *A*.

Wir hätten auf diesen dreifachen Punkt auch durch Betrachtung des ersten Gliedes kommen können; denn der allgemeine Ausdruck, den das erste Glied als Grenze oder als Bestimmung für die Lage der Berührungslinie angiebt, $\frac{dz}{dx} = \frac{x^3 + az^2}{z(z^2 - 2ax)}$ wird nur darum $= \frac{o}{o}$, weil im Zähler und Nenner gleiche Factoren vorkommen. Setze ich darin den in §. 436. gefundenen Werth von z^2, so ist $\frac{dz}{dx} = \frac{x^3 + 2a^2x \pm ax\sqrt{(4a^2 + x^2)}}{z(x.\sqrt{(4a + x^2)})}$, wo schon der Factor x wegfallen kann, und $\frac{dz}{dx} = \frac{x^2 + 2a^2 \pm a\sqrt{(4a^2 + x^2)}}{\sqrt{x}.\sqrt{\{2a \pm \sqrt{(4a^2 + x^2)}\}}.\sqrt{(4a^2 + x^2)}}$ wird. Setzt man hier $x = o$ und behält die obern Zeichen bei, so ist $\frac{4a^2}{2a.\sqrt{4xa}} = \infty$ für $x = o$, das ist $\frac{dz}{dx} = \infty$; die Berührungslinie des Astes, für welchen die oberen Zeichen gelten, oder für welchen x positiv ist, erhält an dieser Stelle eine auf x senkrechte Lage. Nimmt man dagegen die unteren Zeichen, so ist, wenn ich die Wurzelgrösse $\sqrt{(4a^2 + x^2)}$ in eine Reihe $= 2a + \frac{x^2}{4a}$ entwickele,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x^2 - \frac{1}{4}x^2}{\pm\left\{2a + \frac{x^2}{4a}\right\}.\sqrt{\left\{\frac{-x^3}{4a}\right\}}},$$

und dieser Werth gilt nur für negative x, weil nur dann das untere Zeichen zu gebrauchen war (§. 439.); sie giebt für negative x $\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{3}{4}.\sqrt{x}}{\sqrt{a}} = o$, wenn $x = o$ ist, und zeigt, dass hier die Tangente sich an die Abscisse x anschliesst, oder der Winkel φ, den die Berührungslinie mit der Abscissenlinie macht, $= o$ ist.

Sowohl jener Werth $\frac{2a}{\sqrt{2ax}} = \infty$, als dieser $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{x}{a}}$ könnte mit $\pm$ bezeichnet werden; dennoch deutet nur der letztere auf zwei, sich an *AC* anschmiegende Theile der Curve. Bei dem unendlich werdenden Werthe

$\pm \frac{2a}{\sqrt{2ax}} = tang\, \varphi$ liegt allerdings der Winkel, welchen die Berührungslinie mit AF macht, wenn x kleine Werthe erhält, an beiden Seiten von AF, aber beinahe unter rechten Winkeln gegen diese geneigt; daher bilden die beiden auf AF senkrechten Bogen der Curve, worauf diess hindeutet, nur den einen fortlaufenden Zweig DE der Curve. Für den andern, sich immer mehr dem $= o$ nähernden Werth $\pm \frac{3}{4} \sqrt{\frac{x}{a}} = tang\, \varphi$ aber muss es auch zwei Werthe für φ, einen rechts, den andern links von AC liegend geben, wenn x sehr kleine Werthe hat; die dadurch angedeuteten beiden Theile der Curve schliessen sich also unter einem unendlich kleinen Winkel an einander, sie berühren einander und bilden eine Spitze. So erhellt also, dass A ein dreifacher Punkt ist.

5. Die Curve, deren Gleichung ist:

$$z^4 + x^4 - 4axz^2 = o.$$

§. 444. **Bemerkung.** Wenn wir die bisher betrachtete Gleichung ganz eben so, nur mit Abänderung des einen Zeichens beibehalten, so wird die Curve eine ganz andre. Da nämlich nun das höchste Glied $z^4 + x^4$ gar keine möglichen Factoren hat, so hat die Linie keine unendlichen Aeste, sondern ist in einem endlichen Raume begrenzt (§. 331.)

§. 445. **Lehrsatz.** Die ganze Curve ist auf den Raum der Abscissenlinie eingeschränkt, der zwischen $x = o$ und $x = 2a$ liegt, und die Ordinate hat allemal vier mögliche Werthe.

Beweis. Die Gleichung $z^4 + x^4 - 4axz^2 = o$, giebt,

$$z^2 = 2ax \pm x\sqrt{(4a^2 - x^2)}, \text{ oder}$$
$$z = \pm \sqrt{\{2ax \pm x\sqrt{(4a^2 - x^2)}\}}.$$

Dieser Werth ist nur dann möglich, wenn x positiv und zugleich kleiner als $2a$ ist. Dieser Werth ist wirklich vierfach, denn da das Glied $x\sqrt{(4a^2 - x^2)}$ kleiner als $2ax$ ist, so ist sowohl $\sqrt{(2ax - x\sqrt{(4a^2 - x^2)})}$ als $\sqrt{(2ax + x\sqrt{(4a^2 - x^2)})}$ eine mögliche Grösse; die Ordinate erhält daher an jeder Seite der Abscissenlinie zwei ungleiche Werthe, und an beiden Seiten der Abscissenlinie liegen gleiche Ordinaten, so dass die Curve durch die Abscissenlinie in zwei symmetrische Hälften getheilt ist, wie das immer geschieht, wenn von z nur gerade Potenzen vorkommen.

§. 446. **Lehrsatz.** Die Abscisse ist allemal die mittlere Proportionallinie zwischen beiden ungleichen Werthen der Ordinate.

Beweis. Es sey z' der grössere, z'' der kleinere Werth der Ordinate, so ist $z'^2 = 2ax + x\sqrt{(4a^2 - x^2)}$,

$$z''^2 = 2ax - x\sqrt{(4a^2 - x^2)},$$

also $z'^2 . z''^2 = x^4$, das ist $z' . z'' = x^2$.

§. 447. Zieht man also Fig. 112. irgend eine auf die Abscissenlinie AB senkrechte Ordinate und trägt $DE = z'$, $DF = z''$ in entgegengesetzter Richtung auf, so ist EF der Durchmesser eines Kreises, der zugleich durch A geht, und dieses findet statt, wo man auch die Ordinate in der Curve ziehen mag.

§. 448. **Lehrsatz.** Die Mittelpunkte der eben erwähnten Kreise liegen alle auf einer Ellipse, deren halbe grosse Axe $AB = a$, halbe kleine Axe $= \frac{a}{\sqrt{2}}$ ist; oder man kann die ganze Curve dadurch bestimmen, dass man diese Ellipse zeichnet, dann ihre auf AB senkrechten Ordinaten GD, gd zieht, und mit den Halbmessern GA, gA Kreise um G, g, als Mittelpunkte beschreibt; wo diese in die zugehörige Ordinate einschneiden in E, F und in e, f, da liegen Punkte der Curve.

Beweis. Da EF der Durchmesser des Kreises $= z' + z''$ ist, so liegt sein Mittelpunkt da, wo $DG = \frac{1}{2} z' - \frac{1}{2} z''$ ist, also ist

$DG = \frac{1}{2} \sqrt{\{2ax + x\sqrt{(4a^2 - x^2)}\}} - \frac{1}{2} \sqrt{\{2ax - x\sqrt{(4a^2 - x^2)}\}}$, oder

$DG^2 = \frac{1}{4}\{4ax - 2x^2\}$. Diese Gleichung drückt den geometrischen Ort aller Kreismittelpunkte aus, und sie gehört offenbar einer Ellipse zu, deren grosse Axe $= 2a$, die halbe kleine Axe $= \frac{a}{\sqrt{2}}$ ist.

Wenn man also in irgend einem Punkte G der Ellipse den Mittelpunkt des Kreises nimmt und ihm den Halbmesser GA giebt, so liegen in der durch G auf AB senkrecht gesetzten Linie die Einschnittspunkte der Curve eben da, wo der Kreis einschneidet.

§. 449. Hieraus erhellt auch, dass $HE = KF = IG$ an jeder Stelle der Curve ist, und, wie sich leicht übersehen lässt, der von der Curve umschlossene Raum am Inhalt der Ellipse gleich seyn wird.

§. 450. **Aufgabe.** Die Lage der Berührungslinie an jedem Punkte e zu finden.

Auflösung. Es sey eL die Berührungslinie, $eLA = \varphi$ der Winkel, den sie mit der Abscissenlie macht, so ist (§. 371.) $tang\ \varphi$ gleich dem äussersten Werthe, den $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ bei immerfort abnehmender Grösse der von e ausgehenden Sehne erlangt.

Setze ich also $x + \Delta x$ statt x und $z + \Delta z$ statt z in die Hauptgleichung $z^4 + x^4 - 4axz^2 = o$, und lasse sogleich die sich aufhebenden Glieder, die keine Δx oder Δz enthalten, weg, so ist

$$o = \begin{cases} \quad 4z^3\Delta z + 6z^2(\Delta z)^2 + 4z(\Delta z)^3 + (\Delta z)^4 \\ + 4x^3\Delta x + 6x^2(\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4 \\ - 8axz\Delta z - 4ax(\Delta z)^2 \\ - 4az^2\Delta x - 8az\Delta x.\Delta z - 4a\Delta x.(\Delta z)^2. \end{cases}$$

Diese für jede Sehne geltende Gleichung giebt als Grenze des Werthes von $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ oder $\frac{dz}{dx} = tang\ \varphi = \frac{a z^2 - x^3}{z(z^2 - 2ax)}$, als allgemeinen Werth für die Tangente von *eLA*.

§. 451. Für $x = a$ wird $z = a\sqrt{(2 \pm \sqrt{3})}$, also $tang\ \varphi$ hier entweder $tang\ \varphi' = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{(6 + 3\sqrt{3})}} = 0{,}82$, welches für den entferntern Punkt *M* gilt, oder $tang\ \varphi'' = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{(6 - 3\sqrt{3})}} = 0{,}9$, und dieses gilt für den nähern Punkt *N*; in *N* ist also die Berührungslinie unter einem Winkel von ungefähr 42°, in *M* unter einem Winkel von ungefähr 39° gegen die Abscissenlinie geneigt.

§. 452. Dass am Ende der Axe in *O* die Ordinate selbst zur Tangente wird, geht schon aus dem Werthe $z^2 = 2ax \pm x\sqrt{(4a^2 - x^2)}$ hervor, indem die beiden Werthe von z^2 desto weniger ungleich werden, je näher x dem Werthe $= 2a$ kömmt, und für $x = 2a$, die zwei Werthe in einen zusammen fallen. Dass hier die Berührungslinie senkrecht auf die Abscissenlinie wird, zeigt auch die Gleichung §. 450., indem z dort $= 2a$ und mithin $tang\ \varphi = \frac{-2}{0} = \infty$ wird.

Wollen wir dagegen den Punkt bestimmen, wo die Curve der Abscissenlinie parallel ist, so ergiebt sich dieser aus $tang\ \varphi = o$, oder $az^2 = x^3 - o$. Diese Gleichung könnte nun zwar zwischen x und z statt finden, wenn beide $= o$ sind; aber dann verschwindet auch der Nenner des Bruchs, und $tang\ \varphi = \frac{o}{o}$ würde auf einen vielfachen Punkt, oder darauf hindeuten, dass an dieser Stelle die Lage der Tangente nicht durch eine Gleichung vom ersten, sondern von einem höhern Grade bestimmt würde: — ein Fall, der besonders müsste untersucht werden. Dagegen giebt $az^2 - x^3 = o$, auch

$$2a^2x + ax\sqrt{(4a^2 - x^2)} = x^3,$$

oder $x^2 - 2a^2 = a\sqrt{(4a^2 - x^2)}$,

das ist $x'^2 = 3a^2$;

nimmt man also $x' = a\sqrt{3}$ und $z' = a\sqrt{(3\sqrt{3})}$, so erhält man den Punkt, wo die Curve der Abscissenlinie gleichlaufend ist.

§. 453. Die Betrachtung des dreifachen Punktes *A* wird ganz genau eben so, wie bei der vorigen Curve ausfallen, daher ich sie hier übergehe.

§. 454. Aufgabe. Die Subtangente und Subnormallinie der Curve zu finden.

Auflösung. Da die Subtangente $= z \cdot Cotang\ \varphi$ ist, so haben wir

hier $\frac{z^2(z^2 - 2ax)}{az^2 - x^3} = dL$, die Subnormallinie dagegen wäre

$$= z \cdot tang\, \varphi = \frac{az^2 - x^3}{z^2 - 2ax}.$$

§. 455. Wollte man wissen, wann die Normallinie durch den Mittelpunkt der Ellipse geht, so müsste man

$$subnorm. = a - x = \frac{az^2 - x^2}{z^2 - 2ax} = \frac{2a^2 - x^2 \pm a\sqrt{(4a^2 - x^2)}}{\pm \sqrt{(4a^2 - x^2)}}$$ setzen,

dadurch wird $\mp x\sqrt{(4a^2 - x^2)} = 2a^2 - x^2$,

oder $x^4 - 4a^2x^2 = -2a^4$,

$x^2 = 2a^2 \pm a^2\sqrt{2}$.

Zu diesem Werthe von x^2 wird $z^2 = x(2a \pm \sqrt{(2a^2 \mp a^2\sqrt{2})})$, oder genauer, zu dem grössern $x' = a\sqrt{(2 + \sqrt{2})}$, gehört $z' = \pm \sqrt{x'a(2 \pm \sqrt{(2 - \sqrt{2})})}$, zu dem kleinern $x'' = a\sqrt{(2 - \sqrt{2})}$, gehört $z'' = \pm \sqrt{\{ax''(2 \pm \sqrt{(2 + \sqrt{2})}\}}$, oder $z' = \pm a\sqrt{\{2\sqrt{(2 + \sqrt{2})} \pm \sqrt{2}\}}$ und $z'' = \pm a\sqrt{\{2\sqrt{(2 - \sqrt{2})} \pm \sqrt{2}\}}$.

Aber bei x' ist es nur der grössere Werth der Ordinate, welcher die verlangte Normallinie giebt, indem, wenn ich in $\frac{az'^2 - x'^3}{z'^2 - 2ax'}$, den grössern Werth von z' setze, richtig wird:

$$\frac{x'(2a^2 - x'^2 + a^2\sqrt{(2 - \sqrt{2})})}{x\, a\sqrt{(2 - \sqrt{2})}} = \frac{-a\sqrt{2}}{\sqrt{(2 - \sqrt{2})}} + a = a - a\sqrt{(2 + \sqrt{2})},$$
$$= a - x';$$

dagegen würde der kleinere Werth von z' geben:

$$\frac{x'(2a^2 - x'^2 - a^2\sqrt{(2 - \sqrt{2})})}{-ax' \cdot \sqrt{(2 - \sqrt{2})}} = \frac{2a^2 - x'^2}{-a\sqrt{(2 - \sqrt{2})}} + a = \frac{-a\sqrt{2})}{-\sqrt{(2 - \sqrt{2})}} + a$$
$$= a + x'.$$

Also etwa bei E geht die Normallinie durch den Mittelpunkt.

Sucht man für x'', welcher von beiden Werthen des z'' der richtige ist, so findet man für das grössere z''

$$\frac{az''^2 - x''^3}{z''^2 - 2ax''} = \frac{x''(2a^2 + a^2\sqrt{(2 + \sqrt{2})} - x''^2)}{x''\, a\sqrt{(2 + \sqrt{2})}} = \frac{+a\sqrt{2}}{\sqrt{(2 + \sqrt{2})}} + a$$
$$= a + a\sqrt{(2 - \sqrt{2})} = a + x'',$$

und für das kleinere z''

$$= \frac{x''(2a^2 - x''^2 - a^2\sqrt{(3 + \sqrt{2})})}{-x'' \cdot a\sqrt{(2 + \sqrt{2})}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{-a\sqrt{2 + \sqrt{2}})} + a = + a - x'',$$ also ist es hier die kleinere Ordinate, welche den gesuchten Punkt angiebt.

Auf ähnliche Art könnte man bestimmen, an welcher Stelle die Normallinie durch den Endpunkt der Axe D, oder an welcher Stelle die Tangente durch B oder D gehn.

§. 456. Aufgabe. Den Punkt P zu bestimmen, wo die Ellipse und die Curve einander schneiden.

Auflösung. Wenn ich die Ordinate der Ellipse $= y$ nenne, so war (§. 448.) $y^2 = ax - \frac{1}{2}x^2$. Dagegen hatten wir für die Ordinate der Curve $z^2 = 2ax \pm x\sqrt{(4a^2 - x^2)}$. An der Stelle, wo beide Linien sich schneiden sollen, muss $y = z$ seyn, und da leicht zu übersehen ist, dass nur der kleinste Werth von z der Forderung entsprechen kann, so ist an dieser Stelle

$$ax - \tfrac{1}{2}x^2 = 2ax - x\sqrt{(4a^2 - x^2)},$$

das ist $x + 2a = 2\sqrt{(4a^2 - x^2)}$,

oder $5x^2 + 4ax = 12a^2$,

$$x = -\tfrac{2}{5}a \pm \tfrac{8}{5}a.$$

Also wenn $x = \frac{6}{5}a$ und $z^2 = (\frac{6}{5} - \frac{1}{2}\frac{8}{5})a^2 = \frac{12 . a^2}{25}$ ist, so treffen beide Curven zusammen.

Der angedeutete zweite Werth $x = -2a$ hat für uns keine Bedeutung, weil sowohl bei der Ellipse als bei unsrer Curve für negative x keine Ordinaten vorkommen; hätte man aber gleichwohl den Werth von y^2 und z^2 für $x = -2a$ berechnet, so käme

$$y^2 = -4a^2, \text{ und } z^2 = -4a^2,$$

und hieraus erhellt der Grund, warum die analytische Gleichung noch einen zweiten Werth für x giebt, nämlich den, wobei die unmöglichen Werthe von z und y als gleich angegeben werden.

§. 457. Dass an dieser Stelle $PR = PQ = PA$, also der grössere Werth von z dreimal so gross als der kleinere ist, erhellt schon aus §. 448.

6. Die Cardioide, oder die Curve, deren Gleichung $(z^2 + x^2)^2 - 4rx(x^2 + z^2) - 4r^2z^2 = o$ ist.

§. 458. Aufgabe. In dem Kreise AB (Fig. 113.) werden durch den Punkt A Sehnen AD, Ad gezogen, und diese nach beiden Seiten so verlängert, dass $DE = DF = de = df = AB$ sey; man sucht den geometrischen Ort der Punkte E, e, F, f.

Auflösung. Es sey EX senkrecht auf AB, und $AX = x$, $XE = z$, der Halbmesser des Kreises $= r$, so ist

$$Cos\,DAB = \frac{AD}{2r} = \frac{x}{2r + AD},$$

also $AD^2 + 2r . AD = 2rx$,

$AD + r = \sqrt{(2rx + r^2)}$,

aber $AD + 2r = r + \sqrt{(2rx + r^2)}$ ist auch $= \sqrt{(x^2 + z^2)}$.

$$\text{also } 2r^2 + 2rx + 2r\sqrt{(2rx + r^2)} = z^2 + z^2,$$
$$z^2 = 2r^2 + 2rx - x^2 + 2r\sqrt{(2rx + r^2)},$$

der Werth für z, und

$$(z^2 + x^2 - 2r^2 - 2rx)^2 = 8r^3x + 4r^4, \text{ oder}$$
$$z^4 + x^4 + 2x^2z^2 - 4z^2rx - 4r^2z^2 - 4rx^3 = o$$

ist die rationale Gleichung zwischen den Coordinaten, und diese gilt für den Punkt F so gut als für E.

§. 459. Diese, unter dem Namen Cardioide (herzförmige Linie) bekannte Curve besteht also aus zwei symmetrischen Hälften und ist von der vierten Ordnung.

Für $z = o$ wird $x = o$. oder $x = 4r = AG$,

für $x = o$ wird $z = o$, oder $z = \pm 2r = AH$, und der erste Werth bezieht sich auf den auf der verschwindenden Sehne oder der Tangente an A aufgetragenen Abstand $AH = 2r$.

§. 460. Da das höchste Glied der Gleichung (am Ende des 458. §.) keine möglichen einfachen Factoren enthält, so ist die Curve in einem endlichen Raume begrenzt; der Werth von z zeigt auch leicht, dass x keine grössern negativen Werthe als $x = -\frac{1}{2}r$ erreichen kann, und keinen grössern positiven Werth, als $x = 4r$. Der grösste Werth, den z erlangen kann, ergiebt sich nicht so leicht; er lässt sich aber finden, wenn man die mit AB parallel werdende Tangente sucht. Für $x = -\frac{1}{2}r$ wird $z = \pm \frac{r\sqrt{3}}{2}$.

§. 461. Lehrsatz. Wenn man mit irgend einer Sehne AE der Cardioide den Halbmesser CI des Kreises parallel zieht, auf seiner Verlängerung $IK = CI$ nimmt und den Kreis um K mit dem Halbmesser IK zieht, so geht dieser durch den Punkt E, welcher auf eben jener verlängerten Sehne in der Curve liegt.

Beweis. Da DE gleich und parallel der CK ist, so sind auch CD, KE parallel und gleich.

§. 462. Da zugleich $IKE = ACI$ ist, so erhellt aus dieser Eigenschaft, dass man sich die Curve als durch Wälzung des Kreises IL auf dem Umfange von AIB beschrieben denken kann. Wenn nämlich der erstere sich über AIB so fortwälzt, wie ein Rad, so wird, wenn der Punkt E in A sich befand, beim Fortwälzen immer der Bogen $IA = IE$ seyn, und wir haben eben gesehen, dass E, den wir dann den beschreibenden Punkt nennen, sich bei jeder Stellung des Kreises auf der Cardioide befindet. Diese Curve stimmt daher mit derjenigen Epicycloide, die wir später betrachten werden, überein, wo der Kreis, auf welchem die Wälzung geschieht, mit dem wälzenden Kreise gleichen Halbmesser hat.

§. 463. Aufgabe. Den allgemeinen Ausdruck für die Lage der Tangente zu finden.

Auflösung. Nach den bekannten Regeln wird

$$o = \left\{\begin{array}{llll} + 4x^3 \Delta z & + 6z^2 (\Delta z)^2 & + 4z(\Delta z)^3 & + (\Delta z)^4 \\ + 4x^3 \Delta x & + 6x^2 (\Delta x)^2 & + 4x(\Delta x)^3 & + (\Delta x)^4 \\ + 4xz^2 \Delta x & + 2z^2 (\Delta x)^2 & & \\ + 4zx^2 \Delta z & + 8xz\Delta z . \Delta x & + 4z\Delta z (\Delta x)^2 & \\ & + 2x^2 (\Delta z)^2 & + 4x \Delta x (\Delta z)^2 & \\ - 4z^2 r \Delta x & - 8zr\Delta z . \Delta x & - 4r\Delta z (\Delta z)^2 & \\ - 8rxz\Delta z & - 4rx(\Delta z)^2 & & \\ - 8r^2 z \Delta z & - 4r^2 (\Delta z)^2 & & \\ - 12rx^2 \Delta x & - 12rx(\Delta x)^2 & - 4r(\Delta x)^3, & \end{array}\right.$$

also für die Tangente $\frac{dz}{dx} = tang\, \varphi = \frac{x^3 + xz^2 - z^2 r - 3rx^2}{2r^2 z + 2rxz - zx^2 - z^3}$.

§. 464. Die Berührungslinie wird mit AB parallel, wenn $tang\, \varphi = o$ ist, das heisst, wenn $x(x^2 + z^2) = r(z^2 + 3x^2)$ ist. Das kann nun zwar geschehen, wenn x und z beide verschwinden, aber dann wird auch der Nenner $= o$, und der Ausdruck $\frac{o}{o}$ unbestimmt. Da nach §. 458.

$$x^2 + z^2 = 2r^2 + 2rx + 2r\sqrt{(2rx + r^2)},$$

so giebt jene Gleichung

$$2r^2 x + 2rx^2 + 2rx\sqrt{(2rx + r^2)} = r(2x^2 + 2r^2 + 2rx + 2r\sqrt{(2rx + r^2)}),$$

oder $(x - r)\sqrt{(2rx + r^2)} = r^2$

$$2x^3 - 3rx^2 = o,$$

das ist $x = \frac{3}{2} r$, womit $z = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ zusammengehört, und dieses ist der grösste Werth, den z erhalten kann.

§. 465. Für x und $z = o$ verschwinden alle Glieder der ersten Ordnung und die ganze Gleichung für die Lage der Sehnen würde sich auf

$$o = 4r^2 (\Delta z)^2 + 4r\Delta x((\Delta x)^2 + (\Delta z)^2) - ((\Delta x)^2 + (\Delta z)^2)^2$$ beschränken.

Da wir auch hier den Grenzwerth dadurch finden, dass wir nur die höchsten Glieder betrachten, so kann ich für diese Bestimmung

$$o = 4r^2 (\Delta z)^2 + 4r(\Delta x)^3 + 4r\Delta x(\Delta z)^2,$$

oder $\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2 = \frac{-\Delta x}{r + \Delta x} = -\frac{1}{r}\Delta x + \frac{(\Delta x)^2}{r^2} +$ etc. setzen. Das heisst: $\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2$ erhält für $x = z = o$, einen Werth, der desto näher $= -\frac{\Delta x}{r}$ ist, je kleiner man die Sehne nimmt. Ist also Δx so klein, dass man das folgende Glied unberücksichtigt lassen kann, so ist $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ nur dann möglich, wenn Δx negativ ist, aber der Werth von $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ nimmt im Verhältniss mit Δx ab, und die

Sehne macht also immer kleinere und kleinere, selbst bis auf Null abnehmende Winkel mit der Verlängerung der BA, wenn man die Sehne immer kleiner annimmt, oder die Berührungslinie an beide Theile der Curve fällt mit BA zusammen.

Kürzer zeigt diess schon das Glied, welches von der zweiten Ordnung ist, wenn man es allein betrachtet. Dieses nämlich giebt $o = 4r^2 (\Delta z)^2$, also Δz, als $= o$ werdend, für unbestimmte, jedoch kleine Werthe von Δx, also $\frac{dz}{dx} = o$. Die vorige Entwickelung lässt aber den Grund deutlich übersehen, warum es so erfolgt.

§. 466. Bemerkung. Man kann die Gleichung für die Curve so abändern, dass $AE = R$ durch den Winkel $CAE = \psi$ ausgedrückt wird. Da nämlich $R^2 = x^2 + z^2$, $x = R \,.\, Cos\,\psi$, $z = R \,.\, Sin\,\psi$ ist, so wird aus der Gleichung (§. 458.) $(x^2 + z^2)^2 - 4rx(x^2 + z^2) - 4r^2 z^2 = o$,

$$R^4 - 4r R^3 \,.\, Cos\,\psi - 4r^2 R^2 \,.\, Sin^2\psi = o,$$
oder $R^2 - 4r R \,.\, Cos\,\psi - 4r^2 \,.\, Sin^2\psi = o$,
oder $R = 2r \,.\, Cos\,\psi \pm 2r$.

Wollte man $CE = \varrho$ durch $ACE = \sigma$ ausdrücken, so wäre

$$Sin\,\psi = \frac{\varrho \,.\, Sin\,\sigma}{R} \text{ und } R^2 = r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \,.\, Cos\,\sigma,$$

$$Cos\,\psi = \sqrt{\left\{\frac{R^2 - \varrho^2 \,.\, Sin^2\sigma}{R^2}\right\}} = \frac{\sqrt{\{r^2 + \varrho^2 \,.\, Cos^2\sigma - 2r\varrho \,.\, Cos\,\sigma\}}}{\sqrt{(r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \,.\, Cos\,\sigma)}},$$

also aus der Gleichung $R = 2r(Cos\,\psi \pm 1)$, jetzt

$$\sqrt{(r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \,.\, Cos\,\sigma)} = \frac{2r(r - \varrho \,.\, Cos\,\sigma)}{\sqrt{(r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \,.\, Cos\,\sigma)}} \pm 2r,$$

das ist $\varrho^2 = r^2 \pm 2r\sqrt{(r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \,.\, Cos\,\sigma)}$,
oder $\varrho^4 - 6r^2\varrho^2 - 3r^4 = -8r^3\varrho \,.\, Cos\,\sigma$,

$$\text{also } Cos\,\sigma = \frac{3r^4 + 6r^2\varrho^2 - \varrho^4}{8r^3\varrho}.$$

§. 467. Lehrsatz. Wenn man Fig. 114. gegen Punkte A, a eines Kreises vom Endpunkte D des Durchmessers BD gerade Linien DA, Da zieht, und AE, ae, gleich den zurückgeworfnen Strahlen, unter eben dem Winkel gegen den zugehörigen Halbmesser CA, Ca geneigt zieht, unter welchem jene gegen ihn geneigt waren, so dass $EAC = CAD$, $eaC = CaD$, so liegt der Durchschnittspunkt F der zurückgeworfnen AE, ae, man mag A, a, wo man will auf dem Kreise genommen haben, desto näher auf einer Cardioide, für welche $r = \frac{1}{3}\,BC$ ist, je näher an einander man die Punkte A, a genommen hat.

Beweis. Es sey die Lage des Punktes A durch den Winkel $ACB = \omega$ bestimmt, so wird $ADE = \frac{1}{2}\,\omega$, $= CAE$ und $AEB = \frac{3}{2}\,\omega$, also wenn des

Kreises Halbmesser $= R$ ist, $EC = \frac{R \,.\, Sin \frac{1}{2} \omega}{Sin \frac{3}{2} \omega}$. Nenne ich für den Punkt a den Winkel $aCB = \omega - \Delta \omega$, so ist eben so

$$eC = \frac{R \,.\, Sin \frac{1}{2} (\omega - \Delta \omega)}{Sin \frac{3}{2} (\omega - \Delta \omega)}.$$

Die Lage der geraden Linie EA wird also durch eine Gleichung ausgedrückt, wenn ich für jede von C an gerechnete Abscisse $= x$, die Höhe

$$z = (x - EC) \; tang \; AEB,$$

oder $z = \left(x - \frac{R \,.\, Sin \frac{1}{2} \omega}{Sin \frac{3}{2} \omega}\right) tang \frac{3}{2} \omega = \frac{x \,.\, Sin \frac{3}{2} \omega - R \,.\, Sin \frac{1}{2} \omega}{Cos \frac{3}{2} \omega}$ angebe.
Eben so wird für dieselbe Abscisse x die Höhe $= z'$ der Linie ae angegeben durch $z' = (x - eC) \,.\, tang \; aeB$, oder es ist

$$z' = \frac{x \,.\, Sin \frac{3}{2} (\omega - \Delta \omega) - R \,.\, Sin \frac{1}{2} (\omega - \Delta \omega)}{Cos \frac{3}{2} (\omega - \Delta \omega}.$$

Da vorausgesetzt wird, dass die Punkte einander sehr nahe liegen, so können wir uns begnügen, so zu rechnen, als ob $\Delta \omega$ klein genug wäre, um Bogen und Sinus zu verwechseln, und $Cos \, \Delta \omega = 1$ zu setzen. Unter dieser Voraussetzung würde, weil $Sin (\frac{3}{2} \omega - \frac{3}{2} \Delta \omega)$ dann

$$= Sin \tfrac{3}{2} \omega - \tfrac{3}{2} \Delta \omega \,.\, Cos \tfrac{3}{2} \omega \text{ ist,}$$

$$z' = \frac{x \,.\, Sin \frac{3}{2} \omega - \frac{3}{2} x \Delta \omega \,.\, Cos \frac{3}{2} \omega - R \,.\, Sin \frac{1}{2} \omega + \frac{1}{2} R \Delta \omega \,.\, Cos \frac{1}{2} \omega}{Cos \frac{3}{2} \omega + \frac{3}{2} \Delta \omega \,.\, Sin \frac{3}{2} \omega},$$

oder da man bei der Entwickelung dieses Bruches auch nur die erste Potenz von $\Delta \omega$ beizubehalten braucht,

$$z' = \frac{x \,.\, Sin \frac{3}{2} \omega - R \,.\, Sin \frac{1}{2} \omega}{Cos \frac{3}{2} \omega}$$
$$- \Delta \omega \left\{ \tfrac{3}{2} x + \tfrac{3}{2} x \,.\, tang^2 \tfrac{3}{2} \omega - \frac{\frac{1}{2} R \,.\, Cos \frac{1}{2} \omega}{Cos \frac{3}{2} \omega} - \frac{\frac{3}{2} R \,.\, Sin \frac{1}{2} \omega \,.\, Sin \frac{3}{2} \omega}{Cos^2 \frac{3}{2} \omega} \right\}.$$

Da, wo die Linien AE, ae sich durchschneiden, ist ihre Höhe über BC gleich, oder $z' = z$, folglich muss der Coefficient von $\Delta \omega$ da $= o$ seyn, das ist

$$\tfrac{3}{2} x \,.\, Sec^2 \tfrac{3}{2} \omega = \frac{\frac{1}{2} R \left(Cos \frac{1}{2} \omega \,.\, Cos \frac{3}{2} \omega + 3 \,.\, Sin \frac{1}{2} \omega \,.\, Sin \frac{3}{2} \omega\right)}{Cos^2 \frac{3}{2} \omega},$$

oder $3x = R (Cos \frac{1}{2} \omega \,.\, Cos \frac{3}{2} \omega + 3 \,.\, Sin \frac{1}{2} \omega \,.\, Sin \frac{3}{2} \omega)$.
Diesen Werth von x will ich $= x'' = \frac{1}{3} R \,.\, Cos \frac{1}{2} \omega \,.\, Cos \frac{3}{2} \omega + R \,.\, Sin \frac{1}{2} \omega \,.\, Sin \frac{3}{2} \omega$ nennen und den zugehörigen Werth von z mit z'' bezeichnen, wo dann

$z'' = \frac{1}{3} R \,.\, Cos \frac{1}{2} \omega \,.\, Sin \frac{3}{2} \omega - R \,.\, Sin \frac{1}{2} \omega \,.\, Cos \frac{3}{2} \omega$ wird, und daraus
$CF^2 = x''^2 + z''^2 = \frac{1}{9} R^2 \,.\, Cos^2 \frac{1}{2} \omega + R^2 \,.\, Sin^2 \frac{1}{2} \omega$.

Wenn man aus diesen zwischen x'', z'' und ω gefundenen Gleichungen ω eliminiren könnte, so hätte man eine Gleichung für den geometrischen Ort aller Durchschnittspunkte. Hier nämlich ist für ein gegebnes ω bestimmt, wo

die zwei, einander sehr nahe liegenden Linien AE, ae sich schneiden, und wir erhalten also zu jedem gegebnen ω ein zusammengehörendes x'' und z'', die gegenseitig durch einander bestimmt werden können, wenn man ω wegschafft.

Es ist aber, wie die Formeln für den Sinus des dreifachen Winkels zeigen, allgemein $Sin\,\frac{3}{2}\omega = Sin\,\frac{1}{2}\omega.\{4\,Cos^2\,\frac{1}{2}\omega - 1\}$,

$$Cos\,\tfrac{3}{2}\omega = Cos\,\tfrac{1}{2}\omega.\,\{4\,Cos^2\,\tfrac{1}{2}\omega - 3\},$$

also $x'' = \frac{1}{3}R\,.\,Cos^2\,\frac{1}{2}\omega\,(4\,Cos^2\,\frac{1}{2}\omega - 3) + R\,.\,Sin^2\,\frac{1}{2}\omega\,(4\,Cos^2\,\frac{1}{2}\omega - 1)$

$$= \tfrac{4}{3}R\,.\,Cos^4\,\tfrac{1}{2}\omega + 4\,R\,.\,Sin^2\,\tfrac{1}{2}\omega\,.\,Cos^2\,\tfrac{1}{2}\omega - R,$$

oder $x'' = \frac{1}{3}R + \frac{4}{3}R\,.\,Sin^2\,\frac{1}{2}\omega - \frac{8}{3}\,Sin^4\,\frac{1}{2}\omega$;

und $z'' = R\,.\,Sin\,\frac{1}{2}\omega\,.\,Cos\,\frac{1}{2}\omega\left\{\frac{4\,Cos^2\,\frac{1}{2}\omega - 1}{3} - (4\,Cos^2\,\frac{1}{2}\omega - 3\right\}$

$$= R\,.\,Sin\,\tfrac{1}{2}\omega\,.\,Cos\,\tfrac{1}{2}\omega\left\{\frac{8 - 8\,Cos^2\,\frac{1}{2}\omega}{3}\right\} = \tfrac{8}{3}R\,.\,Sin^3\,\tfrac{1}{2}\omega\,.\,Cos\,\tfrac{1}{2}\omega,$$

also $x'' - \frac{1}{3}R = \frac{8}{3}R\,.\,Sin^2\,\frac{1}{2}\omega\,(\frac{1}{2} - Sin^2\,\frac{1}{2}\omega)$,

und $\dfrac{z''}{x'' - \frac{1}{3}R} = \dfrac{2\,Sin\,\frac{1}{2}\omega\,.\,Cos\,\frac{1}{2}\omega}{1 - 2\,Sin^2\,\frac{1}{2}\omega} = \dfrac{Sin\,\omega}{Cos\,\omega} = tang\,\omega.$

Das heisst in Worten, wenn man $CH = \frac{1}{3}R$ nimmt, und HF nach dem Durchschnittspunkte F jener beiden Linien AE, ae zieht, so ist

$$tang\,FHB = tang\,\omega,$$

also $FHB = \omega$,

FH mit CA parallel. Zugleich erhält man zur Bestimmung von FH die Gleichung: $FH^2 = (z''^2 + (x'' - \frac{1}{3}R)^2) = \frac{64}{9}R^2\,.\,Sin^4\,\frac{1}{2}\omega\,\{\frac{1}{4}\}$,

oder $FH = \frac{4}{3}R\,.\,Sin^2\,\frac{1}{2}\omega = \frac{2}{3}R\,(1 - Cos\,\omega)$.

Diese Gleichung ist nun eben dieselbe, welche wir §. 466. für die Cardioide fanden, das dortige R ist hier FH, das dortige r hier $\frac{1}{3}R$, das dortige ψ hier $180^\circ - \omega$.

§. 468. Die eben gefundene Bestimmung giebt die Cardioide als die Brennlinie (Catacaustica) an, die in einem Kreise oder Cylinder durch Strahlen, welche von einem Endpunkte D des Durchmessers ausgehen, gebildet wird. Wäre nämlich in D ein leuchtender Punkt, so würden die nach A, a zugehenden Strahlen DA, Da, nach AE, ae zurückgeworfen, und es gäbe für jede zwei solche Strahlen einen Durchschnittspunkt, den man allgemein fände, wenn man in unsern Gleichungen die Grösse $\Delta\omega$ nicht als sehr klein angesehen, sondern auch ihre höhern Potenzen beibehalten hätte. Die Lehren der Optik aber zeigen, dass die Erleuchtung da vorzüglich stark wird, wo die Durchschnittspunkte zweier Strahlen liegen, die von zwei einander sehr nahen Punkten A, a zurückgeworfen werden, und deshalb nennt man den geometrischen Ort aller solcher Durchschnittspunkte die Brennlinie. Man sieht sie auf dem Boden eines cylindrischen Gefässes, wenn man den Boden mit weissem Papier bedeckt, und überzeugt sich leicht, dass sie nach der verschiedenen Stel-

lung des leuchtenden Punktes eine verschiedene Gestalt erhält; in dem eben betrachteten Falle ist es die Cardioide.

7. Die Conchoide oder die Curve, deren Gleichung $x^2 z^2 = (b^2 - z^2)(a - z)^2$ ist.

§. 469. Aufgabe. Auf der Linie AB wird AC senkrecht errichtet (Fig. 115.), und aus dem unveränderlichen Punkte C werden gerade Linien CD, Cd gegen AB gezogen und über sie hinaus verlängert. Auf jeder derselben wird vom Durchschnittspunkte D, d an die immer gleiche Entfernung $DE = DF = de = df$ aufgetragen: man sucht eine Gleichung für den geometrischen Ort der Punkte E, F, e, f.

Auflösung. Es sey $AG = x$ die Abscisse, $GE = z$ die Ordinate des zu bestimmenden Punktes (Fig. 116.), zugleich sey $AC = a$ der Abstand des gegebnen Punktes C von der Abscissenlinie, und $DE = DF = b$ die aufzutragende unveränderliche Entfernung; dann ist, wenn ich noch $CE = \varrho$ und $ACE = \psi$ nenne, $a = (\varrho + b)\, Cos\, \psi$; $x^2 + (a-z)^2 = \varrho^2$, und $z = b\,.\, Cos\, \psi$, oder $\varrho^2 = \left(\frac{a}{Cos\,\psi} - b\right)^2 = b^2 \left(\frac{a}{z} - 1\right)^2$; da dieses nun zugleich $= x^2 + (a - z)^2$ ist, so erhalten wir folgende Gleichung zwischen x und z;

$(x^2 + z^2) z^2 - 2 a z^3 + (a^2 - b^2) z^2 + 2 a b z^2 - a^2 b^2 = o$. Eine Gleichung vom vierten Grade, welche die Natur der Curve darstellt.

Aus ihr wird auch $x^2 = \frac{b^2 (a - z)^2}{z^2} - (a - z)^2 = \frac{(b^2 - z^2)(a - z)^2}{z^2}$.

§. 370. Es wird also x in zwei Fällen gleich Null; erstlich wenn $z = b$, zweitens wenn $z = a$ ist. Für $z = o$ dagegen wird x unendlich, woraus sich schliessen lässt, dass die Abscissenlinie selbst Asymptote der Curve ist. Die Gleichung zeigt auch schon, dass die Curve sich mit vier Aesten an diese Asymptote anschliesst, denn für sehr kleine positive z so gut als für sehr kleine negative z nimmt der Werth von x bei abnehmendem z unaufhörlich zu; und da jedem z ein gleich grosses positives und negatives x entspricht, so nähert sich die Curve sowohl bei B als bei H der Abscissenlinie.

§. 471. Bemerkung. Diese Linie, welche die Conchoide oder Muschellinie heisst, gehört, da der mögliche Factor z im höchsen Gliede zur zweiten Potenz erhoben, aber auch im nächsten Gliede wieder als Factor vorkömmt, zu den Curven, welche (nach §. 392.) zwei parallele geradlinige Asymptoten haben sollten. Beide sind hier in eine zusammen gefallen, welches (§. 342.) immer der Fall seyn wird, wenn in der dort für λ gefundenen Formel der irrationale Theil verschwindet. Folgen wir der Anordnung der dor-

tigen Betrachtungen, so muss hier $x^2 + z^2 = 2az - (a^2 - b^2) - \frac{2ab^2}{z} + \frac{a^2b^2}{z^2}$ noch richtig bleiben für sehr grosse x, und das kann nur geschehen, wenn z immer mehr abnimmt. Je kleiner z wird, desto mehr übertrifft $\frac{a^2b^2}{z^2}$ alle übrige Glieder, und $x^2 = \frac{a^2b^2}{z^2}$ ist also die Gleichung für die hyperbolische Asymptote, die sich an die Conchoide anschliesst, und diese giebt $x = \pm\frac{ab}{z}$, so dass sowohl diejenige Apollonische Hyperbel, in welcher positiven z positive x, als diejenige, in welcher positiven z negative x entsprechen, als sich anschliessend an die vier Aeste der Conchoide angegeben wird.

Da aber für sehr entfernte Punkte auf der Conchoide

$$x^2 = \frac{a^2b^2}{z^2} - \frac{2ab^2}{z},$$

für sehr entfernte Punkte auf dem Aste der Hyperbel

$x^2 = \frac{a^2b^2}{z^3}$ ist, so gehört einem gegebnen, schon sehr kleinen positiven z eine grössere Abscisse bei der Hyperbel als bei der Conchoide, oder die Conchoide schliesst sich an der positiven Seite (das ist in der Figur, unterhalb) der Abscissenlinie früher als die Hyperbel an die gerade Linie an. Das Entgegengesetzte findet bei negativen z, die sich nämlich nicht mit C an einerlei Seite der HB befinden, statt.

§. 472. In der Gleichung §. 342. ist β hier $= o$, aber da x weder im zweiten Gliede noch im dritten vorkömmt, so ist auch c und $h = o$, und deshalb wird $\lambda' = \lambda'' = o$.

§. 473. Bemerkung. Da z nie grösser als b werden kann, weil sonst x unmöglich würde, so kann der Werth $z = a$ (§. 469. 470.) nur vorkommen, wenn $a < b$ oder $a = b$ ist. Wäre $a > b$, so kann die Curve nicht durch C (Fig. 117.) gehen; aber dieser Punkt hat nun die Natur eines zugeordneten Punktes (§. 382.), indem die Gleichung $x^2 = \frac{(b^2 - z^2)(a - z)^2}{z^2}$, ganz richtig $x = o$ für $z = a$ giebt, obgleich für Werthe von z, die ein wenig von a verschieden wären, x unmöglich würde, oder kein gegen C zu gehender Ast der Curve gefunden würde. Die Betrachtung der Berührungslinie lässt uns ebenfalls diesen zugeordneten Punkt erkennen.

§. 474. Aufgabe. Die Lage der Berührunglinie der Conchoide zu bestimmen.

Auflösung. Wenn wir $x + \Delta x$ statt x, und $z + \Delta z$ statt z in die

Gleichung setzen, und sogleich die Glieder, deren Summe vermöge der Gleichung $(x^2 + z^2) z^2 - 2 a z^3 + (a^2 - b^2) z^2 + 2 a b^2 z - a^2 b^2 = o$ verschwindet, weglassen, so wird

$$= o \begin{cases} 2x^2 z \Delta z & + x^2 (\Delta z)^2 \\ + 2 x z^2 \Delta x & + 4 z x \Delta x . \Delta z + 2 x (\Delta z)^2 \Delta x \\ & + z^2 (\Delta x)^2 + 2 z \Delta z (\Delta x)^2 + (\Delta z)^2 (\Delta x)^2 \\ + 4 z^3 \Delta z & + 6 z^2 (\Delta z)^2 + 4 z (\Delta z)^3 + (\Delta z)^4 \\ - 6 a z (\Delta z) & - 6 a z (\Delta z)^2 - 2 a (\Delta z)^3 \\ + 2 z (a^2 - b^2) \Delta z & + (a^2 - b^2) (\Delta z)^2 \\ + 2 a b^2 \Delta z & \end{cases}$$

die Gleichung, wodurch man allgemein die Lage der Sehne bestimmen müsste.

Für die Berührungslinie haben wir also, wenn diese die Abscissenlinie unter dem Winkel φ schneidet,

$$tang\, \varphi = \frac{dz}{dx} = \frac{x z^2}{3 a z^2 - x^2 z - 2 z^3 + (b^2 - a^2) z - a b)^2}.$$

§. 475. Wenn man aus dieser Gleichung die Lage der Tangente in dem Falle, wo $z = o$ ist, beurtheilen will, so bietet sich eine Schwierigkeit dar. Der Zähler unsers Bruches kann nicht so geradezu $= o$ gesetzt werden, wenn $z = o$ ist, indem x alsdann unendlich wird. Aber da, wie wir gesehen haben, $x . z = a b$ wird, je grösser man x, und folglich je kleiner man z nimmt, so ist $x z^2 = a b z$, und $tang\, \varphi$ wird $= o$ für $x = \infty$ oder $z = o$. Eben das erfolgt für $x = o$, wenn alsdann zugleich $z = b$ ist, indem für $z = b$ der Nenner nicht verschwindet; also ist auch bei I, K (Fig. 115. 116. 117.) die Curve mit HB parallel.

§. 476. Betrachtet man dagegen den Punkt C, wo $x = o$ und $z = a$ ist, so wird auch der Nenner unsers Bruches $= o$, und dieser Fall muss also durch die Betrachtung des zweiten Gliedes entschieden werden.

Für $z = a$ und $x = o$ wird die Gleichung, welche Δz durch Δx bestimmen sollte,

$$o = a^2 (\Delta x)^2 + (a^2 - b^2) \Delta z^2 + 2 a \Delta z (\Delta x)^2 + 2 a (\Delta z)^3 + (\Delta z)^4 + (\Delta z)^2 + (\Delta x)^2;$$

diese Gleichung giebt also, wenn man bloss das erste Glied, nämlich das, worin die zweiten Potenzen von Δx, Δz vorkommen, betrachtet:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2 - a^2}.$$

Hier zeigt sich sogleich, dass drei Fälle zu unterscheiden sind. Ist $b > a$, wie Fig. 115., so ist $\frac{dz}{dx} = tang\, \varphi = \pm \frac{a}{\sqrt{(b^2 - a^2)}}$ und in C durchschneiden sich zwei Zweige der Curve, unter den Neigungen $= \varphi$ und $= 180° - \varphi$ gegen die Abscissenlinie, welche dieser trigonometrischen Tangente gemäss sind. Ist $b = a$, so ist (Fig. 116.) $\varphi = 90°$ und beide Aeste be-

rühren AC und bilden eine Spitze. Ist endlich (Fig. 117.) $b < a$, so wird $tang\,\varphi$ unmöglich, und der Punkt C liegt als zugeordneter Punkt ausser dem Zuge der Curve.

§. 477. Eben das hätte sich durch Wegschaffung des Factors, der in diesem Falle sowohl im Zähler als im Nenner verschwindet, finden lassen. Wir hatten allgemein §. 474.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x z^2}{3 a z^2 - x^2 z - 2 z^3 + (b^2 - a^2) z - a b^2},$$

$$\text{oder} = \frac{x z^2}{2 z^2 (a - z) - x^2 z - a z (a - z) - b^2 (a - z)};$$

folglich da $x = \pm \frac{(a-z)}{z} \sqrt{(b^2 - z^2)}$ ist,

$$\frac{dz}{dx} = \pm \frac{z \sqrt{(b^2 - z^2)}}{2 z^2 - b^2 - a z - (b^2 - z^2) \frac{(a-z)}{z}}$$

$$= \frac{\pm z \sqrt{(b^2 - z^2)}}{z^2 - b^2 - z (a - z) - (b^2 - z^2) \frac{(a-z)}{z}} = \frac{\pm z \sqrt{(b^2 - z^2)}}{z^2 - \frac{b^2 a}{z}}$$

$$= \frac{\pm z^2 \sqrt{(b^2 - z^2)}}{z^3 - b^2 a}.$$

Dieser Werth von $\frac{dz}{dx} = tang\,\varphi$ wird nun nicht mehr $= o$, wenn $z = a$ wird, sondern ist dann $= \frac{\pm a \sqrt{(b^2 - a^2)}}{a^2 - b^2} = \frac{\mp a}{\sqrt{(b^2 - a^2)}}$. Wenn also der Winkel, den die am Knoten gezogne Berührungslinie mit dem Durchmesser AC macht, $= \beta$ heisst, als Ergänzung zu 90 Grad für den eben gefundenen Werth von φ, so ist $Cotang\,\beta = \frac{a}{\sqrt{(b^2 - a^2)}}$ und $Cos\,\beta = \frac{a}{b}$, so dass der Cosinus dieses Winkels durch das Verhältniss der gegebnen Linien a, b unmittelbar bestimmt wird.

§. 478. Aufgabe. Den Punkt zu bestimmen, wo die Berührungslinie mit dem Durchmesser AC parallel wird.

Auflösung. Da alsdann $tang\,\varphi = \frac{dz}{dx} = \infty$ werden muss, so muss in dem eben gefundenen Werthe $= \frac{z^2 \sqrt{(b^2 - z^2)}}{z^3 - b^2 a}$ der Nenner verschwinden, also $z = a^{\frac{1}{3}} . b^{\frac{2}{3}}$ seyn. Hier also stellt z die erste von zwei mittlern Proportionallinien zwischen b und a vor, denn es ist $b : a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}} : a^{\frac{2}{3}} . b^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}} : a$.

Zugleich ist hier $x^2 = \frac{(a - z)^2}{z^2}(b^2 - z^2) = (b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}})^3$,

oder $x^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = (b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}})(b^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}})$.

§. 479. Verlangt man also die erste der zwei mittlern Proportionallinien zwischen b und a, so nimmt man die kleinere $a = AC$ als Abstand des festen Punktes von der Abscissenlinie, die grössere $= b$, als den auf jeder Linie DC aufzutragenden Abstand DE, zeichnet die Conchoide (Fig. 132.) und zieht ihre mit AC parallele Tangente. Wenn diese in M berührt, so ist AL die gesuchte erste mittlere Proportionallinie.

Wenn man sich zwei Würfel denkt, die sich ihrem körperlichen Inhalt nach wie die Linien b, a verhalten, so verhalten sich die Seitenlinien dieser Würfel wie $b^{\frac{1}{3}}$ zu $a^{\frac{1}{3}}$, und es ist folglich $x^{\frac{1}{3}}$ die mittlere Proportionalgrösse zwischen der Summe und dem Unterschiede jener $b^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{3}}$. Mit andern Worten: denkt man sich drei Würfel, deren Inhalt der Linien b, x, a proportional ist, deren Inhalt also durch $c^2 . b$, $c^2 . x$, $c^2 . a$ ausgedrückt wird, so ist des zweiten Würfels Seite $= c^{\frac{2}{3}} . x^{\frac{1}{3}}$, die mittlere Proportionallinie zwischen Summe $= c^{\frac{2}{3}}(b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}})$, und Unterschied $= c^{\frac{2}{3}}(b^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}})$ der Seiten jener Würfel. Die Seitenlinien der drei Würfel bilden also auch ein rechtwinkliges Dreieck.

§. 480. Bemerkung. Man hätte diesen Punkt, wo die Tangente senkrecht auf AB wird, noch auf andre Weise suchen können. Die Hauptgleichung für alle Punkte der Conchoide ist, nach den Potenzen von z geordnet, folgende:

$$z^4 - 2az^3 + (a^2 + x^2 - b^2)z^2 + 2ab^2 z - a^2 b^2 = 0.$$

Wenn hier alle vier Wurzeln möglich und zwei einander gleich werden sollen, so muss, wenn ich sie als durch z', z', z'', z''' ausgedrückt annehme, wie aus der Lehre von den Gleichungen bekannt ist,

$$2z' + z'' + z''' = 2a,$$
$$z'^2 + 2z'(z'' + z''') + z''z''' = a^2 + x^2 - b^2,$$
$$z'^2(z'' + z''') + 2z''z'''z' = -2ab^2,$$
$$z'^2 . z'' . z''' = -a^2 b^2 \text{ seyn.}$$

Setzt man aus der ersten den Werth von $z'' + z'''$, aus der vierten den Werth von $z''z'''$ in die zweite und dritte, so giebt

die zweite $z'^2 + 2z'(2a - 2z') - \frac{a^2 b^2}{z'^2} = a^2 + x^2 - b^2$,

die dritte $z'^2(2a - 2z') - 2z'\frac{a^2 b^2}{z'^2} = -2ab^2$,

oder jene, $-3z'^2 + 4az' - \frac{a^2 b^2}{z'^2} = a^2 + x^2 - b^2$,

diese $2az'^2 - 2z'^3 - \frac{2a^2b^2}{z'} = -2ab^2$,

oder $z'^4 - az'^3 - ab^2z' + a^2b^2 = o$; dieser Gleichung geschieht Genüge durch $z'^3 = ab^2$, und dann giebt jene

$$a^2 + x^2 - b^2 = \frac{4a^2b^2 - 3ab^2 \cdot a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}} - a^2b^2}{a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{4}{3}}} = 3a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{2}{3}} - 3a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{4}{3}},$$

oder $x^2 = b^2 - a^2 - 3a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{2}{3}} (b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}})$

$$x^2 = (b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}})(b^{\frac{4}{3}} - 2a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{4}{3}}) = (b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}})^3.$$

Eben das, was wir vorhin fanden.

§. 481. Wenn (Fig. 132.) CN die am Knoten C gezogne Berührungslinie ist, so haben wir also (§. 477.) $Cos\,\beta = Cos\,NCA = \frac{a}{b}$, und nun auch, wenn M der Punkt ist, wo die Curve mit AC parallel wird,

$$tang\,MCL = \frac{x'}{z' - a} = \frac{(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{3}} . b^{\frac{2}{3}} - a} = \frac{\sqrt{(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}})}}{a^{\frac{1}{3}}},$$

oder $Cos\,MCL = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}$, so dass allemal $Cos\,ACN = Cos^3\,MCL$ ist.

5. Die Curve, deren Gleichung ist:

$$z^2 = ax\left(m - \frac{x}{b}\right)^2.$$

§. 481*. Lehrsatz. Die Curve hat eine Parabel der dritten Ordnung, deren Gleichung $z^2 = \frac{ax^3}{b^2}$ ist, zur Asymptote.

Beweis. Die entwickelte Gleichung ist $\frac{ax^3}{b^2} - \frac{2amx^2}{b} - z^2 + m^2ax = o$; das höchste Glied hat also drei gleiche Factoren x, und dieser Factor x kömmt im zweiten Gliede nicht vor; es ist also der in 351. betrachtete Fall.

§. 482. Bemerkung. Die Gleichung zeigt, dass die Abscissenlinie, auf welcher nämlich die x aufgetragen werden, die Curve in zwei symmetrische Hälften theilt, weil jedem x ein gleich grosses positives und negatives z entspricht.

Die Ordinate z wird zweimal $= o$, erstlich wenn $x = o$ ist, zweitens wenn $x = mb$ ist.

§. 483. **Lehrsatz.** Der Punkt, wo $x = mb$ und $z = o$, ist ein doppelter Punkt.

Beweis. Setzt man $x + \Delta x$ statt x, und $z + \Delta z$ statt z in die Gleichung, so ergiebt sich

$$o = \begin{cases} 2z\Delta z + (\Delta z)^2 \\ + \frac{2ax}{b}\left(m - \frac{x}{b}\right)\Delta x - \frac{ax}{b^2}(\Delta x)^2 \\ - a\left(m - \frac{x}{b}\right)^2 \Delta x + \frac{2a}{b}\left(m - \frac{x}{b}\right)(\Delta x)^2 - \frac{a}{b}(\Delta x)^3. \end{cases}$$

Daraus aber für $z = o$ und $x = mb$,

$$o = (\Delta z)^2 - \frac{ma}{b}\Delta x^2, \text{ also } \frac{dz}{dx} = tang\,\varphi = \pm\sqrt{\frac{ma}{b}}.$$

Dieser Punkt ist also ein Knoten, dessen beide sich durchschneidende Bogen unter dem Winkel, dessen Tangente $= \sqrt{\frac{ma}{b}}$ gegen die Abscissenlinie geneigt sind.

§. 484. Wäre $m = o$, so ginge der Knoten in eine Spitze oder Rückkehrpunkt über, und in diesem Falle wäre die Curve nichts anders, als die Parabel der dritten Ordnung, deren Gleichung $z^2 = \frac{ax^3}{b^2}$ ist.

§. 485. Dass für $z = o$ die Richtung der Curve auf die Abscissenlinie senkrecht ist, erhellt leicht aus §. 483. Dagegen wird sie mit der Abscissenlinie parallel, wenn $\frac{2x}{b} = \left(m - \frac{x}{b}\right)$, oder $3x = mb$ ist, also $x = \frac{1}{3}\,\alpha C$ in Fig. 136., und eben da $z^2 = \frac{4}{27}\,am^3 b$.

§. 486. **Aufgabe.** Wenn auf die hohle Seite der Parabel *AE* (Fig. 133.) Lichtstrahlen, unter sich parallel, senkrecht gegen die Hauptaxe *AB* auffallen und nach dem bekannten Gesetze so, dass der zurückgeworfene Strahl eben den Winkel wie der einfallende mit der Normallinie mache, zurückgeworfen werden, den Punkt zu bestimmen, wo zwei zurückgeworfne Strahlen, die einander sehr nahe auffielen, sich schneiden.

Auflösung. Es sey *de* ein solcher die Parabel in *e* treffender Strahl, und es sey $de = z$, $Ad = x = \frac{z^2}{p}$, wenn p der ganze Parameter der Parabel ist.

Da die Subnormallinie für jeden Punkt der Parabel $= \frac{1}{2}p$ ist, so haben wir, wenn *ef* die Normallinie, *eb* den zurückgeworfnen Strahl vorstellt,

$$tang\,fed = tang\,\omega = \frac{p}{2z},\ tang\,2\omega = \frac{\frac{p}{z}}{1 - \frac{p^2}{4z^2}} = \frac{4pz}{4z^2 - p^2} \text{ und den Punkt } b,$$

wo der zurückgeworfne Strahl die Hauptaxe schneidet, durch

$$Ab = x + \frac{4pz^2}{4z^2 - p^2} = \frac{z^2}{p} + \frac{4pz^2}{4z^2 - p^2} = \left(\frac{4z^2 + 3p^2}{4z^2 - p^2}\right)\frac{z^2}{p} \text{ bestimmt.}$$

Da diese Linie be unter dem Winkel $= 90° - 2\omega$ gegen die Hauptaxe geneigt ist, so wird, wenn eines Punktes v in ihr Abscisse $Au = u$, Ordinate $uv = v$ heisst, $v = (Ab - u)\ Cotang\ 2\omega = \frac{(4z^2 + 3p^2)z}{4p^2} - \frac{u(4z^2 - p^2)}{4pz}$ seyn.

Für den zweiten Strahl sey $DE = z + \Delta z$, so erhellt leicht, dass eben diese Betrachtungen uns für ihn, wenn u', v' die Coordinaten sind, die Gleichung $v' = \frac{(4(z+\Delta z)^2 + 3p^2)(z+\Delta z)}{4p^2} - \frac{u'(4(z+\Delta z)^2 - p^2)}{4p(z+\Delta z)}$ geben werden. Ist also Δz so klein, dass man alle höhere Potenzen weglassen und nur die erste behalten darf, so wird

$$v' = \frac{(4z^2 + 3p^2)z}{4p^2} - \frac{u'(4z^2 - p^2)}{4pz} + \left(\frac{3z^2}{p^2} + \tfrac{3}{4}\right)\Delta z - \frac{u'}{p}\Delta z - \frac{u'p}{4z^2}\Delta z,$$

also für $u = u'$,

$$v' = v + \left(\frac{3z^2}{p^2} + \tfrac{3}{4} - \frac{u}{p} - \frac{up}{4z^2}\right)\Delta z.$$

Diese Werthe für v und v' gelten für jeden Punkt der Linien be, BE; für den Durchschnittspunkt beider aber muss $v' = v$ seyn, also der Coefficient von Δz an der Stelle $= o$, und es wird daher

$$12z^4 + 3p^2z^2 = up(4z^2 + p^2),$$

oder $(4z^2 + p^2)\,3z^2 = up(4z^2 + p^2)$,

das ist $u = \frac{3z^2}{p}$,

und folglich $v = \frac{(4z^2 + 3p^2)z}{4p^2} - \frac{u(4z^2 - p^2)}{4pz}$,

$$= \tfrac{3}{2}z - \frac{2z^3}{p^2},$$

wodurch, wenn z gegeben, oder der Punkt e auf der Parabel bestimmt ist, der Durchschnittspunkt der einander sehr nahen Strahlen bei der Zurückwerfung bestimmt wird.

§. 487. **Lehrsatz.** Der geometrische Ort aller dieser Durchschnittspunkte ist die eben vorhin betrachtete Curve, wenn man in der Gleichung für jene $m = \tfrac{3}{2}$, $a = \tfrac{1}{3}p$, $b = \tfrac{3}{2}$ setzt.

Beweis. Da die Werthe der Coordinaten für die Lage des Durchschnittspunktes $u = \frac{3z^2}{p}$, $v = \tfrac{3}{2}z - \frac{2z^3}{p^2}$, für jeden Werth von z gelten, so

ist auch, wenn man z eliminirt, $v = z\left(\frac{3}{2} - \frac{2u}{3p}\right) = \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\frac{u}{p}\right)\sqrt{\frac{pu}{3}}$,

$$\text{oder } v^2 = \frac{pu}{3}\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\frac{u}{p}\right)^2,$$

und diese Gleichung gilt allgemein für jedes Paar zusammengehöriger Strahlen. Die Durchschnittspunkte liegen also auf einer Curve, deren Ordinate durch

$$v^2 = au\left(m - \frac{u}{b}\right)^2 \text{ gegeben ist,}$$

wenn $a = \frac{1}{3}p$; $m = \frac{3}{2}$; $b = \frac{9}{4}p$ ist.

Bei dieser Bestimmung der beständigen Grössen ist also unsre Curve die **Brennlinie der Parabel**, wenn die Strahlen so einfallen, wie wir angenommen haben.

§. 488. Die Optik lehrt nicht nur, dass die Erleuchtung in jedem Punkte dieser Brennlinie stärker als in den benachbarten ist, sondern giebt auch Mittel an, wie man die verschiedenen Grade der Erleuchtung in den verschiedenen Punkten der Brennlinie bestimmen, also es erklären kann, warum nicht alle Theile der Brennlinie in gleichem Masse glänzend erscheinen. Fig. 133. zeigt die Parabel mit der ihr zugehörigen Brennlinie.

§. 488*. Die Gleichung $z^2 = ax\left(m - \frac{x}{b}\right)^2$ gehört noch einer andern merkwürdigen Curve. Bestimmt man nämlich die beständigen Grössen so, dass $m = 1$, $b = 3a$ sey, so gehört die Gleichung $z^2 = ax\left(1 - \frac{x}{3a}\right)^2$ der Curve Fig. 136. zu, welche die Eigenschaft hat, dass, wo man auch die Tangente AB ziehen mag, sie immer auf CD ein Stück CB abschneidet, das halb so lang als der Bogen CA ist, so dass Bogen $CA = 2 . CB$; Bogen $Ca = 2 . Cb$; Bogen $C\alpha = 2 . C\beta$ ist und so ferner.

9. Die Curve, deren Gleichung ist:

$$z(x + z)(x - z) = ax^2 + bz^2 + c^2 z + a^3.$$

§. 489. **Bemerkung.** Wir haben schon früher (§. 346.) gesehen, dass diese Linie drei gerade Linien zu Asymptoten hat, und dass diese durch die Gleichungen $z = a$, $x + z = -\frac{1}{2}(a + b)$, $x - z = +\frac{1}{2}(a + b)$ ausgedrückt werden.

Die Gleichung zeigt ferner leicht, indem sie $x^2 = \frac{z^3 + bz^2 + c^2 z + a^3}{z - a}$ giebt, dass die Curve für jedes z zwei gleiche entgegengesetzte Werthe von x giebt, also durch die durch den Anfangspunkt der Abscissen senkrecht auf

die Abscissenlinie gezogne Linie in zwei völlig symmetrische Hälften getheilt wird.

§. 490. Die letzte Gleichung kann uns auch dienen, um noch auf eine andre Weise die Asymptoten zu bestimmen. Es erhellt nämlich zuerst, dass x desto grösser wird, je näher z dem Werthe $z = a$ wird, und dass sich also die Curve an eine in der Entfernung $z = a$ mit der Abscissenlinie parallel gezogne gerade Linie anschliesst. Zweitens aber wenn man den Werth von x^2 durch Division entwickelt, so ist

$$x^2 = z^2 + (a+b)\,z + a^2 + a\,b + c^2 + \frac{2\,a^3 + a^2\,b + a\,c^2}{z - a},$$

und dieses giebt $x = \pm\left(z + \tfrac{1}{2}(a+b) + \dfrac{\tfrac{1}{2}(a^2 + a\,b + c^2) - \tfrac{1}{8}(a+b)^2}{z}\right.$ + etc.,

also desto näher $x = \pm\,(z + \tfrac{1}{2}(a+b))$, je grösser z wird, das heisst, es schliessen sich Aeste der Curve an die beiden durch $x = z + \tfrac{1}{2}(a+b)$ und durch $x = -\,(z + \tfrac{1}{2}(a+b))$ bestimmten geraden Linien an.

§. 491. An welcher Seite der Asymptoten sich die Aeste der Curve befinden, hängt von den Werthen der Grössen b, c, a^3 und ihren Zeichen ab. Bleibt $z^3 + b\,z^2 + c^2\,z + a^3$ positiv, wenn z etwas grösser als a ist und sich dem Werthe $= a$ nähert, so liegt der Ast der Curve oberhalb der ersten Asymptote, oder es wird x unendlich, wenn die Werthe von z immer etwas mehr als a betragen, sich diesem aber unendlich nähern. Dagegen liegen diese Aeste an der negativen Seite der Asymptote, wenn für $z = a$, der Zähler des Werthes von x^2 negativ wird, indem dann für Werthe von z, die kleiner als a sind, x möglich, für Werthe, die grösser als a sind, unmöglich wird.

§. 492. Auch für die beiden andern Asymptoten lässt sich leicht bestimmen, an welcher Seite derselben die Aeste der Curve sich befinden. Ist nämlich durch den Anfangspunkt A (Fig. 120.) eine Linie AU unter dem Winkel von 45 Grad geneigt gezogen, und der Punkt W durch Abscissen $AU = u$, und Ordinaten $UW = v$ bestimmt, so ist zur Bestimmung der Coordinaten $AX = x$, $XW = z$, $x = \dfrac{u+v}{\sqrt{2}}$, $z = \dfrac{u-v}{\sqrt{2}}$, also vermöge des entwickelten Werthes von x^2

$$\frac{(u+v)^2}{2} = \frac{(u-v)^2}{2} + \frac{(a+b)\,(u-v)}{\sqrt{2}} + a^2 + a\,b + c^2 + \frac{2\,a^3 + a^2\,b + a\,c^2}{\left(\dfrac{u-v}{\sqrt{2}}\right) - a},$$

oder für sehr entlegene Punkte, wo v sich einem unveränderlichen Werthe nähert,

$$\frac{u^2}{2} + uv = \frac{u^2}{2} - uv + \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)u - \frac{(a+b)\,v}{\sqrt{2}} + a^2 + a\,b + c^2,$$

oder $2uv = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right) u - \frac{(a+b)\,v}{\sqrt{2}} + a^2 + ab + c^2$,

$$v = \frac{\frac{(a+b)\,u}{\sqrt{2}} + a^2 + ab + c^2}{2u + \frac{a+b}{\sqrt{2}}} = \frac{a+b}{2\sqrt{2}} + \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}b^2 + c^2}{u}.$$

Da nun die Asymptote überall um den Abstand $= v' = \frac{a+b}{2\sqrt{2}}$ von der Linie AU entfernt ist, so liegt der sehr entfernte Theil des Astes der Curve für positive u entfernter, für negative u näher, wenn $\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab + c^2 > \frac{1}{4}b^2$ ist, dagegen findet das Gegentheil statt, wenn $\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab + c^2 < \frac{1}{4}b^2$ ist. Die Figuren 120. 121. 122. stellen den ersten Fall, 130, 131 den zweiten Fall dar.

§. 493. Bemerkung. Die Hauptverschiedenheiten, welche die Gestalt unsrer Curve darbietet, hängen davon ab, ob die Gleichung $z^3 + bz^2 + c^2z + a^3 = o$ eine oder drei mögliche Wurzeln hat, und wie viele derselben grösser, wie viele kleiner als $= a$, auch ob sie gleich oder ungleich sind.

Da nämlich $x^2 = \frac{z^3 + bz^2 + c^2z + a^3}{z - a}$ war, so wird x entweder ein oder dreimal gleich Null, je nachdem es die Anzahl der Wurzeln fordert.

§. 494. Erster Fall. Hat die Gleichung nur eine Wurzel, so erhellt leicht, dass $z^3 + bz^2 + c^2z + a^3$ eine positive Summe giebt, sobald z grösser, eine negative Summe, sobald z kleiner als diese Wurzel angenommen wird. Ist also in Fig. 120. KL die Abscissenlinie, A der Punkt, wo die Curve schneidet, der Abstand der Asymptote von der Abscissenlinie $= a$, und nun die Wurzel entweder negativ oder doch $< a$, so ist für alle zwischen A und C fallende Werthe von z der Zähler $z^3 + bz^2 + c^2z + a^3$ positiv, der Nenner negativ, also x^2 negativ, x unmöglich. Dagegen für alle kleinere Werthe von z, oder für alle Punkte, die von A nach M zu liegen, ist der Zähler negativ, weil in A der Uebergang vom Positiven zum Negativen ist; und da der Nenner auch negativ ist, so ist x möglich, und von A an geht die Curve neben AM mit ununterbrochenen unendlichen Aesten fort, die sich an FE, HG anschliessen. Oberhalb A bleibt der Werth des Zählers immer positiv, der Nenner wird auch positiv, und x also möglich; für $z = a$ wird x unendlich, die Curve läuft also von beiden Seiten her mit unendlichen, oberhalb BD liegenden Aesten gegen die Axe CM zu, erreicht sie aber nicht, weil es keinen zweiten Werth für z giebt, der $x = o$ gäbe, und die Curve muss daher zwei von einander abgesonderte, oberhalb BD liegende Theile haben, die sich mit unendlichen Aesten FE, HG anschliessen.

§. 495. Zweiter Fall. Die Gleichung $z^3 + bz^2 + c^2z + a^3 = o$ hat

drei mögliche Wurzeln, und zwar sind diese alle kleiner als a, oder liegen (Fig. 121. 122. 134. 135.) sämmtlich unterhalb der Asymptote BC.

Da der Werth von $z^3 + bz^2 + c^2z + a^3$ gewiss positiv wird für sehr grosse positive z, (selbst wenn die Glieder bz^2, c^2z, a^3 negativ wären,) und die Wurzeln, also die Einschnittspunkte der Curve in DM, die Uebergänge aus dem Positiven ins Negative bestimmen, so wird $z^3 + bz^2 + c^2z + a^3$ oder der Zähler des Werthes von x^2 negativ, wenn z zwischen AP und AQ fällt, positiv zwischen Q und R (Fig. 122.), und negativ von R an, so weit man auch die negativen z vergrössert. Da wir alle Wurzeln kleiner als $z = a$, oder selbst den höchsten Durchschnittspunkt P als unterhalb der Asymptote BDC liegend angenommen haben, so ist der Zähler und Nenner des Werthes von x^2 positiv, so lange $z > a$ ist, und hier ist also x immer möglich; da aber der Durchmesser DM hier nirgends geschnitten wird, so liegen die Theile oberhalb BC eben so wie im ersten Falle. Unterhalb BC ist $z - a$ immer negativ; da nun der Zähler noch positiv bleibt, bis $z = AP$ wird, so liegen neben DP keine Theile der Curve, weil hier x unmöglich ist; dagegen werden Zähler und Nenner des Werthes von x^2 negativ, wenn z sich zwischen P und Q endigt, und hier wird also x möglich, die Curve bildet hier ein abgesondertes Oval (Fig. 122.). Zwischen Q und R ist der Werth des Zählers von x^2 wieder positiv, des Nenners negativ, also x unmöglich, bis in R die negativen Werthe des Zählers anfangen und mögliche Werthe von x herbeiführen; unterhalb R geht die Curve also ununterbrochen mit unendlichen Aesten fort.

Dieser Fall bietet Verschiedenheiten dar, wenn zwei Wurzeln gleich werden. Sind die beiden grössesten Wurzeln gleich, so geht das Oval in einen zugeordneten Punkt K (Fig. 121.) zusammen. Sind die beiden kleinsten Wurzeln gleich, so rückt Q an R (Fig. 122.), und es bildet sich, wie Fig. 184., ein Knoten.

§. 496. **Dritter Fall.** Eine Wurzel sey grösser als a, die übrigen beiden kleiner. Da dann wieder (Fig. 130. 131.) der Werth des Zählers von x^2 positiv ist für $z > AP$, negativ, wenn z zwischen P und Q fällt, positiv zwischen Q und R, negativ jenseits R; so wird x möglich, wenn $z > AP$ ist, und die Curve geht von dem Durchschnittspunkte P ununterbrochen mit zwei unendlichen Aesten zu immer wachsenden z fort. Für $z < AP$ ist der Zähler von x^2 negativ; da nun der Nenner positiv bleibt, so lange $z > a$, oder $z > AD$ bleibt, so liegt neben PD kein Theil der Curve. Aber für $z < a$ ist auch der Nenner negativ, und folglich x möglich. Die Curve schliesst sich also unterhalb BC mit unendlichen Aesten an diese Asymptote an, und x erhält mögliche Werthe, bis $z = AQ$ ist, oder bis zur nächsten Wurzel des Ausdrucks $z^3 + bz^3 + c^2z + a^3 = o$. Jenseits dieser Wurzel geht der Werth dieses Ausdrucks oder des Zählers von x^2 ins Positive über und bleibt bis zu der nächsten Wurzel, oder bis $z = AR$ ist, positiv; da aber der Nenner negativ bleibt, so

ist x unmöglich, und neben QR liegen keine Punkte der Curve. Von R an aber bleibt jener Ausdruck, der Zähler von x^2, immerfort negativ; und da auch der Nenner negativ ist, so behält x nun immer mögliche Werthe, und die Curve geht ununterbrochen mit unendlichen Ästen von R an fort.

Sind hier die beiden an einerlei Seite von BC liegenden Wurzeln gleich, so ist R ein doppelter Punkt, wie es Fig. 131. darstellt.

§. 497. Vierter Fall. Wenn $z^3 + bz^2 + c^2 z + a^3 = o$ drei gleiche Wurzeln hat. In diesem Falle lässt sich $z^3 + bz^2 + c^2 z + a^3$ durch $(z - \alpha)^3$ darstellen, also $x^2 = \frac{(z-\alpha)^3}{z-a}$.

Nenne ich hier $z - a = u$, oder rechne die Ordinaten von der Asymptote BC an, so ist

$$x^2 . u = (u + a - \alpha)^3,$$

und die Curve erhält (Fig. 135.) beinahe dieselbe Gestalt wie Fig. 121., nur dass bei A eine Spitze entsteht.

Wäre aber $\alpha = a$, so ist $x^2 . (z - a) = (z - a)^3$ eine Gleichung für drei sich in dem Punkte der Axe, wo $z = a$ ist, durchkreutzende Linien, indem $x^2 . (z - a) - (z - a)^3 = o$ einerlei ist mit

$(z - a) \{x + z - a\} . \{x - z + a\} = o$, und dieser Gleichung Genüge geschieht, wenn einer der drei Factoren verschwindet.

§. 498. Erstes Beispiel. Es sey $b = c = 4a$,

$$\text{also } x^2 = \frac{z^3 + 4az^2 + 16a^2 z + a^3}{z - a},$$

so wird (Fig. 120.) $x = o$ für $z = - 0{,}063 . a$ als einzige Wurzel. AC ist $= a$. Die Curve wird, wie die bald folgenden Betrachtungen zeigen, da mit dem Durchmesser BM parallel, wo $z = 1{,}89 . a$ ist.

Zweites Beispiel. Es sey $x^2 = \frac{z^2 + 8{,}0667\, az^2 + 15{,}533\, a^2 z + a^3}{z - a}$, so ist (Fig. 122.) $x = o$, wenn $z = - \frac{1}{15} . a$, oder $z = - 3a$, oder $z = - 5a$ ist. AD ist $= a$, die beiden andern Asymptoten werden durch $x = \pm (z + 4{,}533 . a)$ bestimmt, und die Curve besteht aus dem zugeordneten Oval PQ und den drei abgesonderten Stücken FB, HC, GRE.

Drittes Beispiel. Wenn $x^2 = \frac{z^3 + 2cz^2 + c^2 z + 0{,}148 . c^3}{z - 0{,}529 . c}$ ist, so wird $x = o$ für $z = - 1{,}33 . c$ und $z = - 0{,}33 . c$, und der letzte Werth kömmt zweimal als Wurzel vor; er entspricht (Fig. 121.) dem Punkte K, der nun ein zugeordneter Punkt ist.

Viertes Beispiel. Fig. 134. stellt den Fall vor, wo $x^2 = \frac{z^3 + 11cz^2 + 35c^2 z + 25c^3}{z - c}$ ist, also $x = o$ wird für $z = - 1 . c$ und

$z = -5.c$. Die letzte Wurzel kömmt zweimal vor, und die Curve hat also einen Knoten, da wo $z = -5.c$ ist.

Fünftes Beispiel. Der Knoten geht in eine Spitze über, wenn alle drei Wurzeln gleich sind, wie Fig. 135., wo $x^2 = \frac{(z+2c)^3}{z-c}$ ist.

Sechstes Beispiel. Ist eine Wurzel grösser als der Abstand der Asymptote, die andern zwei kleiner, so erhält die Curve die Gestalt, wie Fig. 130., wo $x^2 = \frac{z^3 + 2{,}125\,az^2 - 7{,}75\,a^2 z - a^3}{z-a}$ ist. z ist hier $= +2a$, oder $= -\frac{1}{8}a$, oder $= -4a$, wenn $x = o$ ist. Die Aeste liegen an den entgegengesetzten Seiten der Asymptoten.

Siebentes Beispiel. Werden hier zwei Wurzeln gleich, so hat, wie Fig. 131., die Curve einen Knoten. Diese Figur ist nach der Gleichung $x^2 = \frac{z^3 - 3az^2 - 3{,}75\,.\,a^2 z - a^3}{z-a}$ gezeichnet, und x ist $= o$, wenn $z = 4a$, und wenn $z = -\frac{1}{2}a$ ist.

§. 499. Aufgabe. Die Gleichung für die Lage der Berührungslinie unsrer Curve zu finden.

Auflösung. Wenn ich in der allgemeinen Gleichung

$$zx^2 - z^3 - ax^2 - bz^2 - c^2 z - a^3 = o,$$

$x + \Delta x$ statt x und $z + \Delta z$ statt z setze, so wird

$$\left.\begin{array}{lll} 2zx\Delta x & + z(\Delta x)^2 & \\ + x^2\Delta z & + 2x\Delta z\,.\,\Delta x & + \Delta z(\Delta x)^2 \\ - 3z^2\Delta z & - 3z(\Delta z)^2 & - (\Delta z)^3 \\ - 2ax\Delta x & - a(\Delta x)^2 & \\ - 2bz\Delta z & - b(\Delta z)^2 & \\ - c^2\Delta z & & \end{array}\right\} = o,$$

also wenn die Berührungslinie mit der Linie, welche dem z parallel ist, oder mit dem Durchmesser BM (Fig. 120.) den Winkel $= \varphi$ macht,

$$tang\,\varphi = \frac{dx}{dz} = \frac{x^2 - 3z^2 - 2bz - c^2}{2x(a-z)}.$$

§. 500. Die Curve ist also allemal da auf die Axe BM senkrecht, wo $x = o$ ist, oder wo die Axe von der Curve geschnitten wird, und da wo $z = a$ ist, oder wo die unendlichen Aeste die Asymptote berühren. In dem letztern Falle könnte zwar der Nenner, weil mit $z = a$, $x = \infty$ zusammen gehört, als unbestimmt $= o\,.\,\infty$ scheinen; aber da für sehr grosse x, wenn z nur $= a$ ist, der ganze Ausdruck in $= \frac{x}{2(a-z)}$ übergeht, so hebt sich dieser Zweifel von selbst. Für $x = o$ dagegen kann der Fall eintreten, dass auch der Zähler ver-

schwindet, und $tang\,\varphi = \frac{o}{o}$ auf einen doppelten Punkt hinweiset. Parallel mit dem Durchmesser wird unsre Linie da, wo $x^2 = 3z^2 + 2bz + c^2$ ist; da nun allemal auch $x^2 = \frac{z^3 + bz^2 + c^2 z + a^3}{z - a}$ ist, so ergiebt sich zu Bestimmung dieser Punkte die cubische Gleichung

$$2z^3 + (b - 3a)z^2 - 2abz - a(c^2 + a^2) = o.$$

Da diese Gleichung entweder eine oder drei mögliche Wurzeln hat, so könnte es scheinen, als ob kein Fall, wie Fig. 122., vorkommen könnte, wo die Curve in zwei Punkten mit der Axe parallel würde. Dieser Fall kann aber dennoch vorkommen, wenn der einen Wurzel ein unmöglicher Werth von x zugehört. In Fig. 122. (im zweiten Beisp. §. 498.) war $b = 8{,}067$, $c^2 = 15{,}533$, also unsre Gleichung $2z^3 + 5{,}067 \,.\, az^2 - 16{,}133\, za^2 - 16{,}533 \,.\, a^3 = o$, und diese hat die Wurzeln $z = 2{,}4 \,.\, a$; $z = -0{,}9 \,.\, a$ und $z = -4{,}1$; aber dem letzten Werthe entspricht kein Punkt der Curve.

§. 501. Aufgabe. Die in der Gleichung vorkommenden beständigen Grössen so zu bestimmen, dass die Curve einen doppelten Punkt erhält.

Auflösung. Da die Linie von der dritten Ordnung ist, so kann sie nicht mehr als einen doppelten Punkt haben, und dieser muss, weil die Curve an beiden Seiten des Durchmessers aus ganz gleichen Theilen besteht, auf diesem Durchmesser selbst liegen. Damit ein solcher Punkt da sey, muss also für irgend einen bestimmten Werth von z $3z^2 + 2bz + c^2 = o$ seyn, damit für $x = o$, $tang\,\varphi = \frac{o}{o}$ zu werden scheinen. Da nun aber vermöge der Hauptgleichung $x = o$ wird für

$$z^3 + bz^2 + c^2 z + a^3 = o,$$

oder $3z^3 + 3bz^2 + 3c^2 z + 3a^3 = o$, und zugleich

$$3z^3 + 2bz^2 + c^2 z \qquad = o \text{ seyn soll,}$$

so ist $bz^2 + 2c^2 z + 3a^3 = o$. Diese Gleichung, mit

$$3z^2 + 2bz + c^2 = o \text{ oder}$$

$$bz^2 + \tfrac{2}{3}b^2 z + \tfrac{1}{3}bc^2 = o \text{ verbunden, giebt}$$

$$(2c^2 - \tfrac{2}{3}b^2)z + (3a^3 - \tfrac{1}{3}bc^2) = o;$$

und da wir vermittelst dieser Gleichung z wegschaffen könnten, so erhielten wir eine Gleichung zwischen den beständigen Grössen, die uns dienen würde, die eine unsrer Forderung gemäss zu bestimmen, wenn die andern zwei gegeben wären.

§. 502. Um nur einzelne Fälle darzustellen, dient aber folgende Ueberlegung:

Die Gleichung $3z^2 + 2bz + c^2 = o$, giebt

$$z = -\tfrac{1}{3}b \pm \sqrt{(\tfrac{1}{9}b^2 - \tfrac{1}{3}c^2)},$$

nehmen wir hier b willkürlich, z. B. $b = 2c$ an, so ist $z = -\frac{2}{3}c \pm \frac{1}{3}c$, und

$$z^3 + bz^2 + c^2z + a^3 = o \text{ geht nun für } z - \tfrac{1}{3}c$$

in $-\frac{1}{27}c^3 + \frac{2}{9}c^3 - \frac{1}{3}c^3 + a^3 = o$ über,
so dass $a^3 = \frac{4}{27}c^3$ wird. Hier ergäbe sich also die Gleichung

$$x^2 = \frac{z^3 + 2cz^2 + c^2z + \frac{4}{27}c^3}{z - \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\cdot c}$$

als eine solche, durch welche die Curve einen doppelten Punkt erhält. Diese Gleichung ist unser drittes Beispiel §. 498. Fig. 121.

Hätte man in der Gleichung $z = -\frac{1}{3}b \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{9} - \frac{c^2}{3}\right)}$, $b^2 = \frac{196}{9}c^2$ gesetzt, so wäre $z = -\frac{14}{9}\cdot c \pm \frac{13}{9}\cdot c$, und $z^3 + bz^2 + c^2z + a^3 = o$ gäbe nun für $b = \frac{14}{3}c$, $z = -\frac{1}{9}c$,

$$-\frac{c^3}{729} + \frac{14}{243}c^3 - \frac{1}{9}c^3 + a^3 = o,$$

also $a^3 = +\frac{40}{729}c^3$, so dass die Gleichung

$$z^3 + \frac{14}{3}cz^2 + c^2z + \frac{40}{729}c^3 = o,$$

einen Knoten geben würde. Die Gleichung hat nämlich die drei Wurzeln $z = -0{,}102$, $z = -2{,}28$, $z = -2{,}28$.

10. Die Curven, für welche $x^{\frac{m}{n}} + z^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$ ist.

§. 503. **Bemerkung.** Die in dieser Gleichung enthaltenen Curven sind von verschiedener Art, je nachdem m und n beide ungerade Zahlen sind, oder m eine gerade Zahl und n eine ungerade Zahl ist, oder m ungerade und n gerade ist. Diese Verschiedenheit wollen wir zunächst ins Auge fassen.

§. 504. **Lehrsatz.** Wenn in der Gleichung $x^{\frac{m}{n}} + z^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$, m und n ungerade Zahlen sind, so hat die durch diese Gleichung ausgedrückte Curve zwei unendliche Aeste.

Beweis. Um jene Zahlen als ungerade auszudrücken, will ich $m = 2p + 1$, $n = 2q + 1$ setzen, dann ist $z^{2p+1} = \left(a^{\frac{2p+1}{2q+1}} - x^{\frac{2p+1}{2q+1}}\right)^{2q+1}$ und es ist $z = a$, wenn $x = o$, ferner $z = o$, wenn $x = +a$ ist. Wird $x > +a$, so wird $a^{\frac{2p+1}{2q+1}} - x^{\frac{2p+1}{2q+1}}$ negativ, also auch die $(2q+1)^{\text{te}}$ Potenz dieser Grösse und endlich die $(2p+1)^{\text{te}}$ Wurzel aus derselben, also z negativ und immerfort wachsend. Es liegt daher an der Seite, wo die Abscissen positiv sind, ein un-

endlicher Ast, welcher sich an der negativen Seite der Abscissenlinie fort erstreckt. Für negative x wird auch $x^{\frac{2p+1}{2q+1}}$ negativ, also $z^{\frac{2p+1}{2q+1}}$ der Summe beider Glieder gleich und $z > a$.

§. 505. Beispiele. $z + x = a$ ist die Gleichung für die gerade Linie, die sich auf die angegebne Weise fort erstreckt (Fig. 137.), wo $AB = AC = a$ ist. Die Gleichung $z^3 + x^3 = a^3$ gehört einer Linie der dritten Ordnung, deren eine Asymptote durch die Gleichung $x + z = o$ dargestellt wird (Fig. 138.).

Die Gleichung $x^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}$ giebt, wenn man sie zur dritten Potenz erhebt $x + z + 3x^{\frac{1}{3}} . z^{\frac{1}{3}} (x^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{3}}) = a$, oder

$$x + z - a = 3x^{\frac{1}{3}} . z^{\frac{1}{3}} . a^{\frac{1}{3}},$$

und folglich $x^3 + 3x^2 z + 3z^2 x + z^3 - 3ax^2 - 6axz - 3az^2 + 3a^2 x + 3a^2 z - a^3 = 27xza$,

oder $(x + z)^3 - 3a(x + z)^2 - 27xza + 3a^2(x + z) - a^3 = o$, wo das höchste Glied drei gleiche Factoren hat, die im nächsten Gliede nicht vorkommen, also (§. 351.) die Curve (Fig. 139.) eine parabolische Asymptote haben muss, deren Gleichung $(x + z)^3 = \lambda x^2$ ist, oder hier $(x + z)^3 = 27ax^2$.

§. 506. Lehrsatz. Wenn in der Gleichung $x^{\frac{m}{n}} + z^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$, m eine gerade Zahl und n eine ungerade Zahl ist, so ist die Curve in einen endlichen Raum eingeschlossen, indem $x = \pm a$ und $z = \pm a$ die äussersten Werthe der Coordinaten sind. Die Curve besteht alsdann aus vier ganz gleichen Quadranten.

Beweis. Dieser Fall wird durch $x^{\frac{2p}{2q+1}} + z^{\frac{2p}{2q+1}} = a^{\frac{2p}{2q+1}}$ dargestellt, und giebt $z^p = \pm \sqrt{\left\{a^{\frac{2p}{2q+1}} - x^{\frac{2p}{2q+1}}\right\}^{2q+1}}$, so dass z allemal zwei gleiche entgegengesetzte Werthe für ein gegebnes x erhält. Diese können nie grösser als a werden, da x^{2p} allemal positiv ist. Eben das lässt sich für x zeigen. Dass die vier Quadranten genau gleich sind, erhellt ebenfalls aus den doppelten entgegengesetzten Werthen der Wurzel.

§. 507. Beispiele. 1. Der Kreis gehört hierher.

2. Die Gleichung $x^4 + z^4 = a^4$ giebt die in Fig. 140. dargestellte Curve.

3. Die Gleichung $x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ giebt $x^2 + z^2 + 3x^{\frac{2}{3}} . z^{\frac{2}{3}} . a^{\frac{2}{3}} = a^2$, oder $(x^2 + z^2)^3 - 3a^2(x^2 + z^2)^2 + 3a^4(x^2 + z^2) - a^6 = 27x^2 . z^2 . a^2$, eine Curve der sechsten Ordnung, deren höchstes Glied keinen möglichen Factor enthält. Fig. 141.

§. 508. Lehrsatz. Ist m ungerade und n gerade, oder $x^{\frac{2p+1}{2q}} + z^{\frac{2p+1}{2q}} = a^{\frac{2p+1}{2q}}$, so hat die Curve zwei unendliche Aeste, die sich

über den positiven Abscissen an der positiven Seite der Abscissenlinie hin erstrecken.

Beweis. Zuerst ist wieder für $x = o$, $z = a$ und für $x = a$, $z = o$; aber für $x = a$ erhält z noch den zweiten Werth $= a \,.\, 2^{\frac{2q}{2p+1}}$. Da nämlich für jedes positive x die Grösse $x^{\frac{2p+1}{2q}}$ einen doppelten Werth erhält, so ist

$$z^{\frac{2p+1}{2q}} = \text{entweder } a^{\frac{2p+1}{2q}} - x^{\frac{2p+1}{2q}}$$
$$\text{oder } a^{\frac{2p+1}{2q}} + x^{\frac{2p+1}{2q}},$$

und an der positiven Seite der Abscissenlinie erstrecken sich also zwei Aeste der Curve über den positiven Abscissen fort. Für negative x ist $x^{\frac{2p+1}{2q}}$ unmöglich, also giebt es da keine Werthe für z.

§. 509. **Beispiele.** $x^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$
giebt $x + z - a = -2x^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}$,
oder $x^2 - 2xz + z^2 - 2a(x + z) + a^2 = o$.
Da das höchste Glied zwei gleiche Factoren enthält, die im folgenden Gliede nicht vorkommen, so müsste die Curve (nach §. 340.) eine Parabel der zweiten Ordnung zur Asymptote haben; hier ist die Curve diese Parabel selbst. Ihre Axe ist unter einem Winkel von 45 Graden gegen die Abscissenlinie geneigt; denn wenn man Abscissen auf einer so geneigten Linie $= u$ und Ordinate v senkrecht darauf nimmt, so wird (§. 19.)

$$x = \frac{(u - v)}{\sqrt{2}} \text{ und } z = \frac{(u + v)}{\sqrt{2}}$$
$$z - x = v \,.\, \sqrt{2};\; x + z = u \,.\, \sqrt{2},$$

also die Gleichung für unsre Curve

$$(x - z)^2 - 2a(x + z) + a^2 = o$$

geht über in $2v^2 - 2ua\sqrt{2} + a^2 = o$
oder in $v^2 = au \,.\, \sqrt{2} - \tfrac{1}{2} a^2$,
oder $v^2 = a\sqrt{2}\left(u - \frac{a}{2\sqrt{2}}\right)$, und der Scheitel der Parabel liegt da, wo $u = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ ist und $v = o$, oder wo $x = z = \tfrac{1}{4} a$ ist.

2. Die in der Gleichung $z^{\frac{5}{4}} + x^{\frac{5}{4}} = a^{\frac{5}{4}}$ enthaltene Curve stellt Fig. 142. dar. Obgleich die Gleichung sich nicht gut rational machen lässt, so kann man doch leicht zeigen, dass ihre beiden Aeste sich nahe an die durch C unter dem Winkel von 45 Grad geneigt gezogne Linie CU anschliessen werden. Denn

giebt man x einen so grossen Werth, dass man Glieder, wo höhere Potenzen von x im Nenner vorkommen, weglassen darf, so ist

$$z = \sqrt[5]{\left(a^{\frac{5}{4}} - x^{\frac{5}{4}}\right)^4} = \left(a^{\frac{5}{4}} \pm \sqrt{x^{\frac{5}{2}}}\right)^{\frac{4}{5}},$$

$$\text{auch} = \left(x^{\frac{5}{4}} \pm a^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{4}{5}} = x \pm \tfrac{4}{5}\,\frac{a^{\frac{5}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}} - \frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}}{2}\,\frac{a^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}},$$ und es erhellt, dass beide Werthe von z sich dem Werthe $= x$ ohne Ende nähern.

3. Wie dieses mit der Lehre von den Asymptoten zusammen stimme, zeigt sich leichter in der Gleichung $x^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$, die sich leicht auf $(x^3 - z^3)^2 - 2a^3(x^3 + z^3) + a^6 = o$ zurückführen lässt. Diese Gleichung vom sechsten Grade hat im höchsten Gliede den Factor $(x - z)^2$, und die Glieder, worin die fünften und vierten Potenzen vorkommen sollten, fehlen; die Curve gehört also unter die Regel des 344. §., wozu Fig. 118. ein Beispiel gab.

§. 510. Lehrsatz. Wenn $\frac{m}{n}$ kleiner als 1 ist, so wird die Curve da gegen die Abscissenlinie, auf welcher die x genommen sind, senkrecht, wo $x = o$ ist, und da mit der Abscissenlinie parallel, wo $x = a$ und $z = o$ ist; dagegen wenn $\frac{m}{n} > 1$, so ist die Curve da, wo $x = o$, mit der Abscissenlinie parallel, und da, wo $z = o$, auf sie senkrecht.

Beweis. Wenn man $x + \Delta x$ statt x, und $z + \Delta z$ statt z schreibt, so giebt die Entwickelung der ersten Glieder

$$\left.\begin{array}{l} x^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}\, x^{\frac{m}{n}-1} . \Delta x + \frac{\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1\cdot 2}\, x^{\frac{m}{n}-2} (\Delta x)^2 + + \\ + z^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}\, z^{\frac{m}{n}-1} . \Delta z + \frac{\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1\cdot 2}\, z^{\frac{m}{n}-2} (\Delta z)^2 + \end{array}\right\} = a^{\frac{m}{n}},$$

also, da $x^{\frac{m}{n}} + z^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$ sich aufheben, wenn man nur das erste Glied der Differenzreihe zu Bestimmung der Tangente beibehält,

$$x^{\frac{m}{n}-1} . \Delta x = - z^{\frac{m}{n}-1} . \Delta z,$$

$$\text{oder } \frac{dz}{dx} = -\left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{m-n}{n}}.$$

Hier wird also $\frac{dz}{dx}$ oder der Werth für die trigonometrische Tangente des Winkels, unter welchem die Berührungslinie gegen die Abscissenlinie geneigt ist, $= o$, wenn zugleich $m > n$ und $x = o$,
oder wenn zugleich $m < n$ und $z = o$ ist; dagegen wird

$\frac{dz}{dx} = \infty$ für $m > n$, wenn $z = o$,

für $m < n$, wenn $x = o$ ist.

§. 511. Für $m = n$ ist $\frac{dz}{dx} = -\left(\frac{x}{z}\right)^{o} = -1$, wie es für die gerade Linie, die unter einem Winkel von 45° oder 135° gegen die Abscissenlinie geneigt ist, seyn muss (Fig. 137.).

§. 512. Die Gleichung für die Lage der Berührungslinie zeigt auch, dass diese unter einem Winkel von 45 Graden gegen die Abscissenlinie geneigt ist, wenn $z = x$ wird. Aber da $z^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} - x^{\frac{m}{n}}$, so ist $z = x$, wenn $2x^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$, oder $x = a\sqrt[m]{(\tfrac{1}{2})^{n}}$ wird.

§. 512*. In dem einzelnen Falle, wo $\frac{m}{n} = \frac{2}{3}$ ist, giebt die Tangente eine Merkwürdigkeit. Ziehe ich nämlich an irgend einem Punkt der Curve die Tangente und verlängere sie, bis sie in beide durch den Mittelpunkt C gezogne, auf einander senkrechte Axen einschneidet, so bildet sie die Hypotenuse eines rechtwinklichen Dreiecks, dessen Grundlinie $= x + z \,.\, Cotang\,\varphi$, dessen Hypotenuse also $= Sec\,\varphi\,(x + z\,.\,Cotang\,\varphi)$ ist, wenn ich $\frac{dz}{dx} = tang\,\varphi$ nenne.

Da nun $tang\,\varphi$ hier $= \left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$, so ist $x + z\,.\,Cotang\,\varphi = x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}}\right) = x^{\frac{1}{3}}\,.\,a^{\frac{2}{3}}$,

und $Sec\,\varphi = \frac{\sqrt{\left(x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}}\right)}}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$. Jene Hypotenuse ist also $= a$, mithin immer gleich gross, bei jedem Werthe von x.

Man könnte also die Curve, deren Gleichung $a^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}}$ ist, als diejenige angeben, deren zwischen AD und AF (Fig. 141.) abgeschnittene Tangente immer $= a$ ist.

§. 513. **Lehrsatz.** Die Curve hat in zwei Fällen Spitzen, erstlich wenn $\frac{m}{n}$ kleiner als 1 und m eine gerade Zahl ist; zweitens wenn $\frac{m}{n}$ grösser als 1 und n eine gerade Zahl ist.

Beweis. Da allgemein $\frac{dz}{dx} = -\frac{x^{\frac{m}{n}-1}}{\left(a^{\frac{m}{n}} - x^{\frac{m}{n}}\right)^{1-\frac{n}{m}}}$ war, oder wenn

$\frac{m}{n} < 1$, $\frac{dz}{dx} = -\frac{\left(a^{\frac{m}{n}} - x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{n}{m}-1}}{x^{1-\frac{m}{n}}}$, so erhält für m, gleich einer geraden Zahl, und $\frac{m}{n} < 1$, der Zähler $\left(a^{\frac{m}{n}} - x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{n-m}{m}}$ zwei der Grösse nach gleiche, aber entgegengesetzte Werthe. Jedem x gehören also zwei Berührungslinien zu, die unter Winkeln, welche sich einander zu 180 Grad ergänzen, gegen die Abscissenlinie geneigt sind. Dies findet (Fig. 141.) in A, B und so überall statt. Da für $x = a$ und $\frac{m}{n} < 1$, diese beiden Berührungslinien in D mit der Abscissenlinie zusammenfallen, so berührt diese dort zwei Zweige der Curve, und eben das findet da statt, wo $x = -a$, und $z = \pm a$ ist.

Wenn $\frac{m}{n} > 1$ ist, so giebt $\frac{dz}{dx} = -\frac{x^{\frac{m}{n}-1}}{\left(a^{\frac{m}{n}} - x^{\frac{m}{n}}\right)^{1-\frac{m}{n}}}$ doppelte Werthe, wenn n eine gerade Zahl ist; diese sind aber nicht an Grösse gleich, sondern jedem x gehört $-\frac{x^{\frac{m-n}{n}}}{\left(a^{\frac{m}{n}} - x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{m-n}{m}}}$, als der eine

und $+\frac{x^{\frac{m-n}{n}}}{\left(a^{\frac{m}{n}} + x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{m-n}{m}}}$, als der andere Werth von $\frac{dz}{dx}$ zu.

Beide Werthe werden gleich für $x = o$, wo die Berührungslinie mit der Abscissenlinie parallel ist, und da also ist eine Spitze. Eben das würde sich für $z = o$ zeigen lassen, wenn man alles durch z ausdrückte. Die Curve hat also zwei Spitzen.

§. 514. In andern Fällen kommen keine Spitzen oder doppelten Punkte vor. Wenn die Zahlen m und n beide ungerade sind, so hat die Ordinate immer nur einen Werth, §. 504., und es giebt also keine doppelten Punkte. Ist m eine gerade Zahl, aber grösser als n, so durchschneidet die Curve die Abscissenlinie und auch die durch den Nullpunkt senkrecht gegen sie gezogne Linie senkrecht, und es kann für $x = o$ oder $z = o$ keinen doppelten Punkt geben; an andern Stellen der Curve findet es gewiss nicht statt, weil da die beiden Werthe der Ordinate nothwendig ungleich sind.

Eine ganz ähnliche Betrachtung zeigt, dass keine doppelten Punkte vor-

kommen, wenn n eine gerade Zahl und zugleich grösser als m ist; denn an andern Stellen, als da, wo entweder $x = o$ oder $z = o$ ist, könnte es nicht statt finden; da aber wird die Ordinate, deren zwei Werthe zusammenfallen, eine Tangente.

§. 515. Lehrsatz. In allen unsern Curven ist da, wo $x = z$ wird, oder der vom Anfangspunkte an die Curve gezogne Radius unter 45 Grad gegen die Abscissenlinie geneigt ist, die Berührungslinie der Curve senkrecht auf diesem Radius; und da dieser zugleich für $\frac{m}{n}$ kleiner als 2, kleiner als a, für $\frac{m}{n}$ grösser als 2, aber grösser als a ist, so hat der Radius in diesem Punkte erstlich seinen kleinsten Werth, wenn $\frac{m}{n} < 2$ ist, und zweitens entweder seinen grössten Werth, oder doch einen grössern Werth als in den benachbarten Punkten, wenn $\frac{m}{n} > 2$ ist.

Beweis. Da (§. 512.) für $x = z$ der Winkel, welchen die Berührungslinie mit der Abscissenlinie macht, 45 Grad beträgt, und eben so gross der Winkel ist, unter welchem der Radius CE (Fig. 141.) gegen die Abscissenlinie geneigt ist, so sind diese beiden Linien auf einander senkrecht, oder dieser Radius trifft die Curve in E senkrecht.

Da, wo dies der Fall ist, hat der vom Mittelpunkte an gegen irgend einen Punkt der Curve gezogne Radius entweder einen grössern oder einen kleinern Werth als in den benachbarten Punkten. Es ist aber der Radius CE, für welchen $x = z$ ist $= \sqrt{(x^2 + z^2)} = x \,.\, \sqrt{2}$; oder da x in diesem Punkte (§. 512.) $= a\,(\tfrac{1}{2})^{\frac{n}{m}}$, so ist $r = a \,.\, 2^{\frac{1}{2}} \,.\, (\tfrac{1}{2})^{\frac{n}{m}} = a \,.\, 2^{\frac{1}{2}} \,.\, 2^{-\frac{n}{m}} = a \,.\, 2^{\frac{1 - \frac{2n}{m}}{2}}$. Nun ist $\sqrt[2]{(2)}^{\,1 - \frac{2n}{m}}$ grösser als 1, so lange $1 - \frac{2n}{m}$ einen positiven Werth erhält, aber kleiner als 1, wenn $1 - \frac{2n}{m}$ eine negative Potenz bezeichnet, oder $r = a \,.\, \sqrt[2]{(\tfrac{1}{2})}^{\,\frac{2n}{m} - 1}$ ist. Es wird also jener Radius $> a$, das ist grösser als CD, wenn $\frac{2n}{m} < 1$ oder $\frac{m}{n} > 2$ ist, dagegen jener Radius kleiner als CD, wenn $\frac{m}{n} < 2$ ist.

Für $\frac{m}{n} < 2$ ist dieser Radius der kleinste, der überhaupt vorkömmt, oder E der Punkt der Curve, welcher dem Centro am nächsten ist; für

$\frac{m}{n} > 2$ ist zwar CE, wie in Fig. 142. nicht nothwendig der grösseste unter allen, aber grösser als die benachbarten Radien ist er dennoch, und er ist der grösseste unter allen, wie in Fig. 140., wenn die Curve keine unendlichen Aeste hat.

§. 516. Zieht man (Fig. 141.) die gerade Linie FD, so liegt der Bogen FED ganz innerhalb derselben, wenn $\frac{m}{n} < 1$ ist; beschreibt man mit dem Halbmesser $CF = CD = a$ die Kreisquadranten FGD, so liegt die Curve zwischen der geraden Linie und dem Kreisbogen, wenn $\frac{m}{n} > 1$ aber < 2 ist; und endlich liegt sie ausserhalb des Kreisbogens, wenn $\frac{m}{n} > 2$ ist.

Da $z = \sqrt[m]{\left(a^{\frac{m}{n}} - x^{\frac{m}{n}}\right)^n}$ ist für die Curve, dagegen die Ordinate $z' = a - x$ ist für die gerade Linie, und die Ordinate $z'' = \sqrt[2]{(a^2 - x^2)}$ für den Kreis, so lässt sich der Beweis leicht führen, indem, so lange $x < a$ ist, $\sqrt[m]{\left(a^{\frac{m}{n}} - x^{\frac{m}{n}}\right)^n}$ desto grösser ist, je grösser die Potenz $\frac{m}{n}$ ist.

Ein vollständiger, durch Entwickelung der Potenzen geführter Beweis würde hier zu weitläufig seyn; aber es erhellt leicht, dass
$\sqrt[3]{(10^3 - 4^3)} > \sqrt[2]{(10^2 - 4^2)}$ ist, und so in allen Fällen.

§. 517. Es lässt sich nun auch leicht zeigen, dass da, wo m eine gerade und n eine ungerade Zahl ist, oder in den Fällen, wo die Curve keine unendlichen Aeste hat, für $x = o$, und $x = \pm a$ grösste oder kleinste Werthe des Radius entstehen, und zwar grösste, wenn $\frac{m}{n} < 2$, kleinste, wenn $\frac{m}{n} > 2$ ist.

§. 518. Diese Bestimmung der Stellen, wo r seine grössten und kleinsten Werthe erhält, lässt sich auch aus der Betrachtung, wie der Radius wächst, wenn x und z sich ändern, ableiten. Indess übergehe ich hier diese Ableitung, um nicht auf allzu weitläuftige Reihen Entwickelungen zu gerathen.

§. 519. Anmerkung. Diese Untersuchungen zeigen wenigstens, wie man auch dann sich über die Beschaffenheit der Curve belehren kann, wenn die Gleichung sich nicht leicht in rationaler Form darstellen lässt.

11. Die Curve, welche man erhält, wenn man auf dem Radius Vector der Parabel immer gleiche Stücke von der Parabel an abschneidet.

§. 520. Aufgabe. Eine Gleichung für diese Curve zu finden.

Auflösung. Wenn man (Fig. 143.) die Parabel AC zeichnet und auf jedem vom Brennpunkte ausgehenden Radius die immer gleiche Linie CD aufträgt, so ist D ein Punkt in unsrer Curve. Heisst also der Winkel $GBC = \psi$, $BC = r$, $CD = b$, so ist $r = \frac{\frac{1}{2}p}{1 - Cos\,\psi}$ (§. 114.), also für unsre Curve der Radius $\varrho = \frac{\frac{1}{2}p}{1 - Cos\,\psi} - b$. Will man eben den Punkt D durch Coordinaten x, z auf einander senkrecht bestimmen und diese von B an gegen G zu rechnen, so ist $\varrho = \sqrt{(x^2 + z^2)}$ und $x = + \varrho \,.\, Cos\,\psi$, also

$\sqrt{(x^2 + z^2)} + b = \frac{\frac{1}{2}p}{1 - \frac{x}{\sqrt{(x^2+z^2)}}}$, oder $\sqrt{(x^2+z^2)} + b - x - \frac{bx}{\sqrt{(x^2+z^2)}} = \frac{1}{2}p$,

oder $x^2 + z^2 + (b - x - \frac{1}{2}p)\sqrt{(x^2 + z^2)} = bx$,

also $(x^2+z^2)^2 - 2bx(x^2+z^2) + b^2x^2 = (x^2+z)(x^2 - 2x(b - \frac{1}{2}p) + (b - \frac{1}{2}p)^2)$,

oder $\left\{ \begin{matrix} z^2(x^2+z^2) - px(x^2+z^2) + bp(x^2+z^2) - \frac{1}{4}p^2(x^2+z^2) \\ - b^2z^2 \end{matrix} \right\} = o$.

§. 521. Lehrsatz. Die Curve ist von der vierten Ordnung und hat eine Parabel der zweiten Ordnung zur Asymptote.

Beweis. Beides erhellt leicht, da die Gleichung von der vierten Ordnung ist, und das höchste Glied zwei gleiche, im nächsten Gliede nicht vorkommende mögliche Factoren enthält (§. 340.).

§. 522. Bemerkung. Um die Curve etwas näher kennen zu lernen, dient die Bestimmung, welche sich aus der rationalen Gleichung leicht ergiebt, dass für $z = o$, $x = b - \frac{1}{4}p$,
und für $x = o$, $z = \pm (b - \frac{1}{2}p)$ sey, was sich auch aus der Construction leicht voraussehen liess. Hätte man dieses Resultat aus der Gleichung

$\sqrt{(x^2 + z^2)} + b = \frac{\frac{1}{2}p}{1 - \frac{x}{\sqrt{(x^2+z^2)}}}$ herleiten wollen, so scheint sich etwas ganz Auffallendes zu ergeben, indem für $z = o$, $x + b = \frac{\frac{1}{2}p}{1 - 1}$ zu werden scheint.

Um dieses zu erklären, müssen wir uns erinnern, dass ϱ ganz gewiss unendlich gross würde, wenn $Cos\,\psi = + 1$ wäre, und dass also in der aus

der Parabel hergeleiteten Construction $Cos\,\psi = \frac{x}{\varrho}$ in diesem Fall $= \frac{\infty}{\infty}$ werden muss; dann aber würde jene Gleichung geben: $\infty + b = \frac{\frac{1}{2} p \cdot \infty}{\infty - \infty}$, wo die Unbestimmtheit deutlich in die Augen fällt. In der Parabel nämlich kann ψ niemals $= o$, also $Cos\,\psi$ niemals $= + 1$ werden; daher, wenn $z = o$ werden soll, sich dies nur auf $Cos\,\psi = - 1$, oder $\frac{x}{\sqrt{(x^2 + z^2)}} = - 1$ beziehen kann. Ist aber dieses gewiss, so wird jene Gleichung $- x + b = \frac{\frac{1}{2} p}{1 + 1}$

$x = b - \frac{1}{4} p$ geben.

Aber dem Werthe $x = o$ entspricht ausserdem auch $z = o$, und wir müssen daher vermuthen, dass entweder die Curve durch den Brennpunkt der Parabel geht, oder dass dieser Punkt ein ihr zugeordneter Punkt sey. Wir werden bald sehen, unter welchen Umständen das eine oder das andere statt findet.

§. 523. Um den Werth von z in jedem Falle auszudrücken, will ich noch die Auflösung der Gleichung in §. 520. hersetzen. Diese Gleichung war

$$z^4 + z^2 (x^2 - p x - (\tfrac{1}{2} p - b)^2) = x^2 (p x + p (\tfrac{1}{4} p - b));$$

ich will darin $\frac{1}{2} p - b = a$ setzen, also

$$z^4 + z^2 (x^2 - p x - a^2) = p x^2 (x + a - \tfrac{1}{4} p), \text{ woraus}$$

$$z^2 = \tfrac{1}{2} (p x + a^2 - x^2) \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{\left\{ \begin{matrix} x^4 + 2 p x^3 - 2 a^2 x^2 + 4 a^4 p x^2 + 2 a^2 p x \\ + a^4 \end{matrix} \right\}}$$

folgt. Das untere Zeichen kann hier nicht gebraucht werden, so lange $x + \frac{1}{4} p - b$ oder $x + a - \frac{1}{4} p$ positiv ist, weil alsdann der rationale Theil weniger als der irrationale beträgt, und daher nur der Werth von z möglich ist, welchen man erhält, indem der rationale Theil positiv genommen wird. Ist also $a > \frac{1}{4} p$, oder, was dasselbe heisst, ist $b < \frac{1}{4} p$, der Abstand der auf dem Radius genommenen Punkte von der Parabel kleiner als der Abstand des Brennpunktes vom Scheitel, so hat für alle positive Werthe von x die Ordinate z nur zwei, einander gleiche, an den verschiedenen Seiten der Hauptaxe liegende Werthe; für negative Werthe von x kann z vier Werthe erhalten, wenn $\frac{1}{4} p - b$ weniger als der negative Werth von x beträgt. Dagegen kann, wenn $b > \frac{1}{4} p$ ist, z sowohl für negative x, als für positive x, so lange die letztern weniger als $b - \frac{1}{4} p$ betragen, vier Werthe erhalten.

Wenn $x = b - \frac{1}{4} p$ ist, so werden zwei Werthe von $z = o$, und die beiden andern sind $z = \pm \sqrt{(p x + a^2 - x^2)}$. Aber noch in einem andern Falle können zwei Werthe von z einander gleich werden, nämlich wenn der irrationale Theil verschwindet, und dies kann für zwei verschiedene Werthe von x statt finden; alsdann wird $z = \pm \sqrt{\{\frac{1}{2} (p x + a^2 - x^2)\}}$, und entweder ist

hier die Ordinate eine Tangente der Curve geworden, oder diese hat hier einen doppelten Punkt.

Die Zeichnung der Curve für die verschiedenen Fälle lässt leicht übersehen, dass es so seyn muss. Denn wenn die auf CB aufgetragene Entfernung (Fig. 143.) bis über B hinaus nach D reicht, so giebt es gewiss noch einen andern Radius BF, auf welchem die gehörig aufgetragene Entfernung einen in derselben Ordinate liegenden Punkt E der Curve giebt. Jenseits G, wo $x > b - \frac{1}{4}p$ ist, kann diess offenbar nicht statt finden.

§. 524. Aufgabe. Die allgemeine Gleichung für die Lage der Berührungslinie zu finden.

Auflösung. Die Gleichung in §. 520.

$$z^4 + z^2 x^2 - p x^3 - p z^2 x + p x^2 (b - \tfrac{1}{4} p) - (b - \tfrac{1}{2} p)^2 z^2 = o, \text{ oder}$$

$$z^4 + z^2 x^2 - p x^3 - p z^2 x + p x^2 (\tfrac{1}{4} p - a) - a^2 z^2 = o, \text{ giebt:}$$

$$\left.\begin{array}{l}
4 z^3 \Delta z + 6 z^2 (\Delta z)^2 + 4 z (\Delta z)^3 + (\Delta z)^4 \\
+ 2 z x^2 \Delta z + x^2 (\Delta z)^2 \\
+ 2 x z^2 \Delta x + 4 x z \Delta x . \Delta z + 2 x \Delta x (\Delta z)^2 \\
\qquad + z^2 (\Delta x)^2 + 2 z \Delta z (\Delta x)^2 + (\Delta z)^2 (\Delta x)^2 \\
- 3 p x^2 \Delta x - 3 p x (\Delta x)^2 - p (\Delta x)^3 \\
- p z^2 \Delta x - 2 p z \Delta x \Delta z \\
- 2 p z x \Delta z - p x (\Delta z)^2 - p \Delta x (\Delta z)^2 \\
+ 2 p x (\tfrac{1}{4} p - a) \Delta x \\
\qquad + p (\Delta x)^2 (\tfrac{1}{4} p - a) \\
- 2 a^2 z \Delta z - a^2 (\Delta z)^2
\end{array}\right\} = o.$$

Und hieraus folgt die Lage der Berührungslinie

$$tang\ \varphi = \frac{dz}{dx} = \frac{2 x z^2 - 3 p x^2 - p z^2 + 2 p x (\tfrac{1}{4} p - a)}{2 a^2 z + 2 p z x - 2 z x^2 - 4 z^3}, \text{ wenn } \varphi \text{ der}$$

Winkel ist, welchen die Berührungslinie mit der Abscissenlinie macht.

§. 525. Da z und x zugleich verschwinden, und indem diess geschieht, Zähler und Nenner des Ausdruckes für $tang\ \varphi$ Null werden, so erhellt, dass da, wo $x = z = o$ ist, ein doppelter Punkt liegt, den wir noch näher betrachten werden. Aber z kann auch $= o$ werden, wenn $x = b - \frac{1}{4} p$ ist, und dann wird $tang\ \varphi = \dfrac{\frac{1}{2} p^2 x - 3 p x^2 - 2 p a x}{o} = \dfrac{x (\frac{1}{4} p^2 - b p)}{o}$. Hier wird also $tang\ \varphi = \infty$, die Berührungslinie senkrecht auf die Axe. Nur wenn $b = \frac{1}{4} p$ ist, käme abermals $\dfrac{o}{o}$.

Der Nenner unsers Bruches wird noch in einem zweiten Fall $= o$, nämlich wenn $a^2 + p x - x^2 = 2 z^2$ ist, das heisst, wenn in §. 523. die Wurzelgrösse verschwindet. Wenn also nicht etwa dieser Werth zugleich den Zähler von $tang\ \varphi$ auf Null bringt, so ist die Berührungslinie hier auf die Hauptaxe

der Parabel senkrecht. Die Stelle, wo diess geschieht, könnte in jedem einzelnen Falle durch Auflösung einer höhern Gleichung gefunden werden; z. B. für $a = b = \frac{1}{4} p$ soll $x^4 + 2px^3 + \frac{7}{8} p^2 x^2 + \frac{1}{8} p^3 x + \frac{1}{256} p^4 = o$ seyn, also muss hier x einen negativen Werth haben und etwas mehr als $x = -0{,}03\, p$ betragen; ein zweiter Werth von x wäre wohl möglich, aber giebt keinen möglichen Werth für z.

§. 526. Parallel mit der Hauptaxe der Parabel wird die Berührungslinie, wenn $tang\, \varphi = o$, oder $z^2 = \frac{3px^2 - \frac{1}{2}p^2 x + 2pax}{2x - p}$ ist. Diesen Werth müsste man mit dem allgemeinen Werthe von z^2 vergleichen und so den bestimmten Werth von x herleiten, welcher jener Berührungslinie zugehört. Das würde im Allgemeinen auf eine Gleichung vom fünften Grade führen, die jedoch in manchen Fällen einfacher wird. Allgemein nämlich wäre

$$z^2 = \frac{3px^2 - (\frac{1}{2}p^2 - 2pa)x}{2x - p} = \frac{1}{2}px + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}x^2 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\{x^4 + 2px^3 + (4ap - 2a^2)x^2 + 2a^2 px + a^4\}}$$

oder $x^3 + \frac{3}{2}px^2 + (2p - a)ax + \frac{1}{2}a^2 p = \pm (x - \frac{1}{2}p) \sqrt{\{x^4 + 2px^3 + 2ax^2(2p - a) + 2a^2 px + a^4\}}$,

die sich leicht weiter entwickeln liesse. Nimmt man aber als einzelnes Beispiel, $b = \frac{1}{2}p$ oder $a = o$, so giebt sie $x^3 + \frac{3}{2}px^2 = \pm (x - \frac{1}{2}p) \sqrt{\{x^4 + 2px^3\}}$,

oder $x^2 (x + \frac{3}{2}p)^2 = (x - \frac{1}{2}p^2)(x^2 + 2px)$,

das ist $2x^2 + 4px - \frac{1}{2}p^2 = o$,

$$x = -p \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot p.$$

Dieser anscheinend doppelte Werth für x giebt gleichwohl nur einen Punkt, wo die Berührungslinie mit der Abscissenlinie parallel ist; denn ein negatives x würde den Werth von $z^2 = \frac{3px^2 - \frac{1}{2}p^2 x}{2x - p}$ negativ, mithin z unmöglich geben.

§. 527. Um die Punkte näher kennen zu lernen, wo $tang\, \varphi = \frac{o}{o}$ wird, wollen wir zuerst den Fall betrachten, da $z = x = o$ wird. Da alsdann alle Glieder, in welchen die ersten Potenzen der Differenzen vorkommen, verschwinden, und von denen, welche $(\Delta x)^2$, $(\Delta z)^2$ enthalten, nur $p(\frac{1}{4}p - a)(\Delta x)^2 - a^2 (\Delta z)^2$ übrig bleiben, so wird $\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2 = tang^2 \varphi = \frac{p(\frac{1}{4}p - a)}{a^2}$. Es erhält also $tang\, \varphi$ einen unmöglichen Werth, wenn $a > \frac{1}{4}p$, oder $b < \frac{1}{4}p$ ist; alsdann hat also der Brennpunkt der Parabel die Natur eines zugeordneten Punktes, indem er mit durch die Gleichung für die

Curve als zu ihr gehörend angegeben wird, ohne dass ein fortgehender Zweig der Curve durch ihn ginge. Ist $b = \frac{1}{4} p$, wie Fig. 144., so ist an dieser Stelle $\varphi = o$ oder $\varphi = 180^\circ$, $tang\ \varphi = \pm o$, das heisst, bei B bildet sich eine Spitze, und die Hauptaxe berührt beide Zweige der Curve. Wenn dagegen $b > \frac{1}{4} p$, oder $a < \frac{1}{4} p$ ist, so entsteht fast in allen Fällen bei B ein Knoten (Fig. 145. 146.); eine Ausnahme macht nur der Fall, wo $b = \frac{1}{2} p$, $a = o$ ist, indem da beide Werthe der Tangente unendlich werden, also beide durch B gehende Zweige der Curve sich an die senkrechte Berührungslinie anschliessen. Diese müssen beide an der Seite von B (Fig. 143.) liegen, wo z positiv ist, weil für negative x unfehlbar z unmöglich wird; hier liegt also das Oval GB, als in B berührend, unmittelbar an dem dasselbe umfassenden Theile KB der Curve an.

Es kann aber noch in einem andern Falle ein doppelter Punkt vorkommen. Da nämlich der Nenner des Werthes von $tang\ \varphi$ auch verschwindet, wenn $z^2 = \frac{1}{2}(p x + a^2 - x^2)$ ist, und dieser Fall da eintritt, wo in §. 523. die irrationale Grösse verschwindet, so könnte auch da ein doppelter Punkt angedeutet werden, wenn der Zähler des Werthes von $tang\ \varphi$ dann auch verschwände. Der Zähler $z^2(2x - p) + px(\frac{1}{2} p - 2a - 3x)$ wird aber, wenn

$$z^2 = \tfrac{1}{2}(p x + a^2 - x^2) \text{ ist,}$$

$$= - x^3 - \tfrac{3}{2} p x^2 + (a^2 - 2ap)\, x - \tfrac{1}{2} p a^2 = o,$$

und da, wo dieser zugleich mit $x^4 + 2px^3 - 2ax^2(a - 2p) + 2a^2px + a^4 = o$ bestehen kann, da giebt es einen doppelten Punkt. Da aber

$$x^3 + \tfrac{3}{2} p x^2 - a x(a - 2p) + \tfrac{1}{2} p a^2 = o,$$

auch giebt $(x + a)(x^2 + (\frac{3}{2} p - a)x + \frac{1}{2} ap) = o$,
und da $x^4 + 2px^3 - 2a^2x^2 + 4apx^2 + 2a^2px + a^4 = o$,
auch giebt $(x^2 - a^2)^2 + 2px(x + a)^2 = o$,
oder $(x + a)^2 \{(x - a)^2 + 2px\} = o$,
so ist allemal $x = - a$ eine Wurzel beider Gleichungen, und es liegt allemal da ein Knoten, wo $x = - a$, und $z^2 = - \frac{1}{2} pa$ ist, wo dann auch sogleich erhellt, dass a nothwendig negativ oder $b > \frac{1}{2} p$ seyn muss, wenn ein Knoten entstehen soll. Dann also wird das erste Glied der Gleichung, welche zwischen Δx, Δz gefunden ist, völlig $= o$, das Glied aber, welches die zweiten Potenzen oder Producte dieser Differenzen enthält, wird aus folgenden Gliedern bestehen:

$$\begin{aligned} &(6z^2 + x^2 - px - a^2)(\Delta z)^2 &&= -\, 2pa(\Delta z)^2 \\ &+ (4xz - 2pz)\,\Delta x\, \Delta z &&= -\, 2z(2a + p)\,\Delta z\, \Delta x \\ &+ (z^2 - 3px + \tfrac{1}{4} p^2 - ap)(\Delta x)^2 &&= (+ \tfrac{3}{2} pa + \tfrac{1}{4} p^2)(\Delta x)^2; \end{aligned}$$

also wird sie, wenn ich $a = - c$ setze, geben:

$$a = 2pc(\Delta z)^2 + (2c - p)\sqrt{2pc}\, \Delta x\, \Delta z + (\tfrac{1}{4} p^2 - \tfrac{3}{2} pc)(\Delta x)^2,$$

oder $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\frac{1}{2} p - c}{\sqrt{2pc}} \pm \sqrt{\left\{\dfrac{\frac{1}{2} pc + c^2}{2pc}\right\}}$,

als allgemeiner Ausdruck für $tang\ \varphi$ an dieser Stelle.

§. 528. Der eben gefundene Punkt könnte auch durch Construction gefunden werden. Zieht man nämlich (Fig. 146.) durch diesen Punkt L und den Brennpunkt die gerade Linie LB und verlängert sie, bis sie die Parabel zweimal schneidet, so ist offenbar $KL = LI = b$. Da nun, wenn man die drei Ordinaten KP, LN, IO zieht, und die mittlere bis an die Parabel verlängert, zugleich aber den Radius BM zieht, nach §. 114.,

$$BM = RN + RB = x + \tfrac{1}{2} p,$$
$$BK = RP + RB = x + b \, Cos\, KBP + \tfrac{1}{2} p,$$
$$BI = RO + RB = x - b \, Cos\, KBP + \tfrac{1}{2} p,$$

also $BK + BI = 2x + p$ und zugleich hier $= 2b$ ist, so muss für den Durchschnittspunkt L, $x = b - \frac{1}{2} p = - a$ seyn.

§. 529. Bemerkung. Da zuweilen Fälle vorkommen, wo man Linien zu ziehen wünscht, welche von andern gegebenen gleich weit abstehen, (Woltman's Beiträge zur hydraulischen Architectur. Band 2. S. 32.), so könnte man für die Parabel diese Curve, als dem Zwecke nahe kommend, anwenden, da ihre Natur leichter durch eine Gleichung darzustellen ist als die Natur der Curve, auf welche wir jetzt kommen wollen.

12. Die Curve, welche in jedem Punkte der Parabel von dieser gleich weit entfernt ist.

§. 530. Aufgabe. Es ist eine Parabel (Fig. 147.) ABC gezeichnet, und auf der an irgend einen Punkt B gezognen Normallinie BD die Entfernung $BE = a$ aufgetragen, man sucht eine allgemeine Gleichung für die Lage des Punktes E.

Auflösung. Es sey $AF = x$, $FB = z$, der Parameter $= p$, so ist bekanntlich (§. 147.) $FD = \frac{1}{2} p$, $BD = \sqrt{(\frac{1}{4} p^2 + z^2)}$. Ist also $BE = a$, und der Punkt E durch die senkrechten Coordinaten $AU = u$, $UE = v$ bestimmt, so haben wir $u = x + \dfrac{\frac{1}{2} p \,.\, a}{\sqrt{(\frac{1}{4} p^2 + z^2)}} = \dfrac{z^2}{p} + \dfrac{\frac{1}{2} p\, a}{\sqrt{(\frac{1}{4} p^2 + z^2)}}$

$$\text{und } v = \frac{z\,(\sqrt{(\frac{1}{4} p^2 + z^2)} - a)}{\sqrt{(\frac{1}{4} p^2 + z^2)}} = z - \frac{a\, z}{\sqrt{(\frac{1}{4} p^2 + z^2)}}.$$

Diese Gleichungen sind hinreichend, um für jedes bestimmte z die zusammen gehörigen u und v zu finden.

Die 147. Figur stellt mehrere solche Curven in verschiedenen Abständen MEL, NOP, HIG, RKQ dar.

§. 531. Wollte man z eliminiren, so ergäbe sich zuerst

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4} p^2 + z^2)} = \frac{a\, z}{z - v},$$

also $u = \frac{z^2}{p} + \frac{\frac{1}{2} p (z - v)}{z} = \frac{z^3 + \frac{1}{2} p^2 z - \frac{1}{2} p^2 v}{p z}$, woraus z durch p, u, v bestimmt werden kann.

Da wir so die zwei Gleichungen haben,

$\frac{1}{4} p^2 + z^2 = \frac{a^2 z^2}{(z - v)^2}$ oder $z^4 - 2 z^3 v + z^2 (\frac{1}{4} p^2 - a^2 + v^2) - \frac{1}{2} p^2 v z + \frac{1}{4} p^2 v^2 = 0$

und

$u p z = z^3 + \frac{1}{2} p^2 z - \frac{1}{2} p^2 v$ od. $z^4 \qquad + z^2 (\frac{1}{2} p^2 - u p) \quad - \frac{1}{2} p^2 v z \qquad = 0$,

so folgt nun — — — $+ 2 z^3 v + z^2 (\frac{1}{4} p^2 - u p + a^2 - v^2) - \frac{1}{4} p^2 v^2 = 0$,

und aus der zweiten $2 z^3 v \qquad + z (p^2 v - 2 u v p) - p^2 v^2 = 0$;

also $z^2 (\frac{1}{4} p^2 - u p + a^2 - v^2) - z (p^2 v - 2 u v p) + \frac{3}{4} p^2 v^2 = 0$.

Daraus aber wird

$$z = \frac{\frac{1}{2} p^2 v - u v p}{\frac{1}{4} p^2 - u p + a^2 - v^2} \pm \frac{\sqrt{\{-\frac{3}{4} p^2 v^2 (\frac{1}{4} p^2 - u p + a^2 - v^2) + \frac{1}{4} p^4 v^2 - u v^2 p^3 + u^2 v^2 p^2\}}}{\frac{1}{4} p^2 - u p + a^2 - v^2}$$

$$z = \frac{\frac{1}{2} p^2 v - u v p \pm \sqrt{\{\frac{1}{16} p^4 v^2 - \frac{1}{4} u p^3 v^2 - \frac{3}{4} a^2 p^2 v^2 + \frac{3}{4} p^2 v^4 + u^2 v^2 p^2\}}}{\frac{1}{4} p^2 - u p + a^2 - v^2}.$$

Diesen Werth von z müsste man in eine der zuerst gefundenen Gleichungen setzen, um eine Gleichung zwischen u und v zu erhalten.

§. 532. Aufgabe. Den Abstand jedes Punktes der Curve vom Brennpunkte der Parabel zu finden.

Auflösung. Dieser Abstand $= \varrho$ ist $= \sqrt{(v^2 + (u - \frac{1}{4} p)^2)}$,

$$\text{also } \varrho^2 = z^2 + \left(\frac{z^2}{p} - \frac{1}{4} p\right)^2 + \frac{a^2 z^2 + \frac{1}{4} p^2 a^2}{\frac{1}{4} p^2 + z^2} + \frac{p a \left(\frac{z^2}{p} - \frac{1}{4} p\right) - 2 a z^2}{\sqrt{(\frac{1}{4} p^2 + z^2)}},$$

$$\text{oder } \varrho^2 = \frac{z^4}{p^2} + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{16} p^2 + a^2 - \frac{a (z^2 + \frac{1}{4} p^2)}{\sqrt{(z^2 + \frac{1}{4} p^2)}},$$

$$\text{oder } \varrho^2 = \left(\frac{z^2}{p} + \frac{1}{4} p\right)^2 + a^2 - a \sqrt{(z^2 + \frac{1}{4} p^2)},$$

oder kürzer, wenn ich die Normallinie

$\sqrt{(z^2 + \frac{1}{4} p^2)} = N$ setze,

$$\varrho^2 = \frac{N^4}{p^2} - a N + a^2.$$

§. 533. Der Radius ϱ, welcher vom Brennpunkte der Parabel ausgeht, ist gegen die Hauptaxe unter einem Winkel geneigt, dessen Tangente $= \frac{v}{u - \frac{1}{4} p}$ ist; setze ich ihn $= \psi$, so ist

$$\text{tang } \psi = \frac{z (N - a)}{\left(\frac{z^2}{p} - \frac{1}{4} p\right) N + \frac{1}{2} p a},$$

oder, da $z^2 = N^2 - \frac{1}{4}p^2$ ist,

$$tang\,\psi = \frac{(N - a)\sqrt{(N^2 - \frac{1}{4}p^2)}}{\left(\frac{N^2}{p} - \frac{1}{2}p\right)N + \frac{1}{2}p\,a}.$$

Auch zwischen ψ und ρ findet sich also keine bequeme Gleichung.

§. 534. Wollte man jedes Punktes Abstand vom Scheitel bestimmen, so wäre di- -er $= \sqrt{(u^2 + v^2)}$, oder sein Quadrat $= \frac{z^4}{p^2} + z^2 - \frac{a\,z^2}{\sqrt{(z^2 + \frac{1}{4}p^2)}} + a^2$.

§. 535. Aufgabe. Die Punkte zu finden, wo unsre Curve die Hauptaxe der Parabel schneidet.

Auflösung. Wo dies geschieht, ist $v = o$, also entweder $z = o$, oder $a = \sqrt{(z^2 + \frac{1}{4}p^2)} = N$. Das erstere giebt $u = a$; das letztere

$$u = \frac{z^2}{p} + \frac{1}{2}p = \frac{a^2 + \frac{1}{4}p^2}{p}.$$

Der letztere Durchschnittspunkt der Curve mit der Axe ist vom Brennpunkte um den Abstand $= \frac{a^2}{p}$ entfernt, oder dieser Abstand ist die dritte Proportionallinie zu p und a.

§. 536. Es lässt sich leicht übersehen, dass ein solcher zweiter Einschnittspunkt nur vorkommen kann, wenn a grösser als die Normallinie werden kann; nun aber kann N nie kleiner als $\frac{1}{2}p$ werden: wenn also $a > \frac{1}{2}p$, so giebt es keinen solchen zweiten Durchschnittspunkt. Unsre Gleichungen zeigen diess dadurch an, dass sie diesen Punkt durch $a^2 = z^2 + \frac{1}{4}p^2$ bestimmen, also für ihn $z^2 = a^2 - \frac{1}{4}p^2$ angeben, welches unmöglich wird für $a < \frac{1}{2}p$.

§. 537. Der Punkt, wo $v = o$ und $u = \frac{a^2}{p} + \frac{1}{4}p$ ist, muss ein doppelter Punkt seyn; denn er entspricht sowohl dem positiven Werthe $z = +\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}p^2)}$, als dem negativen Werthe $z = -\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}p^2)}$.

§. 538. Bemerkung. Die Betrachtungen im 531. §. zeigen, dass man auf eine Gleichung von sehr hohem Grade geführt würde, wenn man z eliminiren und die Gleichung zwischen u und v rational darstellen wollte; es ist daher nothwendig, die Eigenschaften unsrer Curve, so weit es möglich ist, aus den beiden Gleichungen $u = \frac{z^2}{p} + \frac{\frac{1}{2}p\,a}{\sqrt{(z^2 + \frac{1}{4}p^2)}}$,

$$v = z - \frac{a\,z}{\sqrt{(z^2 + \frac{1}{4}p^2)}}$$ herzuleiten.

§. 539. Aufgabe. Die Gestalt der unendlichen Aeste unsrer Curve zu bestimmen.

Auflösung. Um einen sehr entfernten Punkt unsrer Curve zu erhal-

ten, müssen wir offenbar auch z sehr gross annehmen, und für diesen Fall die Werthe von u und v entwickeln. Diese werden $u = \frac{z^2}{p} + \frac{pa}{2z}$ und $v = z - a + \frac{\frac{1}{8} a p^2}{z^2}$.

Behält man bloss $v = z - a$ oder $z = v + a$, so ist $u = \frac{v^2}{p} + \frac{2av}{p} + \frac{a^2}{p} + \frac{\frac{1}{2} p a}{v}$, oder $pu = (v + a)^2$, das heisst, je weiter man fortgeht, desto mehr kömmt die zu u gehörige, um a vergrösserte Ordinate v mit der Ordinate einer Parabel überein, welche der gegebnen Parabel gleich ist.

§. 540. **Aufgabe.** Die allgemeine Bestimmung für die Richtung der Berührungslinie zu finden.

Auflösung. Obgleich hier nur u und v durch z oder durch N gegeben sind, so lässt sich die Bestimmung für $\frac{\Delta v}{\Delta u}$ dennoch finden.

Setzt man nämlich $\sqrt{(\frac{1}{4} p^2 + z^2)} = N$, also

$$u = \frac{N^2 - \frac{1}{4} p^2}{p} + \frac{\frac{1}{2} p a}{N}, \text{ und } v = \frac{N - a}{N} \sqrt{(N^2 - \frac{1}{4} p^2)}, \text{ so ist}$$

$$u + \Delta u = \frac{N^2}{p} + \frac{2 N \Delta N}{p} + \frac{(\Delta N)^2}{p}$$
$$- \tfrac{1}{4} p$$
$$+ \frac{\frac{1}{2} p a}{N} - \frac{\frac{1}{2} p a . \Delta N}{N^2} + \frac{\frac{1}{2} p a (\Delta N)^2}{N^3} - \text{etc.}$$

und $v + \Delta v = \left(1 - \frac{a}{N + \Delta N}\right) \sqrt{(z^2 + 2 N \Delta N + (\Delta N)^2)}$, das ist, wenn ich alle Glieder, welche höhere Potenzen von ΔN als die erste enthalten, weglasse, $v + \Delta v = z - \frac{az}{N} + \frac{az \Delta N}{N^2} + \frac{(N - a) . \Delta N}{z}$. Daraus folgt also

$$\frac{dv}{du} = tang\, \varphi = \frac{(az^2 - a N^2 + N^3) p}{z (2 N^3 - \frac{1}{2} p^2 a)} = \frac{(N^3 - \frac{1}{4} p^2 a) p}{2z (N^3 - \frac{1}{4} a p^2)} = \frac{p}{2z}.$$

Die Subtangente verhält sich also zur Ordinate v der Curve, wie $1 : tang\, \varphi = z : \frac{1}{2} p$, oder die Subnormallinie zur Ordinate, wie $\frac{1}{2} p$ zu z, und z bedeutet hier diejenige Ordinate der Parabel, deren Endpunkt mit dem betrachteten Punkte der Curve auf einerlei Normallinie der Parabel liegt.

§. 541. Die Normallinie der Parabel ist also zugleich Normallinie unsrer Curve, weil der Winkel $= 90° - \varphi$, unter welchem die Normallinie unsrer Curve gegen die Hauptaxe geneigt ist, sich eben so findet, wie für den durch z bestimmten Punkt der Parabel.

§. 542. **Lehrsatz.** Wenn $a > \frac{1}{2} p$ ist, also die Curve zweimal die Hauptaxe der Parabel schneidet, so ist zwar für den einen Durchschnittspunkt G (Fig. 147.) die Tangente senkrecht gegen die Hauptaxe, für den andern H dagegen $tang\, \varphi = \frac{p}{2 \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4} p^2)}}$.

Beweis. Für den andern Durchschnittspunkt ist (§. 535.), $N = a$ oder $z^2 = a^2 - \frac{1}{4} p^2$, also $tang\, \varphi$ so bestimmt, wie der Lehrsatz angiebt.

§. 543. Je grösser a ist, desto kleiner wird also in dem Punkte H die Neigung der Berührungslinie gegen die Axe.

§. 544. **Bemerkung.** Obgleich der Ausdruck für $\frac{dv}{du}$ hier niemals die Unbestimmtheit darbietet, welche uns sonst einen doppelten Punkt der Curve anzudeuten pflegt, so kann es dennoch in der Curve doppelte Punkte geben, die nur darum nicht durch das $\frac{0}{0}$ angezeigt werden, weil der im Zähler und Nenner vorkommende verschwindende Factor schon weggeschafft ist.

Um also hier zu untersuchen, ob es in der That solche Spitzen wie I in der einen, K in der andern Curve giebt, müssen wir suchen, ob v irgendwo einen solchen grössten Werth, wie die Figur es andeutet, erreichen kann. Diese Untersuchung wird so angestellt, dass wir bestimmen, wie sich v ändert, wenn z erstlich in $z + \Delta z$ und dann in $z - \Delta z$ übergeht. In den meisten Punkten der Curve nimmt offenbar v mit z zugleich zu, oder es gehört zu
$z - \Delta z$ ein kleinerer Werth von v als zu z, und zu
$z + \Delta z$ ein grösserer Werth von v als zu z. Wofern es aber solche Punkte wie K in der Curve giebt, und man nennt den Werth von z, wozu sie gehören, z', so muss v sowohl für $z' + \Delta z'$, als für $z' - \Delta z'$ einen geringern negativen Werth als für z' haben.

§. 545. **Lehrsatz.** Wenn $a > \frac{1}{2} p$ ist, so erhält v einen solchen grössten Werth, und dieser entspricht demjenigen Punkte der Parabel, dessen Normallinie $= N = \sqrt[3]{(\frac{1}{4} p^2 a)}$ ist.

Beweis. Da $v = z \frac{(N - a)}{N}$ war, so müssen wir bestimmen, was aus diesem Werthe wird, sowohl wenn wir z in $z - \Delta z$, als wenn wir es in $z + \Delta z$ übergehen lassen. Bei diesen veränderten Werthen von z erhält auch N andre Werthe. Da nämlich $N = \sqrt{(z^2 + \frac{1}{4} p^2)}$ ist, so geht N in $N + \Delta N = \sqrt{(z^2 + \frac{1}{4} p^2 + 2 z \Delta z + (\Delta z)^2)}$ über, wenn z den veränderten Werth $z + \Delta z$ erhält, und folglich wird

$$N + \Delta N = \sqrt{\{N^2 + 2 z \Delta z + (\Delta z)^2\}} = N + \frac{z \Delta z}{N} + \frac{\frac{1}{2} (\Delta z)^2}{N} - \frac{\frac{1}{2} z^2 (\Delta z)^2}{N^3};$$

oder $N + \Delta N = N + \frac{z \,.\, \Delta z}{N} + \frac{\frac{1}{8} p^2 (\Delta z)^2}{N^3}$;

und eben so gehört mit $z - \Delta z$ zusammen

$N - \Delta N = N - \frac{z \,.\, \Delta z}{N} + \frac{\frac{1}{8} p^2 (\Delta z)^2}{N^3}$, wenn man die folgenden Glieder weglässt.

Da nun $v = \frac{z(N - a)}{N}$, für $z - \Delta z$ den veränderten Werth

$$v' = (z - \Delta z) \left\{ 1 - \frac{a}{N - \frac{z \,.\, \Delta z}{N} + \frac{p^2 (\Delta z)^2}{8 N^3}} \right\}$$

oder $v' = (z - \Delta z) \left\{ 1 - \frac{a}{N} - \frac{a z \Delta z}{N^3} - \frac{(z^2 - \frac{1}{8} p^2)}{N^5} a (\Delta z)^2 \right\}$,

oder $v' = v - \Delta z \left(1 - \frac{\frac{1}{4} a p^2}{N^3} \right) + \left(\frac{a z}{N^3} - \frac{a z (z^2 - \frac{1}{8} p^2)}{N^5} \right) (\Delta z)^2$ giebt, und eben so aus $z + \Delta z$, der veränderte Werth

$$v'' = v + \Delta z \left(1 - \frac{\frac{1}{4} a p^2}{N^3} \right) + \frac{a z}{N^5} (\tfrac{3}{8} p^2) (\Delta z)^2$$

folgt, so kann allerdings v' sowohl als v'' grösser als v seyn, wenn dasjenige Glied $= o$ ist, worin Δz vorkömmt. Dieses geschieht, wenn $N^3 = \frac{1}{4} a p^2$ ist, und dann wird, wenn man die folgenden Glieder unberücksichtigt lässt,

$$v' = v'' = v + \frac{\frac{3}{2} z (\Delta z)^2}{N^2}.$$

So findet sich also der Ort des grössesten Werthes, den v zwischen zwei benachbarten Werthen von geringerer Grösse erreicht. Der zugehörige Werth von v, welcher im Allgemeinen $= \frac{z(N - a)}{N}$ ist, wird also nun leicht bestimmt, indem $N = \sqrt[3]{(\frac{1}{4} a p^2)}$ ist.

Auch der zugehörige Werth von

$$u = \frac{z^2}{p} + \frac{\frac{1}{2} p a}{N} = \frac{N^2}{p} - \tfrac{1}{4} p + \frac{\frac{1}{2} p a}{N},$$

oder $u = \frac{N^3 + \frac{1}{2} p^2 a}{p N} - \frac{1}{4} p = \frac{\frac{3}{4} a p}{N} - \frac{1}{4} p$ ist zugleich bestimmt.

§. 546. Lehrsatz. Da, wo v den eben gefundenen grössten Werth erhält, hat die Curve einen Rückkehrpunkt oder eine Spitze.

Beweis. Auch u erhält hier eben so wie v einen äussersten Werth, nämlich kleiner, als ihn die beiden zunächst vorangehenden und nachfolgenden Werthe von z ergeben. Aber ein solcher äusserster Werth beider Coordinaten

an demselben Punkte deutet offenbar auf eine Spitze; dass aber u einen solchen äussersten Werth eben hier erhält, zeigt die Bestimmung von $u + \Delta u$ in §. 540. Diese giebt nämlich

$$\text{für } z - \Delta z,\; u' = u - \frac{2(N^3 - \frac{1}{4} p^2 a)}{p N^2} \Delta N + \left(\frac{N^3 + \frac{1}{2} p^2 a}{p N^3}\right)(\Delta N)^2$$

$$\text{und für } z + \Delta z,\; u'' = u + \frac{2(N^3 - \frac{1}{4} p^2 a)\Delta N}{p N^2} + \frac{N^3 + \frac{1}{2} p^2 a}{p N^3}(\Delta N)^2,$$

welches sich leicht weiter entwickeln und auf Δz zurückführen lässt, und offenbar für $N^3 = \frac{1}{4} p^2 a$ das erste Glied der Differenz als $= o$, folglich u' sowohl als u'', grösser als u angiebt.

§. 547. Hier entdeckt sich uns auch, wie wir schon in §. 540. diesen doppelten Punkt hätten erkennen können. Wirklich wurde dort

$$tang\, \varphi = \frac{(N^3 - \frac{1}{4} p^2 a) p}{2z(N^3 - \frac{1}{4} p^2 a)},$$ welches $= \frac{o}{o}$ ist, für den Werth von N, den wir angegeben haben; dort hätte die Entwickelung des zweiten Gliedes uns zu eben der Bestimmung wie hier geführt.

§. 548. So haben wir die wichtigsten Eigenschaften unsrer Curve bestimmt, welche uns als Beispiel dient, wie man da verfahren kann, wo nicht geradezu zwischen den Coordinaten eine bequeme Gleichung dargestellt werden kann, sondern diese beide durch eine dritte Grösse ausgedrückt werden.

Allgemeine Betrachtungen über die *curvas aeque distantes* giebt Kästner in den *Commentationibus soc. reg. Gotting. Vol. XI.*

Vollständigere Belehrung über Curven höherer Ordnungen geben vorzüglich Euler im zweiten Theile der *Introductio in analysin infinitorum;* Cramer in der *analyse des lignes courbes algebriques.* Einzelne Curven betrachtet auch Uhlhorn in seinen Entdeckungen in der höhern Geometrie (Oldenburg, 1809.). Auch Klügels Wörterbuch enthält in den einzelnen hierher gehörigen Artikeln sehr viel Lehrreiches. Viele einzelne hierher gehörige Abhandlungen giebt Reuss *repertorium commentationum a societatibus literariis editarum* an.

Vierzehnter Abschnitt.

Von den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkten zweier Curven, und der Anwendung derselben, um höhere Gleichungen durch Construction aufzulösen.

§. 549. **Bemerkung.** Wenn über derselben Abscissenlinie zwei verschiedene Curven gezeichnet sind, so gehört im Allgemeinen für jede bestimmte Abscisse $= x$, in der einen Curve die Ordinate $= z$, in der andern Curve eine davon verschiedene Ordinate $= z'$. Obgleich aber diess für die meisten Punkte beider Curven gilt, so wird doch für einzelne Punkte auch der Fall eintreten

können, dass $z = z'$ wird. In solchen Punkten treffen beide Curven zusammen, und hier sind also gemeinschaftliche Durchschnittspunkte, wenn nicht etwa die Curven einander hier bloss berühren.

§. 550. Aufgabe. Es sind ein Kreis und eine Parabel durch Gleichungen gegeben, man sucht die Durchschnittspunkte beider Curven.

Auflösungen. Es sey der Parameter der Parabel $= p$, und AB (Fig. 148.) ihre Hauptaxe, die Lage des Kreismittelpunktes C sey durch $AD = a$, $DC = b$ bestimmt, des Kreises Halbmesser $= r$. Heisst nun allgemein $AV = u$, $VW = v$, so ist $v^2 = pu$, dagegen für den Kreis, wenn $VU = z$ heisst, $(z - b)^2 + (u - a)^2 = r^2$. Soll also $v = z$ seyn, so muss, wenn man den Werth $\frac{v^2}{p}$ für u und v für z in die letzte Gleichung setzt,

$$v^2 - 2vb + b^2 + \frac{v^4}{p^2} - \frac{2v^2a}{p} + a^2 = r^2 \text{ seyn,}$$

oder $v^4 + (p^2 - 2ap)\,v^2 - 2bp^2v + p^2(a^2 + b^2 - r^2) = o$.

Die Werthe von v, welche dieser Gleichung Genüge thun, geben die Ordinaten der Durchschnittspunkte beider Curven an, die sich demnach durch Auflösung einer Gleichung vom vierten Grade bestimmen lassen.

§. 551. So wie hier die Auflösung einer Gleichung des vierten Grades gefordert wird, um die Durchschnittspunkte zu berechnen, so könnte man nun auch umgekehrt die Construction der Parabel und des Kreises gebrauchen, um durch Abmessung der Ordinaten ihrer Durchschnittspunkte die Wurzeln der Gleichung anzugeben. Um das zu thun, müssten a, b, p und r die gehörigen Werthe haben, die der gegebnen Gleichung entsprächen.

Dass übrigens unsre eben gefundene Gleichung vom vierten Grade, obgleich ihr das Glied, worin v^3 vorkommen sollte, fehlt, dennoch als auf alle Gleichungen vom vierten Grade anwendbar angesehn werden kann, setze ich als bekannt voraus, weil nämlich aus jeder Gleichung sich jenes zweite Glied wegschaffen lässt *).

*) Ist nämlich $x^4 + fx^3 + gx^2 + hx + k = o$, irgend eine Gleichung des vierten Grades, so erhält man aus ihr einen, der das zweite Glied fehlt, wenn man $x = v - \frac{1}{4}f$ setzt. Diese Substitution giebt

$$\begin{aligned}
x^4 &= v^4 - fv^3 + \tfrac{3}{8}f^2v^2 - \tfrac{1}{16}f^3v + \tfrac{1}{256}f^4 \\
fx^3 &= \phantom{v^4 -{}} fv^3 - \tfrac{3}{4}f^2v^2 + \tfrac{3}{16}f^3v - \tfrac{1}{64}f^4 \\
gx^2 &= \phantom{v^4 - fv^3 - \tfrac{3}{4}f^2v^2{}} gv^2 - \tfrac{1}{2}gfv + \tfrac{1}{16}gf^2 \\
hx &= \phantom{v^4 - fv^3 - \tfrac{3}{4}f^2v^2 - \tfrac{1}{2}gf{}} hv - \tfrac{1}{4}hf \\
k &= \phantom{v^4 - fv^3 - \tfrac{3}{4}f^2v^2 - \tfrac{1}{2}gfv - \tfrac{1}{4}h{}} k
\end{aligned}$$

also nun $0 = v^4 + (g - \frac{3}{8}f^2)v^2 + (h - \frac{1}{2}gf + \frac{1}{8}f^3)v + k - \frac{1}{4}hf + \frac{1}{16}gf^2 - \frac{3}{256}f^4$. eine Gleichung, welcher das zweite Glied fehlt.

§. 552. Aufgabe. Es ist eine Gleichung des vierten Grades, der das zweite Glied fehlt, gegeben; man sucht die Lage und Grösse des Kreises und der Parabel, durch deren Durchschnittspunkte die Wurzeln der Gleichung angegeben werden.

Auflösung. Es sey $x^4 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = o$, die gegebne Gleichung. Damit sie mit der in §. 550. gefundenen

$v^4 + (p^2 - 2ap)\,v^2 - 2bp^2 v + p^2 (a^2 + b^2 - r^2) = o$ einerlei werde, müssen a, b, p und r so bestimmt werden, wie es die gegebnen Grössen α, β, γ fordern; es muss demnach $p^2 - 2ap = \alpha$; $\quad -2bp^2 = \beta$,

$p^2 (a^2 + b^2 - r^2) = \gamma$ seyn.

Da wir nur drei Gleichungen zur Bestimmung der vier unbekannten Grössen haben, so kann eine nach Willkür angenommen werden, und dieses ist auch, da wir eine Einheit, worauf sich die übrigen Linien beziehen müssen, bedürfen, nothwendig. Der Parameter p bleibe also unbestimmt. Dann giebt die zweite Gleichung $\beta = -2bp^2$, $b = -\dfrac{\beta}{2p^2}$; die erste Gleichung $a = \tfrac{1}{2}p - \dfrac{\alpha}{2p}$; die dritte Gleichung $r^2 = \dfrac{-\gamma}{p^2} + a^2 + b^2$.

§. 553. Beispiel. Es sey die Gleichung $x^4 - 5x^2 + 10x - 2 = 0$ gegeben. Dann muss, wenn ich $p = 1$ setze, $b = -\tfrac{1}{2}\beta = -5$; $a = \tfrac{1}{2} - \dfrac{\alpha}{2} = 3$, $r^2 = 2 + 34$; $r = 6$ genommen werden. Die beiden möglichen Wurzeln dieser Gleichung sind $+0{,}225$ und $-2{,}938$ *).

*) Die algebraische Entwickelung der Wurzeln will ich, als Beispiel für Ungeübte, an der positiven Wurzel zeigen. Da $x = 0$ die Summe der vier Glieder $= -2$; dagegen $x = +1$ die Summe der Glieder $= +4$ giebt, so liegt die Wurzel zwischen 0 und $+1$; aber auch $x = 0{,}2$ giebt noch die Summe $= -0{,}1984$, also ist $x > 0{,}2$.

Setze ich $x = 0{,}2 + u$, so ist

$$\begin{aligned}
x^4 &= 0{,}0016 + 0{,}032\,.\,u + 0{,}24\,.\,u^2 + 0{,}8\,.\,u^3 + u^4,\\
-5x^2 &= -0{,}20 \quad - 2{,}0 \quad u - 5, \quad u^2\\
+0x &= +2{,}0 \quad +10,\ldots \quad u\\
-2 &= -2,\\
\hline
0 &= -6{,}1984 + 8{,}032\,.\,u - 4{,}76\,.\,u^2 + 0{,}8\,.\,u^3 + u^4.
\end{aligned}$$

Da die beiden ersten Glieder zeigen, dass u grösser als 0,02 seyn wird, so sey $u = 0{,}02 + v$, und v wird nun nur noch Tausendtel enthalten, weshalb ich seine höhern Potenzen weglasse

$$\begin{aligned}
-0{,}1984 &= -0{,}1984.\\
+8{,}032\,.\,u &= +0{,}16044 \quad + 8{,}032\,.\,v\\
-4{,}76\,.\,u^2 &= -0{,}001904 \quad - 0{,}1904\,.\,v \quad - 4{,}76\,.\,v^2\\
+0{,}8\,.\,u^3 &= +0{,}0000064 \quad + 0{,}00096\,.\,v \quad + 0{,}048\,.\,v^2\\
u^4 &= +0{,}00000016 + 0{,}000032\,.\,v + 0{,}0024\,.\,v^2\\
\hline
0 &= -0{,}039658\ldots + 7{,}842\,.\,v \quad - 4{,}7\,.\,v^2.
\end{aligned}$$

Zeichne ich hier die Parabel so, wie Fig. 149. zeigt, wo $AD = 3$, $DC = 5$ ist, so sind die Ordinaten, welche den Punkten W, U zugehören, die beiden Wurzeln.

Hätte die Gleichung vier Wurzeln gehabt, so würde die richtig gezeichnete Parabel den Kreis viermal an den gehörigen Stellen schneiden, wie es der Kreis z, x, y, T zeigt. Dieser giebt die vier Wurzeln der Gleichung $x^4 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$, für welche $a = 3$, $b = -1$, $r = 3$ ist, und die vier Wurzeln sind $x = +1{,}89$; $x = +0{,}75$; $x = -0{,}3$; $x = -2{,}3$ gleich den Ordinaten für y, x, z, T.

§. 554. Auch Gleichungen des dritten Grades, welchen das zweite Glied fehlt, können durch eben die Construction aufgelöst werden.

Es sey zum Beispiel $x^3 - 8{,}164\,x + 4 = 0$, so kann man dafür $x^4 - 8{,}164\,x^2 + 4x = 0$ setzen, also $\alpha = -8{,}164$, folglich $a = 4{,}582$; $\beta = +4$, also $b = -2$, und $\gamma = 0$, also $r^2 = a^2 + b^2$, das ist $r = 5$.

Fig. 150. zeigt die hiernach gezeichneten Curven; der Parabel Scheitel A liegt in einem Durchschnittspunkte, für welchen also die Ordinate $= 0$ ist; er giebt die eine Wurzel $x = 0$ an; der zweite Durchschnittspunkt B deutet auf eine Wurzel, die kleiner als $+1$ ist, C auf eine Wurzel, die über $= 2$ ist, D auf eine Wurzel, die etwa $= -3$ ist. Die Rechnung ergiebt die Wurzeln $= +0{,}506$; $2{,}571$, und $= -3{,}0764$.

§. 555. Vermittelst dieser Construction lassen sich auch zwei mittlere Proportionallinien zwischen den zwei gegebnen k und l darstellen. Es soll nämlich $k : x = x : \frac{x^2}{k} = \frac{x^2}{k} : \frac{x^3}{k^2}$ und diese letztern $= l$, also $x^3 = k^2 l$ seyn. Vergleicht man diese Gleichung mit der in §. 550. für die Durchschnitte der Parabel und des Kreises gefundenen, die

$$v^4 + (p^2 - 2ap)\,v^2 - 2bp^2 v + p^2 (a^2 + b^2 - r^2) = o$$

war, und verändert man unsre Gleichung in

$$x^4 - k^2 l x = o,$$

so soll nun $p = 2a$, $r^2 = a^2 + b^2$ und $2bp^2 = k^2 l$ seyn.

Da p willkürlich ist, so sey $p = k$, also $b = \frac{1}{2} l$, $a = \frac{1}{2} k$, $r^2 = \frac{1}{4}(k^2 + l^2)$. Ist also in Fig. 151. $AB = \frac{1}{2} k$, die darauf senkrechte $BC = \frac{1}{2} l$, so ist AC der Halbmesser des Kreises, welcher die über der Axe AB mit dem Parameteter $p = 2 \,.\, AB$ beschriebne Parabel in E so schneidet, dass die senkrechte ED die erste mittlere Proportionallinie zwischen k und l darstellt. Wenn also $DF = 2 \,.\, AB$ und $DG = 2 \,.\, BC$, so ist DE die erste der zwei mittlern Proportionallinien zwischen DF, DG.

Es ist also $v = 0{,}005$ und $x = 0{,}225$. Ein Werth, der sich leicht bis auf mehr Decimalen finden liesse.

§. 556. Aufgabe. Den Durchschnittspunkt zweier Parabeln zu finden, die um einerlei Brennpunkt beschrieben sind.

Auflösung. Es sey $ABC = \gamma$ (Fig. 152.) der Winkel, welchen die Hauptaxen beider Parabeln mit einander machen, B der Brennpunkt beider, p der Parameter der einen, p' der Parameter der andern. Für den Winkel $ABE = \varphi$ ist nun in der ersten Parabel $\varrho = \frac{p}{4 . Cos^2 \frac{1}{2} \varphi}$, und für den Winkel $(\varphi - \gamma)$ ist in der andern Parabel $\varrho' = \frac{p'}{4 . Cos^2 \frac{1}{2} (\varphi - \gamma)}$. Soll also E ein Durchschnittspunkt beider Parabeln seyn, so ist $\varrho = \varrho'$,

$$p . Cos^2 \tfrac{1}{2} (\varphi - \gamma) = p' . Cos^2 \tfrac{1}{2} \varphi,$$

oder $Cos \frac{1}{2} \varphi . Cos \frac{1}{2} \gamma + Sin \frac{1}{2} \varphi . Sin \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{\frac{p'}{p}} . Cos \frac{1}{2} \varphi$;

das ist $tang \frac{1}{2} \varphi = \dfrac{\sqrt{\frac{p'}{p}} - Cos \frac{1}{2} \gamma}{Sin \frac{1}{2} \gamma}$.

Wäre also zum Beispiel $\gamma = 90°$, so wäre

$$tang \tfrac{1}{2} \varphi = - 1 \pm \sqrt{\frac{2 p'}{p}}.$$

§. 557. Bemerkung. Der Durchschnittspunkt des Kreises und der Conchoide giebt ein Mittel, um das Problem, einen gegebnen Winkel in drei gleiche Theile zu theilen, aufzulösen.

§. 558. Lehrsatz. Wenn der Bogen AB eines Kreises (Fig. 157.), dessen Mittelpunkt C ist, in drei gleiche Theile getheilt werden soll, so würde dieses geschehen können, wenn man diejenige Sehne BD des Kreises zu ziehen wüsste, welche dem verlängerten andern Schenkel des Winkels in E so begegnet, dass $DE = DC$ ist. Dann wäre nämlich die mit EB parallele Linie CF diejenige, welche $AF \frac{1}{3} AB$ abschneidet.

Beweis. Es sey durch irgend einen Kunstgriff die Sehne BD so durch B gezogen, dass, bei Verlängerung der Sehne BD bis zum Einschnitt in die verlängerte AC, $ED = CD$ geworden sey, so ist $DEC = DCE = \frac{1}{2} CDB$. Zieht man nun CF mit BE parallel und dann DF, so ist, weil $CF = ED$, auch FD mit CE parallel, und $FDB = ACF = CDF = CED$. Nun aber ist FDB ein Peripheriewinkel, der auf dem Bogen FB steht, und ACF ein ihm gleicher Centriwinkel, mithin $FB = 2 . AF$, und CF schneidet folglich das Drittel des Winkels ACB ab.

§. 559. Aufgabe. Durch die Zeichnung einer Conchoide das Drittel des Kreisbogens AB abzuschneiden (Fig. 157.).

Auflösung. Wenn C des Kreises Mittelpunkt ist, so ziehe man von B auf AC die Linie BG senkrecht, verlängere AC unbestimmt, um sie als Axe

der Conchoide zu gebrauchen, und zeichne nun die Conchoide so, dass B der Punkt sey, durch den alle Linien gehen, auf welchen von der Linie GE an die gleichen Stücke $ED = CB = ed$ aufgetragen werden. Dann ist offenbar der Punkt D, wo die Conchoide den Kreis schneidet, derjenige, durch welchen man DF mit AC parallel ziehen muss, um den Punkt F zu treffen, der ein Drittel des Bogens, nämlich $AF = \frac{1}{3} AB$, giebt. Denn nach der Natur der Conchoide ist $ED = CB = CD$, und folglich E der Punkt, welcher nach §. 558. zu diesem Zwecke bestimmt werden sollte.

Funfzehnter Abschnitt.

Von der Krümmung der Curven und der Bestimmung des Krümmungs-Halbmessers.

§. 560. Erklärung. Wenn man an zwei Punkte A, B, einer Curve (Fig. 153.) Tangenten zieht, so nennen wir den Bogen AB der Curve desto mehr gekrümmt, je mehr die Richtung beider Tangenten von einander verschieden, oder je grösser der Winkel ACD ist. Könnte man auf der krummen Linie Bogen von gleicher Länge abschneiden, so würde man die Curve überall gleich gekrümmt nennen, wenn die Winkel, welche die an den Endpunkten dieser Bogen gezognen Tangenten mit einander machen, immer gleich ausfielen, jene gleichen Bogen möchten gross oder klein, aber immer unter sich gleich genommen werden.

§. 561. Eine solche Linie von überall gleicher Krümmung ist bekanntlich der Kreis. Kreise von verschiedenem Halbmesser sind ungleich gekrümmt, indem die Richtung der Tangente sich mehr ändert, wenn man auf dem kleinern Kreise durch einen gewissen Bogen fortgeht, als wenn man auf dem Umfange des grössern einen eben so langen Bogen aufträgt und an seine Endpunkte Tangenten zieht.

Bei andern Curven ist die Krümmung in verschiedenen Punkten ungleich, und wir würden von der Krümmung, die in irgend einem Punkte statt findet, eine genaue Vorstellung haben, wir würden die Grösse der Krümmung abmessen können, wenn wir allemal den Kreis angeben könnten, der eben so stark gekrümmt ist, als es die Curve an der gegebnen Stelle ist.

Dass wir zu einer solchen Bestimmung wenigstens in manchen einzelnen Fällen gelangen können, zeigt folgendes Beispiel.

§. 562. Lehrsatz. Die Parabel ist an der Stelle, wo sie von der Hauptaxe geschnitten wird, eben so gekrümmt wie ein Kreis, dessen Halbmesser $= \frac{1}{2} p$ ist.

Beweis. Wenn man forderte, dass ein Kreis AB (Fig. 154.) die Parabel im Scheitel A berühren, in B aber sie schneiden sollte, so wäre dieser Forderung leicht Genüge zu thun. Denn wegen der Berührung im Endpunkte der Hauptaxe muss der Mittelpunkt C dieses Kreises auf der Hauptaxe liegen, und weil er auch durch den Punkt B gehen soll, für welchen $AD = x$, $BD = z = \sqrt{px}$ ist, so muss, wenn sein Halbmesser $= R$ ist, $z^2 = x(2R - x)$ oder $px = 2Rx - x^2$, das ist $R = \frac{1}{2}(p + x)$ seyn. Je grösser also die Abscisse des Durchschnittspunktes B ist, desto grösser wird der Halbmesser des Kreises. Je kleiner sie ist, oder je näher B an A rückt, desto näher schliesst sich offenbar der Kreisbogen AB an den Parabelbogen an, und wenn wir B immer näher und näher an A herangerückt denken, so ist $R = \frac{1}{2}p$ die Grenze, jenseits welcher es keine Kreise mehr giebt, die noch einen Punkt B ausser dem Berührungspunkte A mit der Parabel gemein hätten. Offenbar also schliesst sich der Kreis vom Halbmesser $R = \frac{1}{2}p$ näher in A an die Parabel an als jeder andre Kreis, für welchen $R > \frac{1}{2}p$ wäre.

Aber er schliesst sich auch näher an die Parabel an als jeder Kreis, für welchen $R < \frac{1}{2}p$ wäre; denn wenn $R = \frac{1}{2}p - u$ ist, so gehört zu jeder Abscisse $= x$, die von A an gerechnet wird, die Ordinate

$v = \sqrt{\{px - 2ux - x^2\}}$, die offenbar kleiner als die Ordinate

$w = \sqrt{(px - x^2)}$ desjenigen Kreises ist, der den Halbmesser $R = \frac{1}{2}p$ hatte. Solche Kreise liegen also ganz innerhalb des Kreises vom Halbmesser $R = \frac{1}{2}p$, und dieser Kreis also schliesst sich unter allen, die in A berühren, am engsten an die Parabel an.

§. 563. Durch Betrachtungen, wie die eben geführten, liessen sich nun allerdings in manchen Fällen der Kreis finden, welcher eben so stark gekrümmt ist, als eine Curve in einem gegebnen Punkte; aber theils wäre dieses schwierig theils würde es in jedem einzelnen Falle eigne Methoden fordern. Wir wollen uns daher nach einem allgemeinen Hülfsmittel umsehen, um der Forderung, jenen Kreis anzugeben, Genüge zu thun.

§. 564. Erklärung. Den Kreis, welcher mit der Krümmung einer Curve in einem gewissen Punkte übereinstimmt, nennt man den dieser Stelle entsprechenden Krümmungskreis, sein Halbmesser heisst der Krümmungshalbmesser für den bestimmten Punkt der Curve.

§. 565. Bemerkung. Wenn wir drei Punkte auf einer gegebnen Curve annehmen, so ist es bekanntlich allemal möglich, durch sie einen Kreis zu ziehen und dessen Halbmesser anzugeben. Um dafür Regeln aufzufinden, die uns am leichtesten zu unserm Hauptzwecke hinführen, wollen wir die drei Punkte auf der Curve so annehmen, dass die Abscissen des ersten und dritten um gleich viel von der Abscisse des zweiten verschieden sind, oder dass die Abscissen der drei Punkte durch $x - \Delta x$, x und $x + \Delta x$ angegeben werden. Nenne ich nun die zugehörigen Ordinaten z', z, z'', so wird offenbar nicht

$z - z' = z'' - z$ seyn, weil die Linie sonst nicht krumm, sondern gerade wäre, wir wollen also die erste Ordinate $= z - \Delta z$, die zweite z, die dritte $= z + \Delta z + \Delta\Delta z$ nennen. Diese Bezeichnung ist der schon oft gebrauchten ganz entsprechend; denn sie giebt Δz als die Zunahme der Ordinate, indem man vom ersten zum zweiten Punkte übergeht, an und drückt nun die Zunahme der Ordinate beim Uebergange vom zweiten zum dritten Punkte durch eben so viel als vorhin $= \Delta z$, und noch so viel als hier die Aenderung der Zunahme beträgt $= \Delta\Delta z$, = der Differenz der Zunahme, aus. Hiernach könnten wir Regeln für die Bestimmung des durch jene drei Punkte gehenden Kreises suchen.

§. 566. Aufgabe. Den Halbmesser des Kreises zu bestimmen, welcher durch drei Punkte geht, deren Lage durch
die Abscissen $x - \Delta x,\ x,\ x + \Delta x$
und die Ordinaten $z - \Delta z,\ z,\ z + \Delta z + \Delta\Delta z$ bestimmt ist.

Auflösung. Wenn des gesuchten Kreises Halbmesser $= r$, die Abscisse für den Mittelpunkt $= p$, die Ordinate $= q$ ist, so müssen offenbar die drei Gleichungen statt finden:

$$(x - \Delta x - p)^2 + (z - \Delta z - q)^2 = r^2;$$
$$(x - p)^2 + (z - q)^2 = r^2;$$
$$(x + \Delta x - p)^2 + (z + \Delta z + \Delta\Delta z - q)^2 = r^2.$$

Der Werth der zweiten, in der ersten und dritten benutzt, giebt:

$$-2(x-p)\Delta x + (\Delta x)^2 - 2(z-q)\Delta z + (\Delta z)^2 = o;$$
$$+2(x-p)\Delta x + (\Delta x)^2 + 2(z-q)\Delta z + 2\Delta\Delta z(z-q) + (\Delta z)^2 + 2\Delta z . \Delta\Delta z + (\Delta\Delta z)^2 = o,$$

und hieraus folgt

$$2(\Delta x)^2 + 2(\Delta z)^2 + 2\Delta\Delta z(z-q) + 2\Delta z . \Delta\Delta z + (\Delta\Delta z)^2 = o,$$

also $z - q = \dfrac{-(\Delta x)^2 - (\Delta z)^2}{\Delta\Delta z} - \Delta z - \tfrac{1}{2}(\Delta\Delta z)$.

Setze ich diesen Werth in die Gleichung

$$-2(x-p)\Delta x + (\Delta x)^2 - 2(z-q)\Delta z + (\Delta z)^2 = o,$$

so wird $(x - p) = \dfrac{(\Delta x)^2 + (\Delta z)^2}{2\Delta x} - \dfrac{\Delta z}{\Delta x}(z - q)$,

also $r^2 = (x-p)^2 + (z-q)^2$

$$= \frac{\{(\Delta x)^2 + (\Delta z)^2\}^2}{4.(\Delta x)^2} + \frac{\{(\Delta z)^2 + (\Delta x)^2\}}{(\Delta z)^2}(z-q)^2 - \frac{\Delta z(z-q)\{(\Delta x)^2 + (\Delta z)^2\}}{(\Delta x)^2}.$$

Wenn ich hier $(\Delta x)^2 + (\Delta z)^2 = (\Delta s)^2$ setze, so ist Δs der Abstand der beiden ersten Punkte von einander, und

$$r^2 = \frac{(\Delta s)^4}{4(\Delta x)^2} + \frac{(\Delta s)^2}{(\Delta x)^2}(z-q)^2 - \frac{(\Delta s)^2}{(\Delta x)^2}\Delta z(z-q),$$

oder wenn man die Glieder so ordnet, wie sie am beträchtlichsten werden,

wenn Δx, Δz, Δs klein sind,

$$r^2 = \frac{(\Delta s)^2}{(\Delta x)^2}(z-q)^2 - \frac{(\Delta s)^2}{(\Delta x)^2}\Delta z . (z-q) + \frac{1}{4}\frac{(\Delta s)^4}{(\Delta x)^2};$$

und $(z-q)^2 = \frac{(\Delta s)^4}{(\Delta\Delta z)^2} + \frac{2\Delta z(\Delta s)^2}{\Delta\Delta z} + (\Delta s)^2 + (\Delta z)^2 + \Delta z\,\Delta\Delta z + \frac{(\Delta\Delta z)^2}{4}$.

Hieraus liesse sich r^2 vollständig entwickeln.

§. 567. Wenn man die drei Punkte auf einer Curve annimmt, so wird der gefundene Kreis desto näher mit dem Krümmungskreise übereinkommen, je kleiner man die Abstände der Punkte von einander, das heisst, je kleiner man Δx, Δz, Δs nimmt, und dieselben Betrachtungen, welche uns bei der Bestimmung der Berührungslinie zu der Ueberzeugung brachte, dass die Berücksichtigung der folgenden Glieder uns zu Sehnen der Curve, das höchste Glied allein aber zur Berührungslinie führe, berechtigen uns hier, den Krümmungshalbmesser als durch das erste Glied allein ausgedrückt anzusehen.

§. 568. Lehrsatz. Wenn ein Punkt der Curve durch Coordinaten x, z gegeben ist, und Δx, Δz, für den Uebergang vom ersten zum zweiten Punkte der Curve, Δx, $(\Delta z + \Delta\Delta z)$ aber für den Uebergang vom zweiten zum dritten Punkte der Curve die Aenderung der Coordinaten ausdrückt, so ist der Krümmungshalbmesser an dieser Stelle $= r = \frac{(\Delta s)^3}{\Delta x . \Delta\Delta z}$, wenn

$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta z)^2$ ist.

Beweis. Unter den Gliedern, welche den Werth von r^2 ausdrücken, behält einzig $\frac{(\Delta s)^2}{(\Delta x)^2}(z-q)^2$ einen bedeutenden Werth, wenn jene Aenderungen sehr klein werden; und eben so besteht der Werth von $(z-q)^2$, wenn man das erste Glied ausnimmt aus Gliedern, die jede Grenze der Kleinheit überschreiten können, wenn jene Differenzen immer kleiner werden. Da nun hier, wo nicht ein die Curve in drei Punkten schneidender Kreis, sondern der Krümmungskreis gesucht wird, die drei Punkte nothwendig als einander überaus nahe gerückt, ja als nicht mehr um eine bestimmbare Entfernung aus einander liegend müssen angesehen werden, so ist es gewiss hier erlaubt $r = \frac{\Delta s}{\Delta x}(z-q)$ und $z-q = \frac{(\Delta s)^2}{\Delta\Delta z}$ zu setzen, und der Krümmungshalbmesser hat wirklich den im Lehrsatze angegebnen Werth, den wir durch

$$r = \frac{(ds)^3}{d\,dz . dx}$$ anzugeben pflegen, um daran zu erinnern, dass diese Bestimmung nur auf den Fall so kleiner Aenderungen passt, oder dass nur die ersten Glieder der Differenzreihen berücksichtigt sind.

§. 569. **Aufgabe.** Den Krümmungshalbmesser für irgend einen Punkt der Parabel zu finden.

Auflösung. Da hier $z^2 = px$ oder $z = p^{\frac{1}{2}} . x^{\frac{1}{2}}$ ist, so wird für $x' = x - \Delta x$, die Ordinate

$$z' = z + \Delta z = z - \tfrac{1}{2} \frac{p^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \Delta x - \tfrac{1}{8} \frac{p^{\frac{1}{2}} (\Delta x)^2}{x^{\frac{3}{2}}};$$

für $x'' = x + \Delta x$, die Ordinate

$$z'' = z + \Delta z + \Delta\Delta z = z + \tfrac{1}{2} \frac{p^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \Delta x - \tfrac{1}{8} \frac{p^{\frac{1}{2}} (\Delta x)^2}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Es ist also $\Delta z = \tfrac{1}{2} \frac{p^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \Delta x + \tfrac{1}{8} \frac{p^{\frac{1}{2}} (\Delta x)^2}{x^{\frac{3}{2}}}$,

$$\Delta\Delta z = - \tfrac{1}{4} \frac{p^{\frac{1}{2}} (\Delta x)^2}{x^{\frac{3}{2}}},$$

wenn man höhere Glieder nicht beachtet. Ferner

$(ds)^2 = (dx)^2 + (dz)^2 = (dx)^2 \left(1 + \frac{p}{4x}\right)$ und folglich

$$r = \frac{(ds)^3}{d^2 z . dx} = \frac{-(dx)^3 \left(1 + \frac{p}{4x}\right)^{\frac{3}{2}}}{\tfrac{1}{4} p^{\frac{1}{2}} . x^{-\frac{3}{2}} (dx)^3} = \frac{-(4x + p)^{\frac{3}{2}}}{2 p^{\frac{1}{2}}},$$

oder da $\sqrt{(px + \tfrac{1}{4} p^2)} = N =$ der Normallinie ist, $r = \frac{4 N^3}{p^2}$, für jeden Punkt der Parabel. Im Scheitel ist $N = \tfrac{1}{2} p$ und auch $r = \tfrac{1}{2} p$.

§. 570. **Aufgabe.** Den Krümmungshalbmesser der Ellipse und Hyperbel zu bestimmen.

Auflösung. Wenn man sich drei Punkte denkt, deren Abscissen $= x$, $= x + \Delta x$, $= x + 2 \Delta x$, und deren Ordinaten $= z$, $= z + \Delta z$, $= z + 2 \Delta + \Delta\Delta z$ sind, so giebt für die Ellipse die Gleichung $z = \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}$; $z + \Delta z = \sqrt{\left\{z^2 - \frac{2 b^2 x}{a^2} \Delta x - \frac{b^2 (\Delta x)^2}{a^2}\right\}}$,

$$z + \Delta z = z - \frac{b^2}{a^2} . \frac{x}{z} \Delta x - \left(\tfrac{1}{2} \frac{b^2}{a^2} . \frac{1}{z} + \tfrac{1}{2} \frac{b^4}{a^4} . \frac{x^2}{z^3}\right) (\Delta x)^2;$$

$$z + 2 \Delta z + \Delta\Delta z = z - \frac{2 b^2}{a^2} . \frac{x}{z} \Delta x - \left(2 \frac{b^2}{a^2} . \frac{1}{z} + 2 \frac{b^4}{a^4} . \frac{x^2}{z^3}\right) (\Delta x)^2;$$

also $\Delta z = - \frac{b^2}{a^2} . \frac{x}{z} \Delta z - \tfrac{1}{2} \frac{b^2}{a^2 z} \left(1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 z^2}\right) (\Delta z)^2;$

$$dz = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{z}\, dx;$$

$$ddz = \left(-\frac{b^2}{a^2 z} - \frac{b^4 x^2}{a^4 z^3}\right)(dx)^2.$$

Ferner $(dx)^2 + (dz)^2 = (dx)^2 \left(1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 z^2}\right)$,

und folglich $r = \frac{\{(dx)^2 + (dz)^2\}^{\frac{3}{2}}}{dx \,.\, ddz} = \frac{-(a^4 z^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^6 z^3 \,.\, \frac{b^2}{a^4 z^3}(a^2 z^2 + b^2 x^2)}$;

oder $r = -\frac{(a^4 z^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}$.

Nach §. 232. ist aber die Normallinie der Ellipse $= N = \frac{\sqrt{(a^4 z^2 + b^4 x^2)}}{a^2}$,

also $r = -\frac{N^3 \,.\, a^2}{b^4}$, das ist, weil der Parameter $= p = \frac{2 b^2}{a}$ ist (§. 178.),

$r = -\frac{4 N^3}{p^2}$.

Denselben Ausdruck würde man für die Hyperbel finden.

§. 571. Das negative Zeichen, welches der Krümmungshalbmesser erhält, deutet seine Lage an. Er wird nämlich immer dann negativ, wenn, bei wachsendem x und s, ddz negativ, das heisst die Curve gegen die Abscissenlinie concav ist. ddz oder $\Delta\Delta z$ wird dann negativ, wenn die Zunahme der z immer geringer wird, oder die Abnahme der z immer grösser wird, je mehr x wächst.

Wenn (Fig. 155.) die positiven Abscissen CX von C gegen B gerechnet werden, so ist mit dem Zunehmen der Abscissen ein Zunehmen des Bogens AZ, aber eine Abnahme des Bogens ABU verbunden. Will man also für den Punkt Z den Krümmungshalbmesser haben, so muss man r negativ erhalten, weil $r = \frac{(+ds)^3}{(+dx)(-ddz)}$ = einem Quotienten aus Grössen ist, deren eine negativ wird. Eben das wäre für den Punkt U der Fall, weil hier zu $+dx$ ein $-ds$, aber ein $+ddz$ gehört, denn die negativen z nehmen nicht nur ab, sondern diese Abnahme der negativen z, die bekanntlich als positive Zunahme anzusehen ist, wird immer stärker, also der Unterschied positiv. Bei einem gegen die Abscissenlinie convexen Bogen, wie FG, würde das Gegentheil statt finden.

§. 572. Anmerkung. Andre Betrachtungen, die hier ihren Platz finden könnten, z. B. über die Wendungspunkte, wo nämlich der Krümmungshalbmesser ins Unendliche wächst, über die Rückkehrpunkte u. s. w. übergehe ich, da sie mit Hülfe der Differential-Rechnung leichter abgehandelt werden. Die Be-

stimmung des Krümmungshalbmessers musste hier deswegen aufgenommen werden, weil ich alles das, was als Grundlage der Differential-Bestimmungen nothwendig ist, hier zu entwickeln wünschte, und sich hier gründlich zeigen liess, wie ein durch drei Punkte der Curve gehender Kreis angegeben werde, und wie nun die Grenze seines Halbmessers, wenn die drei Punkte einander immer näher rücken, gefunden werde.

Sechszehnter Abschnitt.

Von den transscendenten Curven.

§. 573. **Bemerkung.** Im Allgemeinen heissen diejenigen Curven transscendente, die sich nicht durch eine in rationalen algebraischen Ausdrücken entwikkelte Gleichung darstellen lassen. Da nun die Logarithmen, die Exponentialgrössen, und die mit ihrem Halbmesser zu vergleichenden Kreisbogen solche Grössen sind, die sich nur durch unendliche Reihen ausdrücken lassen, so gehören diese hierher.

Auch Curven, für welche $z = x^{\sqrt{2}}$ wäre, oder ein andrer irrational dargestellter Exponent angegeben würde, gehören hierher, da wir ihre Betrachtung nicht anders, als mit Hülfe der Logarithmen ausführen können.

1. Die Curve, deren Gleichung ist:

$$\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{z}}{\sqrt{b}}\right)^{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = a\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{z}}{\sqrt{b}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}.$$

§. 574. **Bemerkung.** Die so dargestellte Curve hat die Eigenschaft, dass die Länge ihres von einem gewissen Anfangspunkte an gerechneten Bogens allemal die mittlere Proportionallinie zwischen der dem andern Endpunkte zugehörigen doppelten Abscisse $= 2x$, und der Ordinate $= z$ ist *).

§. 575. **Bemerkung.** Unsre Gleichung, welcher wir auch (wenn ich statt $\sqrt{\frac{x}{b}}$ kurz $\sqrt{x}$ und statt $\sqrt{\frac{z}{b}}$ bloss $\sqrt{z}$ screibe), die Form

$$(\sqrt{x}+\sqrt{z})^{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = a(\sqrt{x}-\sqrt{z})^{\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}},$$

*) Aus dieser Eigenschaft leitet Euler die Gleichung für die Curve her (*Institutiones calculi integralis. Vol. I. §. 685.*); er theilt aber keine weitere Betrachtung dieser Curve mit.

oder $(\sqrt{x} + \sqrt{z}) = a^{\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}} \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{z})^{\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}$,

oder $(\sqrt{x} + \sqrt{z}) = a^{0{,}5857864} \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{z})^{-0{,}1715729}$ geben können; lässt sich am bequemsten betrachten, wenn wir die Hülfsgrössen $\sqrt{x} + \sqrt{z} = s$, $\sqrt{x} - \sqrt{z} = u$, einführen; zugleich sey auch $a^{0{,}5857864} = c$.

Wenn durch die gegebne Gleichung dann s aus u bestimmt wird, so hat man auch $x = \frac{(s+u)^2}{4}$ und $z = \frac{(s-u)^2}{4}$. Unsre Gleichung aber giebt $s = c \cdot u^{-0{,}1715729}$.

Hieraus lassen sich die zusammengehörenden Werthe von x und z leicht berechnen; man findet nämlich, um nur einige anzuführen, wenn ich $c = 1$ annehme:

für $u = 0$;	$s = \infty$;	$x = \infty$;	$z = \infty$;
$u = 0{,}001$;	$s = 3{,}270$;	$x = 2{,}670$;	$z = 2{,}668$;
$u = 0{,}01$;	$s = 2{,}203$;	$x = 1{,}224$;	$z = 1{,}202$;
$u = 0{,}1$;	$s = 1{,}484$;	$x = 0{,}627$;	$z = 0{,}479$;
$u = 0{,}2$;	$s = 1{,}318$;	$x = 0{,}576$;	$z = 0{,}312$;
$u = 0{,}5$;	$s = 1{,}126$;	$x = 0{,}661$;	$z = 0{,}098$;
$u = 0{,}8$;	$s = 1{,}039$;	$x = 0{,}845$;	$z = 0{,}014$;
$u = 1{,}0$;	$s = 1{,}0$;	$x = 1$;	$z = 0$;
$u = 1{,}5$;	$s = 0{,}933$;	$x = 1{,}480$;	$z = 0{,}080$;
$u = 2{,}0$;	$s = 0{,}888$;	$x = 2{,}085$;	$z = 0{,}309$;
$u = 3{,}0$;	$s = 0{,}828$;	$x = 3{,}664$;	$z = 1{,}179$;
$u = 4{,}0$;	$s = 0{,}788$;	$x = 5{,}732$;	$z = 2{,}572$;
$u = 5{,}0$;	$s = 0{,}759$;	$x = 8{,}292$;	$z = 4{,}497$;
$u = 10{,}0$;	$s = 0{,}674$;	$x = 28{,}48$;	$z = 21{,}74$;
$u = 100{,}0$;	$s = 0{,}454$;	$x = 2522{,}7$;	$z = 2478{,}0$.

§. 576. Diese Rechnung zeigt, dass die Curve zwei, an der positiven Seite der Abscissenlinie liegende Aeste hat, deren erster sich sehr bald an eine unter dem Winkel von 45 Gr. geneigte gerade Linie anschliesst, der andre sich weniger schnell von der Abscissenlinie entfernt. Dass es weder negative Abscissen, noch negative Ordinaten geben kann, erhellt von selbst, weil sonst $\sqrt{x}$ oder $\sqrt{z}$ unmöglich würde.

§. 577. Aufgabe. Die Lage der Berührungslinie zu finden.

Auflösung. Da es dabei ja doch nur auf das erste Glied der Differenzreihe ankömmt, so berechne ich nur dieses. Da giebt also

$$x = \tfrac{1}{4}(s+u)^2,\quad dx = \tfrac{1}{2}(s+u)(ds+du)$$
$$z = \tfrac{1}{4}(s-u)^2,\quad dz = \tfrac{1}{2}(s-u)(ds-du),$$

und wenn ich die bestimmte Zahl 0,1715729 $= f$ setze,

$$s = c \cdot u^{-f}, \text{ und } ds = -f \cdot c \cdot u^{-f-1} \cdot du,$$

also $dx = \frac{1}{2}(s+u)\left(1 - f \cdot c \cdot u^{-f-1}\right) du;$

$$dz = -\tfrac{1}{2}(s-u)\left(1 + f \cdot c \cdot u^{-f-1}\right) du.$$

So ist also $\frac{dz}{dx}$, die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Berührungslinie mit der Abscissenlinie macht, bestimmt.

§. 578. Da $\frac{dz}{dx} = -\frac{(s-u)}{s+u} \cdot \frac{\left(u^{f+1} + f \cdot c\right)}{\left(u^{f+1} - f \cdot c\right)}$ nur dann verschwinden kann, wenn $s = u$ ist, so ist dadurch der Punkt angegeben, wo die Berührungslinie mit der Abscissenlinie parallel ist. Es liegt da, wo $x = 1$ und $z = 0$ ist; da also wird die Curve von der Abscissenlinie in A (Fig. 156.) berührt, wenn $BA = 1$ ist.

Dagegen wird die Berührungslinie da auf die Abscissenlinie senkrecht, wo $u^{f+1} = f \cdot c$ ist; also für $c = 1$. da wo $u = 0{,}2221$; $s = 1{,}2945$; $x = 0{,}575$, und $z = 0{,}2845$ ist.

§. 579. Doppelte Punkte kann die Curve nicht haben, und andre Merkwürdigkeiten bietet sie auch nicht dar. Vermöge der Gründe, welche die Integralrechnung angiebt, ist allemal für jede zusammen gehörigen Bogen und Coordinaten in Fig. 156. $2 \cdot BC$: Bogen AFE = Bogen $AFE : CE$
und $2 \cdot BC$: Bogen AD = Bogen $AD : CD$.

2. Die Logarithmischen und Exponential-Curven.

§. 580. Erklärung. Im Allgemeinen heissen Curven logarithmisch, wenn ihre Ordinaten auf irgend eine Weise durch Logarithmen, die von der Abscisse abhängen, ausgedrückt werden.

Die einfachste logarithmische Linie ist daher die, deren Gleichung $z = a \cdot \log \frac{x}{b}$ ist, wenn a und b gegebne Grössen sind.

§. 581. Wenn hier von Logarithmen der Abscisse oder andrer Linien die Rede ist, so versteht es sich immer von selbst, dass man diese Linien als das Vielfache oder Theile einer bestimmten Linie, die als Mass kann angesehen werden, betrachtet, also statt der Abscisse x eine Zahl $\frac{x}{b}$ nehmen muss. Unter Logarithmen verstehen wir hier, wenn nichts andres bemerkt wird, die natür-

lichen Logarithmen, auf welche ja alle andere Systeme leicht können zurückgeführt werden *).

§. 582. Wir wollen zuerst bei der einfachsten logarithmischen Gleichung stehen bleiben, wo $z = a \,.\, log\, nat\, \frac{x}{b}$ ist.

§. 583. **Lehrsatz.** Die durch $z = a \,.\, log\, \frac{x}{b}$ ausgedrückte Linie hat zwei unendliche Aeste, deren einer sich an die durch den Nullpunkt der Abscissen gezogne Ordinate als an seine Asymptote anschliesst.

Beweis. Wenn (Fig. 158.) die Abscissen AX von A an gerechnet werden, so ist für $x = b$, $log\, \frac{x}{b} = 0$, weil bekanntlich $log\, 1 = 0$ ist, also die Ordinate $= 0$, und in der Figur ist $AB = b$; für $x < b$ ist $log\, \frac{x}{b}$ eine negative Grösse, und die Ordinaten UV, für Abscissen AU kleiner als AB, sind also negativ und wachsen ins Unendliche, wenn x immer kleiner wird; für $x > b$ wächst dagegen $log\, \frac{x}{b}$ zwar langsamer als $\frac{x}{b}$ selbst, aber dennoch unaufhörlich, so dass für $x = \infty$ auch $log\, \frac{x}{b}$ unendlich wird.

Der Ast BV der Curve schliesst sich also an die Asymptote AC an; eine geradlinige Asymptote für den andern Ast giebt es nicht.

§. 584. Negative x können bei dieser Curve nicht vorkommen; denn da $\frac{z}{a} = log\, \frac{x}{b}$, oder, wenn e die Grundzahl des Systems bedeutet, $e^{\frac{z}{a}} = \frac{x}{b}$ seyn soll, so erhält x für jeden Werth von z einen positiven Werth. Allerdings könnte, wenn $z = \frac{1}{2}\, m \,.\, a$, also $x = b \sqrt[2]{e^m}$ wäre, hier das Zeichen $\pm$ gebraucht und so dem x auch ein negativer Werth beigelegt werden; aber diese Punkte, welche negativen Werthen von x entsprechen, bilden keine stätige Curve, sondern liegen einzeln da. Euler vergleicht sie daher mit den zugeordneten Punkten, die man demnach hier als in unendlicher Menge vorkommend annehmen müsste. Sie bilden keine fortlaufende Curve, weil z. B. für $\frac{z}{a} = 0{,}1$, allerdings $x = \pm\, b \sqrt[2]{e^{\frac{1}{5}}}$ seyn kann, dagegen für $\frac{z}{a} = 0{,}2 = \frac{1}{5}$, noth-

*) Ich setze hier voraus, dass man die Darstellung der Logarithmen durch Reihen, die Bestimmung der Grundzahl des natürlichen Logarithmen-Systems u. s. w. kenne. Das hier Erforderliche findet sich in meinen Vorbereitungen zur höhern Analysis. S. 133.

wendig $x = b\sqrt[5]{e}$ positiv ist, da die positive Grösse e keine negative fünfte Wurzel haben kann. Zwischen jene Werthe, wo x einen negativen Werth erhalten kann, fallen also immer andre, wo dieses nicht statt findet. Wir betrachten hier bloss die stätige Curve, welche den positiven x entspricht.

§. 585. Lehrsatz. Die Subtangente der logarithmischen Linie ist eine unveränderliche Linie, wenn man sie nämlich auf AC, das ist auf der Asymptote des einen Astes nimmt.

Beweis. Zieht man an einen Punkt Z die Tangente ZT, die jene Asymptote in T schneidet, so ist $AW = z$, $WZ = x$, und offenbar $tang\ ZTX = \frac{dx}{dz} = tang\ \varphi$. Aber die Analysis lehrt *), dass

$$log\left(\frac{x+\Delta x}{b}\right) = log\frac{x}{b} + log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = log\frac{x}{b} + \frac{\Delta x}{x} - \tfrac{1}{2}\frac{(\Delta x)^2}{x^2} + \tfrac{1}{3}\frac{(\Delta x)^3}{x^3} - \text{etc.}$$

also $\Delta z = a\left(\frac{\Delta x}{x} - \frac{1}{2}\frac{(\Delta x)^2}{x^2} + \text{etc.}\right)$,

das ist $dz = \frac{a\,dx}{x}$, also $tang\ \varphi = \frac{x}{a}$ sey.

Da nun die Subtangente $WT = \frac{x}{tang\ \varphi}$ ist, so haben wir die Subtangente $= a$.

§. 586. Diese Eigenschaft ist die wichtigste und einfachste, welche von der Logarithmischen Linie zu bemerken ist. — Diese Subtangente ist zugleich einerlei mit demjenigen Werthe der Ordinate, der mit $x = e \,.\, b$ zusammengehört, wenn man unter e die Zahl $= 2{,}71828$, nämlich die Grundzahl des natürlichen Logarithmen-Systems versteht.

§. 587. Bemerkung. Die eben betrachtete Curve konnte eben so gut in einer Exponentialgleichung $e^{\frac{z}{a}} = \frac{x}{b}$, dargestellt werden, und eine Gleichung, wie $f^{\frac{z}{a}} = \frac{x}{b}$, bedarf also keiner weitern Erläuterung, da die durch sie angegebne Curve auch durch $z = \frac{a}{log\ nat\ f} \,.\, log\ nat\ \frac{x}{b}$ dargestellt würde.

Dagegen ist der Fall anders, wenn auch die zu einer veränderlichen Potenz zu erhebende Grösse selbst eine veränderliche ist; z. B. $\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{x}{a}} = \frac{z}{b}$.

*) Vorber. z. höhern Analysis §. 142 folg.

§. 588. Lehrsatz. Für die durch die Gleichung $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{x}{a}} = \frac{z}{b}$ ausgedrückte Curve ist $z = b$, wenn $x = a$ ist, und für x, grösser als a, wächst z immer fort ins Unendliche. Ist dagegen $x < a$, so wird zwar, so lange der Unterschied $a - x$ nicht viel beträgt, auch z kleiner als b, aber in der Folge wird z wieder grösser, und für $x = o$ ist z abermals $= b$.

Beweis. Dass $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{x}{a}} = \frac{z}{b}$ in $= 1$ übergeht, wenn $x = a$ ist, erhellt von selbst; eben so auch, dass für $x = 2a$, $z = 2^2 . b$, für $x = n . a$, $z = n^n . b$ werde, also bei wachsenden x, z ungemein schnell wachse. Ist dagegen $\frac{x}{a}$ ein echter Bruch, so nimmt nicht immerfort z mit x zugleich ab. Mit Hülfe der Logarithmen findet man zum Beispiel

$$(0,9)^{0,9} = 0,90955,$$
$$(0,7)^{0,7} = 0,77906,$$
$$(0,5)^{0,5} = 0,70711,$$
$$(0,3)^{0,3} = 0,69684,$$
$$(0,1)^{0,1} = 0,79433,$$
$$(0,01)^{0,01} = 0,9550,$$
$$(0,001)^{0,001} = 0,9931,$$
$$(0,0001)^{0,0001} = 0,99908,$$

und es erhellt leicht, dass u^u desto näher $= 1$ wird, je näher u dem Werthe $= 0$ kömmt.

§ 589. Der kleinste Werth, den z erhalten kann, findet für $\frac{x}{a} = \frac{1}{e}$ statt, wenn e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems $= 2,71828$ ist. Dann ist $x = a . 0,36788$ und $z = b . 0,6922$. Der Grund, warum dieser Werth der kleinste ist, lässt sich hier nicht vollständig entwickeln. Fig. 159. zeigt diese Curve, und es ist da $CE = a$, $CA = EB = b$, $CD = 0,368 . a$.

§. 590. Für negative x lässt sich die Curve nicht als stätige Curve fortsetzen, indem zwischen möglichen Werthen, wie $\frac{z}{b} = \frac{1}{-1}$; $\frac{z}{b} = \frac{1}{(-2)^2}$, die mit $\frac{x}{a} = -1$ und $\frac{x}{a} = -2$ zusammen gehören, nothwendig allemal

unmögliche, wie $(-\frac{3}{2})^{-\frac{3}{2}} = (-\frac{2}{3})^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(-\frac{8}{27})}$, liegen würden. Die Curve endigt sich also in A.

3. Die Spirallinien.

§. 591. Erklärung. Spirallinien heissen alle die Curven, welche in vielen Windungen, die sich entweder immer weiter von einem Mittelpunkte entfernen, oder sich immer enger an ihn anschliessen, fortlaufen.

§. 592. Erklärung. Die Archimedische Spirallinie ist diejenige, bei welcher der Abstand CA vom Mittelpunkte C dem Winkel ACB proportional ist (Fig. 160.).

§. 593. Aufgabe. Eine Gleichung für die Archimedische Spirallinie anzugeben.

Auflösung. Wenn der bestimmte Winkel $ACB = \alpha$ heisst, und $AC = a$ ist, nun aber der Abstand $= \varrho$ eines Punktes der Curve vom Mittelpuncte C dem von CB an gerechneten Winkel proportional seyn soll, so ist offenbar für $XCB = \varphi$, $CX = \varrho = \frac{a\varphi}{\alpha}$.

§. 594. Für $\varphi = \pi$, oder = dem halben Umfange, wird also $\varrho = \frac{a\pi}{\alpha}$, für den ganzen Umfang doppelt so gross, und so weiter; und da der Radius CX, so oft man will, den ganzen Umfang durchlaufen darf, so hat die Linie unzählige Windungen um den Punkt C.

§. 595. Aufgabe. Die Neigung der Tangente gegen den Radius in jedem Punkte X zu finden (Fig. 160.).

Auflösung. Wenn man zwei einander nahe Radien CX, CZ zieht, deren einer dem Winkel (der in d. Figur mehr als 2 rechte beträgt), $XCB = \varphi$, der andre dem Winkel $ZCB = \varphi + \Delta\varphi$ zugehört, so erhält man die zugehörigen Radien $\varrho = \frac{a\varphi}{\alpha}$ und $\varrho + \Delta\varrho = \frac{a(\varphi + \Delta\varphi)}{\alpha}$. Ihr Unterschied ist $= \frac{a\Delta\varphi}{\alpha}$, und man könnte daraus, wenn $CU = CX$ ist, und die Sehnen UX, UZ gezogen werden, $tang\, CZX = \frac{UX \,.\, Sin\, U}{UZ + UX \,.\, Cos\, U} = \frac{2\varrho \,.\, Sin\,\frac{1}{2}\Delta\varphi \,.\, Cos\,\frac{1}{2}\Delta\varphi}{\Delta\varrho + 2\varrho \,.\, Sin^2\,\frac{1}{2}\Delta\varphi}$ finden, um die Neigung der Sehne gegen den Radius zu bestimmen, indem

$$tang\; CZX = \frac{\varphi \,.\, Sin\,\Delta\varphi}{\Delta\varphi + \varphi\,(1 - Cos\,\Delta\varphi)}$$

würde. Das erste Glied der hieraus nach den Potenzen von $\Delta\varphi$ zu entwickelnden Reihe giebt offenbar $tang\, CZX = \varphi$, weil der allgemeine Ausdruck $\frac{\varphi\,(\Delta\varphi - \frac{1}{6}(\Delta\varphi)^3 + \text{etc.})}{\Delta\varphi - \frac{1}{2}(\Delta\varphi)^2 + \text{etc.}}$ dann in $= \varphi$ übergeht. (Vorbereit. z. höhern Analysis §. 153. 154.).

§. 596. Um den Ausdruck *tang* $CZX = \varphi$ richtig zu verstehen, muss man bedenken, dass hier φ in Theilen des Halbmessers muss ausgedrückt werden. In der Gleichung für die Curve, $\varrho = \frac{a\,\varphi}{\alpha}$ war es gleichgültig, ob man φ und α in Graden oder in Theilen des Halbmessers ausdrückte; aber der Werth der Tangente des Winkels CZX wurde dadurch gefunden, dass wir $Sin\,\Delta\varphi$ in eine Reihe entwickelten oder zuletzt $Sin\,\Delta\varphi = \Delta\varphi$ setzten, wo offenbar $\Delta\varphi$ eben so muss dargestellt werden, wie wir $Sin\,\Delta\varphi$ immer darzustellen gewohnt sind, das heisst in Theilen des Halbmessers; dadurch wird

$$tang\;CZX = \frac{\frac{a\,\varphi}{\alpha}\,.\,\Delta\varphi}{\frac{a\,\Delta\varphi}{\alpha}},$$ wenn vorher $\frac{\varphi\,.\,\text{Grade}}{\alpha\,.\,\text{Grade}}$ und $\frac{\Delta\varphi\,.\,\text{Gr}}{\alpha\,.\,\text{Gr}}$ vorkam, nun

geben $$tang\;CZX = \frac{\frac{a\,\varphi}{\alpha}\,.\,\Delta\varphi\;0{,}01745}{\frac{a\,\Delta\varphi}{\alpha}},$$ weil nämlich 0,01745 die Länge des Bogens von einem Grade in Theilen des Halbmessers ist.

§. 597. Es wird also *tang* CZX immer grösser, je grösser φ wird, und da bei den wiederholten Windungen φ ins Unendliche wachsen kann, so kann CZX dem rechten Winkel so nahe kommen, als man will.

§. 598. Bemerkung. Die Gleichung für die Archimedische Spirallinie stimmt, sofern sie eine Gleichung des ersten Grades ist, ganz mit der Gleichung für die gerade Linie überein; ϱ nämlich ist der ersten Potenz des veränderlichen Winkels proportional. Zeichnet man den Kreis BA vom Halbmesser $= a$ und betrachtet den Kreisbogen BAv als Abscisse $= a\,.\,\varphi$, den senkrechten Abstand $vX = \varrho - a$ aber als Ordinate, so ist diese Ordinate $= \varrho - a = \frac{(\varphi - a)}{\alpha}\,a$, oder $Xv =$ einem Vielfachen der Abscisse Av, die $= a\,(\varphi - \alpha)$ ist. Denkt man sich also die Abscissenlinie gleichsam in einen Kreis zusammen gekrümmt und in wiederholten Umläufen auf diesen aufgelegt (eine Vorstellung, die freilich ziemlich ungeometrisch ist, aber doch bildlich eine angenehme Uebersicht und Vergleichung gewährt), so geben die jedem Punkte derselben zugehörigen Ordinaten, die bei der geraden Abscissenlinie Punkte der geraden Linie bestimmten, jetzt die Abstände der Spirale von diesem Kreise an. Diese sind nämlich $vX = \left(\frac{\varphi - \alpha}{\alpha}\right) a$, für $BAv = \varphi$; aber $vY = \left(\frac{2\pi + \varphi - \alpha}{\alpha}\right) a$, für die Abscisse $= 2\pi\,.\,a + BAv$, und so ferner.

§. 599. Erklärung. Eben so nun könnte man sich die Abscissenlinie der Parabel als auf den Kreis in wiederholten Windungen aufgewickelt denken und fragen, was dann die Gleichung $z^2 = p\left(\frac{\varphi - \alpha}{\alpha}\right) a$ geben würde. Die Betrachtung dieser Gleichung führt zu der Parabolischen Spirallinie.

§. 600. Lehrsatz. Die Parabolische Spirallinie besteht aus zwei Aesten, die in unzähligen Windungen um den Mittelpunkt C (Fig. 161.) herum laufen, indem auf dem Kreise vom Halbmesser $= a$, da wo $\varphi = \alpha$ ist, ein Scheitel B liegt.

Beweis. Für $\varphi = \alpha$ wird der Abstand $= z$ von dem Kreise $BA. = o$, und für kleinere Werthe von φ würde z unmöglich werden; für grössere Werthe von φ, zum Beispiel $\varphi - \alpha = BCX$, aber erhält z einen doppelten Werth, der nach beiden Seiten des Kreisumfangs, nämlich $XY = XZ$, muss aufgetragen werden, so dass für $\varphi - \alpha =$ dem Quadranten $= \frac{1}{2}\pi$, $z = \pm\sqrt{\left(pa\frac{\frac{1}{2}\pi}{\alpha}\right)}$ ist für $\varphi - \alpha = \pi$, $z = \pm\sqrt{\left(pa \cdot \frac{\pi}{a}\right)}$, und so weiter. Der Ast also, welcher den positiven Abständen entspricht, wird in immer weiteren Windungen sich vom Mittelpunkte entfernen; der andre Ast wird sich anfangs dem Mittelpunkte nähern und ihn da erreichen, wo $pa\left(\frac{\varphi - \alpha}{\alpha}\right) = a^2$ ist; wo aber $-\sqrt{\left(pa\left(\frac{\varphi - \alpha}{\alpha}\right)\right)}$ grösser als a ist, entfernt auch dieser Ast sich in neuen Windungen vom Mittelpunkte, wie es $Cdef$ zeigt.

§. 601. Erklärung. So wie wir bei der Archimedischen Spirallinie den Abstand $= \varrho$ dem Winkel φ direct proportional annahmen, so könnten wir ihn auch diesem umgekehrt proportional, $\varrho = \frac{a\alpha}{\varphi}$, annehmen. Diese Gleichung hat Aehnlichkeit mit der Gleichung für die Hyperbel, wo die Coordinaten den Asymptoten parallel genommen werden, und die durch sie bestimmte Curve heisst daher die Hyperbolische Spirallinie.

§. 602. Lehrsatz. Die Hyperbolische Spirallinie geht in unzähligen, immer enger werdenden Windungen um den Mittelpunkt herum, ohne diesen je zu erreichen; ihr einer Ast aber erstreckt sich ohne neue Windungen ins Unendliche fort (Fig. 162.).

Beweis. Wenn $BCA = \alpha$ ist, und AB der mit dem Halbmesser $= a$ beschriebene Kreisbogen, so wird $\varrho = a = CA$, wenn $\varphi = \alpha$ ist. Für kleinere Werthe von φ ist $\varrho > a$ und wächst unendlich, je kleiner φ wird, indem mit dem Verschwinden von φ offenbar ein unendlicher Werth von ϱ zusammen

gehören würde. Ist dagegen $\varphi > \alpha$, so ist ϱ kleiner als a; aber wie gross auch φ werden mag, so wird ϱ nie $= o$ werden.

Es sey $ACB = \alpha = \frac{1}{n}\pi$, $XCB = \frac{2}{n}\pi$, so ist $CX = \frac{1}{2} CA$; für die vollendete erste Windung aber, wo $\varphi = 2\pi$ gleich dem ganzen Umfange ist, $CU = \frac{1}{2n} . CA$; für die zweite vollendete Windung, wo $\varphi = 4\pi$ gleich dem doppelten Umfange ist, $Cu = \frac{1}{4n} . CA$, und so ferner.

§. 603. Lehrsatz. Der unendliche Ast der Hyperbolischen Spirale, der ohne Windung fortläuft, hat eine mit CB parallele Asymptote, deren Abstand von CB gleich ist der Länge des Bogens $AB = a . \alpha$, wenn α den Bogen in Theilen des Halbmessers angiebt.

Beweis. Für irgend einen Punkt Z ist $CZ = \frac{a . \alpha}{\varphi}$, und folglich der senkrechte Abstand $ZV = CZ . Sin\, \varphi = \frac{a\alpha . Sin\, \varphi}{\varphi}$. Je kleiner nun φ wird, desto weniger ist $\frac{Sin\, \varphi}{\varphi}$ von dem Werthe $= 1$ verschieden, den er jedoch nie vollkommen erreicht; also wird der senkrechte Abstand irgend eines Punktes Z auf diesem Aste allemal kleiner als $a\alpha$ seyn, und eine in dieser Entfernung parallel mit CB gezogne Linie DE wird immer ausserhalb jenes Astes liegen, obgleich dieser sich ihr unaufhörlich nähert.

§. 604. Wenn man mit andern Halbmessern Kreisbogen WY von CB bis an die Spirallinie zöge, so wäre allemal $WY = \varrho . \varphi = a\alpha$, also alle solche Bogen von gleicher Länge.

§. 605. Erklärung. Die Spirallinie, deren Gleichung ist $\varphi = \alpha . log \frac{\varrho}{a}$, oder wo der Winkel $BCX = \varphi$ (Fig. 163.) dem Logarithmen des Quotienten $\frac{CX}{CA}$ proportional ist, heisst die Logarithmische Spirallinie.

§. 606. Von ihr erhellt leicht, dass sie $\varphi = o$ giebt für $\varrho = a$, dass also die Winkel von dem Radius, der $= a$ ist, an gerechnet werden, und dass ϱ und φ zugleich unaufhörlich wachsen. Für ϱ, kleiner als a, wird φ negativ; und da $log \frac{\varrho}{a}$ einen negativen unendlichen Werth erhält, wenn $\varrho = o$ ist, so wird ϱ erst dann $= o$, wenn φ einen negativen unendlichen Werth hat, das heist, nach unendlich vielen, sich immer mehr verengernden Windungen.

§. 607. Lehrsatz. Diese Curve hat die Eigenschaft, dass in jedem Punkte derselben ihre Tangente gegen den zugehörigen Radius unter einerlei Winkel geneigt ist.

Beweis. Da $\varphi = \alpha \,.\, log\, \frac{\varrho}{a}$, also $e^{\frac{\varphi}{\alpha}} = \frac{\varrho}{a}$ war, so erhält man auch $e^{\frac{\varphi + \Delta\varphi}{\alpha}} = \frac{\varrho + \Delta\varrho}{a}$, oder (Vorbereit. z. höhern Anal. §. 137.)

$$e^{\frac{\varphi}{\alpha}} \left\{ 1 + \frac{\Delta\varphi}{\alpha} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\Delta\varphi}{\alpha}\right)^2 + \text{etc.} \right\} = \frac{\varrho}{a} + \frac{\Delta\varrho}{a},$$

das ist $\Delta\varrho = a \,.\, e^{\frac{\varphi}{\alpha}} \left(\frac{\Delta\varphi}{\alpha} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\Delta\varphi}{\alpha}\right)^2 + \text{etc.} \right)$.

Die Sehne der Spirallinie ist, wie sich leicht übersehen lässt, gegen den Radius unter einem Winkel $= \psi$ geneigt, dessen Tangente

$tang\, \psi = \frac{2\varrho \,.\, Sin\, \frac{1}{2}(\Delta\varphi) \,.\, Cos\, \frac{1}{2}(\Delta\varphi)}{\Delta\varrho + 2\varrho \,.\, Sin\, \frac{1}{2}\Delta\varphi \,.\, Sin\, \frac{1}{2}\Delta\varphi}$ (vergl. §. 595.) ist, oder

$tang\, \psi = \frac{\varrho \,.\, Sin\, \Delta\varphi}{\Delta\varrho + (1 - Cos\, \Delta\varphi)\, \varrho}$, das ist, wenn ich annähernd

$Sin\, \Delta\varphi = \Delta\varphi - \frac{1}{6}(\Delta\varphi)^3$,

$Cos\, \Delta\varphi = 1 - \frac{1}{2}(\Delta\varphi)^2$ (Vorber. z. h. Anal. §. 153.) setze,

$tang\, \psi = \frac{\varrho\, \Delta\varphi\, (1 - \frac{1}{6}(\Delta\varphi)^2)}{\Delta\varrho + \frac{1}{2}\varrho\, (\Delta\varphi)^2}$, oder, wenn ich jetzt bloss die ersten Potenzen der Differenzen beibehalte, für den Winkel, den die Berührungslinie mit dem Radius macht, $tang\, \psi = \frac{\varrho\, \Delta\varphi}{\Delta\varrho} = \frac{a\, \Delta\varphi \,.\, e^{\frac{\varphi}{\alpha}}}{a\, \frac{\Delta\varphi}{\alpha} \,.\, e^{\frac{\varphi}{\alpha}}} = \alpha$, also unveränderlich, und die Logarithmische Spirallinie schneidet alle ihre Radien unter gleichen Winkeln.

4. Die Cycloide.

§. 608. Erklärung. Wenn man sich vorstellt, der Kreis *ABD* (Fig. 163.) werde so über der geraden Linie *AH* fortgewälzt, dass jeder Punkt seines Umfanges zwar mit der Linie *AH* in Berührung komme, sie aber auch sogleich wieder verlasse, so wird, wenn der Kreis in die Lage *EXI* gekommen ist, der Punkt *A*, welcher vorhin in *A* mit der geraden Linie in Berührung war, nun nach *X* gekommen seyn, und es ist der Kreisbogen $EX = AE$. Der Punkt *A*

auf dem Umfange des Kreises beschreibt auf diese Weise, während der Kreis sich wälzt, eine krumme Linie, welche die Cycloide heisst. Der Punkt A heisst der die Cycloide beschreibende Punkt.

§. 609. Wenn der beschreibende Punkt nicht auf dem Umfange des wälzenden Kreises selbst, sondern auf der Verlängerung seines Halbmessers, wie K (Fig. 164.) läge, so ist sein Weg die verkürzte oder verschlungene Cycloide; liegt er dagegen, wie k Fig. 164., innerhalb des Kreises, so beschreibt er die verlängerte oder gedehnte Cycloide.

§. 610. Aufgabe. Gleichungen für die Cycloide zu finden.

Auflösung. 1. Es sey des wälzenden Kreises Halbmesser $= r$, so ist für die gewöhnliche Cycloide, wo der beschreibende Punkt auf dem Kreisumfange liegt (Fig. 163.), der Punkt A nach X gekommen, wenn der Bogen $EX = AE$ ist. Es sey der Winkel $EGX = \varphi$, also $XE = r.\varphi$, und $AE = r.\varphi$, wenn man hier φ in Theilen des Halbmessers ausdrückt *). Da nun zugleich $XF = r.\,Sin\,\varphi$, und $GF = r.\,Cos\,\varphi$ ist, so sind die beiden Coordinaten des Punktes X, $AU = x = r - r.\,Cos\,\varphi$,

$UX = z = r\varphi - r.\,Sin\,\varphi$,

also beide Coordinaten durch φ bestimmt.

Wollen wir z durch x bestimmen, so ist $x = r\,(1 - Cos\,\varphi)$, oder $\frac{r-x}{r} = Cos\,\varphi$, oder φ derjenige Bogen, dessen Cosinus $= \frac{r-x}{r}$, dessen Sinus also $= \frac{\sqrt{(2rx - x^2)}}{r}$ ist; nennen wir also diesen Bogen

$$= Arc\,Cos\,\frac{r-x}{r}, \text{ oder, was dasselbe bedeutet, } = Arc\,Sin\,\frac{\sqrt{(2rx-x^2)}}{r},$$

so ist $z = r.\,Arc\,Sin\,\frac{\sqrt{(2rx-x^2)}}{r} - \sqrt{(2rx - x^2)}$.

2. Um die Gleichung für die verlängerte oder verkürzte Cycloide zu finden, bei welcher der Abstand des beschreibenden Punktes vom Centro kleiner oder grösser als r ist, sey dieser Abstand $= GX = CK = a$ (Fig. 164.). Ist nun der Kreis, indem er sich um den Winkel $\varphi = EGX$ gewälzt hat, in die Stellung EI gekommen, so ist der beschreibende Punkt K nach X gelangt, und es ist nun des Punktes X Abscisse $AU = r - a.\,Cos\,\varphi = x$,

Ordinate $UX = AE - FX = r.\varphi - a.\,Sin\,\varphi = Z$.

*) Wollte man den Winkel in Graden angeben und unter π die bekannte Zahl $= 3{,}14159$ verstehen, so müsste man $EX = r.\pi.\frac{\varphi \text{ Grade}}{180 \text{ Grade}}$ setzen; es ist aber besser, sogleich φ statt $\pi.\frac{\varphi \text{ Grade}}{180 \text{ Grade}}$ zu setzen.

Nenne ich also hier wieder, da $\frac{r-x}{a} = Cos\,\varphi$ ist, $\varphi = Arc\ Cos\,\frac{r-x}{a}$, oder $\varphi = Arc\ Sin\,\frac{\sqrt{(a^2 - r^2 + 2rx - x^2)}}{a}$, so ist

$z = r\,.\,Arc\ Sin\,\frac{\sqrt{(a^2 - (r-x)^2)}}{a} - \sqrt{(a^2 - (r-x)^2)}$ die Gleichung für die verkürzte oder verlängerte Cycloide, je nachdem $a > r$ oder $a < r$ ist.

§. 611. Die Gleichungen $x = r - a\,.\,Cos\,\varphi$
und $z = r\varphi - a\,.\,Sin\,\varphi$,
welche auf die gewöhnliche Cycloide passen, wenn $r = a$ ist, zeigen, dass LM' (Fig. 163. 164), in dem Punkte, wo $AL = r\,.\,3{,}14159 = r\,.\,\pi$ ist, senkrecht auf AL gezogen, die Curve $AM'H$ oder $KM'H$ in zwei ganz gleiche Hälften theilt. Denkt man sich nämlich zwei Werthe von φ, die $= \pi - \omega$ und $= \pi + \omega$, beide gleichviel von 180° verschieden sind, so ist bekanntlich für beide der Werth von $Cos\,\varphi$ ganz gleich $= -Cos\,\omega$, und es erhält also x für beide Werthe von φ einen gleichen Werth, das heisst, die Punkte, bei welchen die Wälzung gleichviel über und unter einen Halbkreis beträgt, liegen in einerlei Entfernung von AL. Für diese Punkte ist aber zugleich
$z = r(\pi - \omega) - a\,.\,Sin\,\omega$ für den einen
und $z = r(\pi + \omega) + a\,.\,Sin\,\omega$ für den andern, weil $Sin(\pi + \omega) = Sin\,\omega$ und $Sin(\pi + \omega) = -Sin\,\omega$ ist; diese Punkte liegen also in der Entfernung $MN = MO$ von LM, weil $AL = r\pi$ ist (Fig. 163.).

Auch AD ist eine Linie, welche die Cycloide in symmetrische Theile theilt; denn wenn man die Wälzung des Kreises auch über A zurück fortgehn lässt, so wird x eben so gross für $-\varphi$ als für $+\varphi$; z aber erhält dann den entgegen gesetzten Werth $z = -r\varphi - a\,.\,Sin\,\varphi$.

§. 612. Wollte man den Anfangspunkt der Coordinaten so verlegen, dass er in LM sich am obern Ende des Kreisdurchmessers befände (Fig. 163.), und setzte dann $u = 2r - x$ und $v = z - r\pi$, so würde $u = r + a\,.\,Cos\,\varphi$, $v = r(\varphi - \pi) - a\,.\,Sin\,\varphi$, oder wenn man den über eine halbe Wälzung hinaus gehenden Winkel $= \psi$, $\psi = \varphi - \pi$ nennte,
$u = r - a\,.\,Cos\,\psi$,
$v = + r\psi - a\,.\,Sin\,\varphi = r\psi + a\,.\,Sin\,\psi$ seyn.

§. 613. Beide Gleichungen zeigen, was sich auch leicht voraussehen liess, dass M' der höchste Punkt der gewöhnlichen Cycloide ist, indem für $\varphi = \pi$, $x = 2r$ wird, und dass der tiefste Punkt da ist, wo $\varphi = o$ war; ferner dass für $\varphi = 2\pi$ wieder $x = o$ wird und $z = 2r\pi$; dass für $\varphi' = 2\pi + \varphi$ eben die Werthe von $x = r - r\,.\,Cos\,\varphi$, und für z eben die, aber um $2\pi r$ vergrösserten Werthe, wie bei $\varphi' = \varphi$, vorkommen. So zeigt also die Gleichung, dass bei wiederholter Wälzung des Kreises die ganze Curve mehrmals aneinan-

der gereiht dargestellt wird. Ganz hiermit übereinstimmend verhält es sich bei der verkürzten und verlängerten Cycloide.

§. 614. Bei der verkürzten Cycloide giebt es offenbar Punkte, wo die Curve in die Abscissenlinie AL einschneidet, wo nämlich $x = o$ wird. Diess geschieht, wenn $r = a \,.\, Cos\,\varphi$ ist (Fig. 164.), und dann ist

$z = AP = r \,.\, Arc\, Cos \frac{r}{a} - \sqrt{(a^2 - r^2)}$; wäre also a zum Beispiel $= 2r$, $\frac{r}{a} = \frac{1}{2} = Cos\, 60° = Cos \frac{\pi}{3}$, so würde $AZ = \frac{r\pi}{3} - r\sqrt{3}$ seyn. Dieser Werth ist negativ, weil anfangs der beschreibende Punkt mehr zurück als der Mittelpunkt vorwärts rückt.

Bei der gewöhnlichen Cycloide wird $x = r$, oder die Curve schneidet die gerade Linie, durch welche des Kreises Centrum fortrückt, wenn $Cos\,\varphi = o$, oder der Wälzungswinkel $= 90° = \frac{1}{2}\pi$ ist, und dann ist

$z = \frac{1}{2} r\pi - r = 0{,}5708 \,.\, r$, weil $\frac{1}{2}\pi = 1{,}5708$ ist. In der verlängerten oder verkürzten Cycloide ist auch $x = r$, wenn $\varphi = \frac{1}{2}\pi$; dann aber ist $z = \frac{1}{2}\pi . r - a$.

§. 615. Aufgabe. Die Lage der Tangente der Cycloide zu finden.

Auflösung. Da $x = r - a \,.\, Cos\,\varphi$,

und $z = r\varphi - a \,.\, Sin\,\varphi$ ist, so bestimmt man am besten, wie x und z sich ändern, wenn φ in $\varphi + \Delta\varphi$ übergeht. Dann wird

$x + \Delta x = r - a \,.\, Cos(\varphi + \Delta\varphi) = r - a \,.\, Cos\,\varphi \,.\, Cos\,\Delta\varphi + a \,.\, Sin\,\varphi \,.\, Sin\,\Delta\varphi$,

$z + \Delta z = r\varphi + r\Delta\varphi - a \,.\, Sin\,\varphi \,.\, Cos\,\Delta\varphi - 2 \,.\, Cos\,\varphi \,.\, Sin\,\Delta\varphi$,

oder da $Sin\,\Delta\varphi = \Delta\varphi - \frac{1}{6}(\Delta\varphi)^3$,

$Cos\,\Delta\varphi = 1 - \frac{1}{2}(\Delta\varphi)^2$ (Vorbereit. zur höhern Analysis §. 153. 154.),

$\Delta x = a \,.\, Sin\,\varphi \,.\, \Delta\varphi + a\frac{1}{2}(\Delta\varphi)^2 \,.\, Cos\,\varphi - \frac{1}{6}a(\Delta\varphi)^3 \,.\, Sin\,\varphi$,

$\Delta z = r\Delta\varphi - a\Delta\varphi \,.\, Cos\,\varphi + a\frac{1}{2}(\Delta\varphi)^2 \,.\, Sin\,\varphi + \frac{1}{6}a(\Delta\varphi)^3 \,.\, Cos\,\varphi$, die Grenze des Quotienten $\frac{\Delta x}{\Delta z}$, oder $\frac{dx}{dz} = tang\,\xi$, wenn ξ den Winkel bedeutet, welchen die Berührungslinie mit AL macht, ist also

$$tang\,\xi = \frac{a \,.\, Sin\,\varphi}{r - a \,.\, Cos\,\varphi} = \frac{r\varphi - z}{x}.$$

§. 616. Der Winkel ξ verschwindet, oder die Berührungslinie wird mit AL parallel, wenn $Sin\,\varphi = o$ wird; dieses geschieht sowohl für $\varphi = o$, als für $\varphi = \pi$, und in der Folge, so oft φ gleich einem Vielfachen von π wird. An allen diesen Stellen ist $\xi = o$, wenn a von r verschieden ist. Für die gewöhnliche Cycloide dagegen, wo $a = r$ ist, tritt eine Unbestimmtheit ein, so oft $\varphi = o$, oder $= 2\pi$, oder $= 2n\pi$ wird, weil alsdann $Cos\,\varphi = +1$ und $r - r\,Cos\,\varphi = o$ ist. Die gewöhnliche Cycloide wird also nur in M' und den ähnlich liegenden Punkten, wo $\varphi = \pi(2n + 1)$ und $Cos\,\varphi = -1$ ist, eine

mit AL parallele Tangente (Fig. 163.) haben, und es muss besonders untersucht werden, was in A und H geschieht.

Die verkürzte Cycloide (Fig. 164.) wird da, wo $x = o$ ist, auf AL senkrecht, das ist in P. Bei der verlängerten Cycloide giebt es keinen solchen Punkt, da x nie $= o$ wird.

§. 617. Lehrsatz. Wenn bei irgend einer Lage IXE des wälzenden Kreises der beschreibende Punkt nach X gekommen ist, so steht die von X nach dem Punkte E, wo der wälzende Kreis die AL berührt, gezogne Sehne des Kreises auf der an X gezognen Tangente der gewöhnlichen Cycloide senkrecht (Fig. 163.), und die verlängerte Tangente trifft das andre Ende I des Durchmessers.

Beweis. Für die gewöhnliche Cycloide ist

$$tang\,\xi = \frac{Sin\,\varphi}{1 - Cos\,\varphi} = \sqrt{\frac{1 + Cos\,\varphi}{1 - Cos\,\varphi}} = Cotang\,\tfrac{1}{2}\,\varphi = tang\,XEG, \text{ also}$$

$XEG = \xi = XZE$, wenn xZ die Tangente ist, folglich

$$XZE + XEZ = 90^\circ = ZXE.$$

§. 618. Lehrsatz. Auch bei der verlängerten oder verkürzten Cycloide steht die Linie, welche von dem in E an der Linie AL anliegenden Punkte des wälzenden Kreises nach dem beschreibenden Punkte X gezogen wird, senkrecht auf der Tangente der Cycloide in X (Fig. 164.).

Beweis. Da $XF = a\,.\,Sin\,\varphi$, und $EF = r - a\,.\,Cos\,\varphi$ ist, so wird

$$tang\,XEG = \frac{a\,.\,Sin\,\varphi}{r - a\,.\,Cos\,\varphi} = tang\,\xi \text{ und } XEG = \xi = XZE, \text{ also auch}$$

hier das Dreieck ZXE bei X rechtwinkelig.

§. 619. Lehrsatz. In der gewöhnlichen Cycloide ist da, wo $x = o$, eine Spitze; in der verkürzten Cycloide ist da, wo $z = o$, nämlich $r\,\varphi = a\,.\,Sin\,\varphi$ ist, ein Knoten.

Beweis. 1. In der gewöhnlichen Cycloide wird für $x = o$, $Cos\,\varphi = 1$, also $Sin\,\varphi = o$, dadurch wird $\Delta x = \frac{1}{2}\,r\,(\Delta\,\varphi)^2$ und $\Delta z = \frac{1}{6}\,r\,(\Delta\,\varphi)^3$, also

$$tang\,\xi = \frac{\frac{1}{2}\,r}{\frac{1}{6}\,r\,(\Delta\,\varphi)} = \infty, \text{ wenn } \Delta\,\varphi \text{ unendlich klein ist; oder genauer zu}$$

reden: $tang\,\xi$ nimmt ohne alle Grenzen zu, die Neigung der Sehne nähert sich immer mehr dem Winkel von 90 Graden, je kleiner man $\Delta\,\varphi$, und je kleiner man folglich auch die Sehne nimmt; die Tangente also erreicht die Neigung $= 90^\circ$. Zugleich erhellt, dass der Punkt ein doppelter ist, weil für $+\Delta\,\varphi$ von der einen Seite her, und für $-\Delta\,\varphi$ von der andern Seite her sich $tang\,\xi$ dem Werthe $= \pm\,\infty$ nähert.

2. In der verkürzten Cycloide wird $tang\,\xi = \dfrac{a\,.\,Sin\,\varphi}{r - a\,.\,Cos\,\varphi}$. Wenn man also dem Winkel φ gleiche positive und negative Werthe beilegt, so erhält

man, da $Cos(-\varphi) = Cos\,\varphi$ ist, gleiche aber entgegen gesetzte Werthe von $tang\,\xi$; das heisst wenn man an Punkten N, O, für welche x denselben Werth hat, Tangenten zieht, so bilden diese mit AL Winkel, welche sich zu zwei rechten ergänzen. Zwei solche Tangenten wird es also auch da geben, wo $r\varphi = a . Sin\,\varphi$ ist, und wo offenbar auch $-r\varphi = a . Sin(-\varphi)$ seyn wird, wo also sowohl bei der rückwärts fortgesetzten, als bei der vorwärts fortschreitenden Wälzung des Kreises der beschreibende Punkt nach Q kömmt, und hier ist folglich ein Knoten.

§. 620. Um den Werth von φ und folglich von x zu finden, wo $z = o$ wird, müsste man die Gleichung $r\varphi = a . Sin\,\varphi$ auflösen. Dieses kann nur auf indirectem Wege geschehen, wenn a in Vergleichung gegen r gegeben ist. Es sey $a = 1{,}5 . r$, so soll $\varphi = 1{,}5 . Sin\,\varphi$ seyn. Da nun der Quadrant 1,570796, und $Sin\,90° = 1$ ist, so erhellt, dass φ nur wenig unter 90 Gr. seyn wird. Es giebt aber $\varphi = 85° = 1{,}4835299$; $1{,}5 . Sin\,85° = 1{,}4942920$;

$\varphi = 86° = 1{,}5009832$; $1{,}5 . Sin\,86° = 1{,}4963461$.

Für $\varphi = 85°$ wird also $\varphi - 1{,}5 . Sin\,\varphi = -0{,}0107621$,
für $\varphi = 86°$ wird $\varphi - 1{,}5 . Sin\,\varphi = +0{,}0046371$,

es sollte aber $= o$ werden. Da sich nun 0,0153992 als Aenderung des Werthes der Gleichung findet, indem sich φ um 60 Min. ändert, so wird die Aenderung von φ betragen müssen $= 60' . \frac{46371}{153992} = u$, und $\varphi = 86° - u = 85°\,48'$ ungefähr betragen. Um den Werth genauer zu finden, muss man aufs neue berechnen:

$\varphi = 85°\,45' = 1{,}4966198$, und $1{,}5 . Sin\,85°\,45' = 1{,}4958753$,
$\varphi = 85°\,43' = 1{,}4960379$ $\quad 1{,}5 . Sin\,85°\,43' = 1{,}4958103$.

Jenes giebt $\varphi - 1{,}5 . Sin\,\varphi = +0{,}0007445$,
dieses dagegen $\varphi - 1{,}5 . Sin\,\varphi = +0{,}0002276$.

Für 2 Min. beträgt also die Aenderung 0,0005169, also für 50 Sec. etwa 0,0002276, und $\varphi = 85°\,42'\,10''$ wird sehr nahe der richtige Werth, also $AP = r - 1{,}5 . r . Cos\,85°\,42'\,10'' = r . 0{,}88760$ seyn.

§. 621. **Lehrsatz.** Die verlängerte Cycloide hat da einen Wendungspunkt, wo $Cos\,\varphi = \frac{a}{r}$ oder $x = \frac{r^2 - a^2}{r}$ ist.

Beweis. Die verlängerte oder gedehnte Cycloide hat in k, wo $z = o$ ist (Fig. 164.), eine mit AL parallele Tangente, oder $tang\,\xi$ wird hier $= o$. Untersucht man nun die Werthe, welche $tang\,\xi$ erhält, wenn φ sich nach und nach ändert, und setzt $tang\,\xi = T = \frac{a . Sin\,\varphi}{r - a . Cos\,\varphi}$, so geht für $\varphi + \Delta\varphi$

$$T \text{ in } T + \Delta T = \frac{a \,.\, Sin\,(\varphi + \Delta\varphi)}{r - a \,.\, Cos\,(\varphi + \Delta\varphi)} =$$

$$= \frac{a \,.\, Sin\,\varphi\,(1 - \frac{1}{2}(\Delta\varphi)^2) + a \,.\, Cos\,\varphi\,(\Delta\varphi - \frac{1}{6}(\Delta\varphi)^3)}{r - a \,.\, Cos\,\varphi\,(1 - \frac{1}{2}(\Delta\varphi)^2) + a \,.\, Sin\,\varphi\,(\Delta\varphi - \frac{1}{6}(\Delta\varphi)^3)}$$

über, und es ist, wenn ich nur die ersten Glieder entwickele,

$$T + \Delta T = \frac{a \,.\, Sin\,\varphi}{r - a \,.\, Cos\,\varphi} + \frac{a \,.\, Cos\,\varphi \,.\, \Delta\varphi}{r - a \,.\, Cos\,\varphi} - \frac{a^2 \,.\, Sin^2\,\varphi \,.\, \Delta\varphi}{(r - a \,.\, Cos\,\varphi)^2} - U(\Delta\varphi)^2.$$

Ich entwickle das Glied, welches $(\Delta\varphi)^2$ enthält, nicht, sondern setze kurz $U(\Delta\varphi)^2$, da leicht erhellt, dass für $\varphi - \Delta\varphi$

$$T - \Delta T = \frac{a \,.\, Sin\,\varphi}{r - a \,.\, Cos\,\varphi} - \frac{a \,.\, Cos\,\varphi \,.\, \Delta\varphi}{r - a \,.\, Cos\,\varphi} + \frac{a^2 \,.\, Sin^2\,\varphi \,.\, \Delta\varphi}{(r - a \,.\, Cos\,\varphi)^2} - U(\Delta\varphi)^2$$

wird, und das Glied $U(\Delta\varphi)^2$ hier, nicht bloss der Grösse nach, dem in $T + \Delta T$ gefundenen gleich wird, sondern auch eben das Zeichen erhält.

Im Allgemeinen ist also $\Delta T = \frac{(r.a.\,Cos\,\varphi - a^2)\,\Delta\varphi}{(r - a \,.\, Cos\,\varphi)^2} - U\Delta\varphi^2$, und da bei sehr kleinen Aenderungen von φ das Glied $U(\Delta\varphi)^2$ unbedeutend wird, so nimmt *tang* ξ für sehr geringe Aenderungen von φ zu, so lange $r \,.\, Cos\,\varphi > a$ ist; wenn dagegen $r \,.\, Cos\,\varphi < a$ wird, so leidet *tang* ξ eine Abnahme. Es hat daher *tang* ξ seinen grössten Werth, oder ξ selbst seinen grössten Werth, wenn $Cos\,\varphi = \frac{a}{r}$ ist; und da an der Stelle, wo die Zunahme des ξ in Abnahme übergeht, ein Wendungspunkt ist, so haben wir diesen hierdurch bestimmt.

§. 622. Den grössten Werth, den *tang* ξ erlangen kann, findet man also, wenn man in dem allgemeinen Werthe $tang\,\xi = \frac{a \,.\, Sin\,\varphi}{r - a \,.\, Cos\,\varphi}$ den eben angegebenen Werth von $Cos\,\varphi' = \frac{a}{r}$, $Sin\,\varphi = \frac{\sqrt{(r^2 - a^2)}}{r}$ setzt, so dass dieser grösste Werth wird $tang\,\xi' = \frac{a\sqrt{(r^2 - a^2)}}{r^2 - a^2} = \frac{a}{\sqrt{(r^2 - a^2)}}$, oder an dieser Stelle ist $tang\,\xi' = Cotang\,\varphi'$, wenn ξ' und φ' die hier statt findenden Werthe jener Grössen sind.

Da also, wo der Wendungspunkt liegt, in p (Fig. 164.), ist der Radius pG zugleich Tangente der gedehnten Cycloide.

Um die Stelle zu finden, wo dieser Wendungspunkt liegt, müsste man also über dem Halbmesser LS einen Halbkreis zeichnen, den Punkt bemerken, wo in T ein mit dem Halbmesser $= a$ um S beschriebener Kreis jenen schneidet, und durch ihn Tp mit AL parallel ziehen.

§. 623. Lehrsatz. Der Krümmungshalbmesser der gewöhnlichen Cycloide ist gleich der doppelten Sehne EG, wenn diese nämlich von dem be-

schreibenden Punkte E nach dem Punkte G gezogen wird, wo der wälzende Kreis die gerade Linie berührt, indem der beschreibende Punkt nach E kömmt (Fig. 165.).

Beweis. Wenn der Mittelpunkt des wälzenden Kreises nach C gekommen ist, G sein Berührungspunkt an AG, und E die Lage des beschreibenden Punktes ist, so ist EG die Normallinie in diesem Punkte (§. 617.), und in ihr muss sich ohne Zweifel der Mittelpunkt des Krümmungskreises befinden, da dieser in E die Cycloide berühren soll. Denkt man sich nun den Kreis um etwas Weniges fort gewälzt, so dass der Mittelpunkt nach D, der beschreibende Punkt nach F gekommen ist, und H der Berührungspunkt ist, so wird FH die Normallinie in F seyn, und der Mittelpunkt des Krümmungskreises sich desto genauer auch in FH befinden, je kleiner der Bogen EF ist. Der Durchschnittspunkt I der beiden Normallinien EG, FH wird also desto genauer den Mittelpunkt des Krümmungskreises angeben, je kleiner der Bogen EF, und folglich je kleiner GH ist.

Nenne ich den Winkel $GCE = \varphi$, $HDF = \varphi + \Delta\varphi$, so ist

$$AG = r\varphi, \quad AH = r\varphi + r\,\Delta\varphi;$$

$$EGA = \tfrac{1}{2}\varphi, \quad FHA = \tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{2}\Delta\varphi;$$

also, wenn I der Durchschnittspunkt der Linien EG, FH ist, $HIG = \frac{1}{2}\Delta\varphi$, und $HI = \dfrac{HG \,.\, Sin\,\frac{1}{2}\varphi}{Sin\,\frac{1}{2}\Delta\varphi} = \dfrac{r\,\Delta\varphi \,.\, Sin\,\frac{1}{2}\varphi}{\frac{1}{2}\Delta\varphi - \frac{1}{6}(\frac{1}{2}\Delta\varphi)^3}$, also desto näher $HI = 2r\,.\,Sin\,\frac{1}{2}\varphi = EG$, und folglich IE desto näher $= 2EG$, je kleiner $\Delta\varphi$ ist, und je unbedeutender deshalb $(\Delta\varphi)^3$ ist.

§. 624. Eben diese Bestimmung liesse sich nach den Formeln in §. 568. erhalten, nur müsste man dann die Aenderung suchen, welche z leidet, wenn x sich um die Differenzen Δx und $2\Delta x$ ändert, also die Aenderungen von φ diesem gemäss und folglich ungleich wären.

5. Die Epicycloide und Hypocycloide.

§. 625. Erklärung. Wenn wir annehmen, dass der Kreis BG (Fig. 166.) sich eben so auf dem Umfange des Kreises BD fortwälze, wie wir uns bei der Cycloide die Wälzung auf der geraden Linie dachten, so durchlauft der beschreibende Punkt B, der sich auf dem Umfange des wälzenden Kreises befindet, die Epicycloide. Hätten wir den beschreibenden Punkt nicht auf dem Umfange des wälzenden Kreises selbst in B, sondern auf dem verlängerten Durchmesser AB in H oder innerhalb des Kreises in h angenommen, so dass diese Punkte bei der Wälzung des Kreises nach I oder nach i kämen, so würde jener die verkürzte Epicycloide, dieser die verlängerte Epicycloide beschreiben.

Lässt man dagegen den Kreis BG (Fig. 167.) sich innerhalb des Kreises BD auf der Peripherie desselben fortwälzen, so beschreibt der auf dem Umfange des wälzenden Kreises liegende Punkt B, indem er nach F gelangt, die Hypocycloide, und auch hier würde H, welches sich auf dem verlängerten Halbmesser befindet, die verkürzte oder verschlungene Hypercycloide beschreiben, und ein innerhalb des Kreises liegender Punkt die verlängerte oder gedehnte Hypercycloide.

§. 626. Aufgabe. Eine Gleichung für die Epicycloide zu finden.

Auflösung. Es sey (Fig. 166.) $CB = R$ der Halbmesser des Kreises, über dessen Umfang sich der andre Kreis vom Halbmesser $AB = r$ fortwälzt, und $AH = a$ sey der Abstand des beschreibenden Punktes von dem Mittelpunkte des letztern. Hat der Kreis sich so fortgewälzt, dass sein Mittelpunkt nach E gekommen ist, und er nun den Kreis, auf welchem die Wälzung geschieht, in D berührt, so wird der beschreibende Punkt nach I gelangt seyn, nämlich sich auf demjenigen Radius EF befinden, welcher einen Bogen $DF = DB$ abschneidet.

Nenne ich also den Winkel $ACE = \varphi$, so ist $BD = R.\varphi$ die Länge des Bogens, und folglich $FD = r.FED, = R.\varphi$, das ist $FED = \frac{R.\varphi}{r}$.

Soll nun der Punkt I, wohin jetzt der beschreibende Punkt gelangt ist, durch Abscissen $CK = x$ auf dem Radius, auf welchem der beschreibende Punkt dem Mittelpunkte C am nächsten kam, und durch Ordinaten $KI = z$ auf diesen senkrecht bestimmt werden, so ist

$$x = CE.\,Cos\,\varphi + IE.\,Sin\,IEL = (R+r)\,Cos\,\varphi + a.\,Sin\left(\frac{R\varphi}{r} - 90° + \varphi\right);$$

$$= (R+r)\,Cos\,\varphi - a.\,Cos\left(\frac{(R+r)\,\varphi}{r}\right);$$

$$z = CE.\,Sin\,\varphi - IE.\,Cos\,IEL = (R+r)\,Sin\,\varphi - a.\,Sin\left(\frac{(R+r)\,\varphi}{r}\right).$$

Bei der gewöhnlichen Epicycloide ist $a = r$, wodurch die Gleichung nicht viel leichter wird.

§. 627. Wollte man hier z durch x ausdrücken, so müsste man φ durch x ausdrücken können, welches aber nur dann bequem möglich ist, wenn $\frac{R+r}{r}$ eine ganze Zahl und eine nicht grosse Zahl zum Quotienten giebt. Im Allgemeinen lässt sich φ ganz aus beiden Gleichungen eliminiren, wenn $\frac{R+r}{r}$ einen rationalen Quotienten giebt; denn wenn $R + r = \frac{m}{n}.r$ ist, so lässt sich

$Sin \frac{m}{n} \varphi$ und $Cos \frac{m}{n} \varphi$ durch $Cos \frac{1}{n}$, und eben so $Sin \varphi$ und $Cos \varphi$ durch $Cos \frac{1}{n} \varphi$ rational ausdrücken, und dann liesse sich allerdings, wenn die Verwickelung der Rechnung nicht zu gross würde, $Cos \frac{1}{n} \varphi$ ganz eliminiren. In solchen Fällen ist also die Epicycloide eine algebraische Curve. Hier nämlich kömmt, nach einem oder nach mehrern Umläufen, der wälzende Kreis allemal endlich wieder in dieselbe Stellung BG, die er zu Anfang hatte, und die Epicycloide besteht also nur aus einer bestimmten Anzahl solcher gleicher Stücke, wie wir sie sogleich näher werden kennen lernen. Ist zum Beispiel $r = \frac{1}{3} R$, so macht der wälzende Kreis genau drei Wälzungen während eines Umlaufs, und der beschreibende Punkt trifft schon nach dem ersten Umlaufe in B wieder ein; ist $r = \frac{3}{5} R$, so kömmt B, nach Vollendung einer Wälzung, da wieder auf dem Umfange des grössern Kreises an, wo der Bogen $= \frac{3}{5} \cdot 360° = 216°$ ist; bei $432°$ oder $360° + 72°$ hat er zwei Wälzungen, bei $648° = 360° + 288°$ hat er drei Wälzungen, bei $864° = 2 \cdot 360° + 144°$ hat er vier Wälzungen, bei $1080° = 3 \cdot 360°$ hat er fünf Wälzungen vollendet und zugleich drei Umläufe gemacht. Und so in allen ähnlichen Fällen. Sind hingegen R und r nicht commensurabel, so trifft bei der Wälzung nie wieder der beschreibende Punkt genau in B ein, und die Epicycloide besteht aus unendlich vielen gleichen Stücken; dann also ist sie eine transscendente Curve.

§. 628. Die allgemeinen Gleichungen

$$x = (R + r) Cos \varphi - a . Cos \left(\frac{(R+r)}{r} \varphi\right),$$

$$z = (R + r) Sin \varphi - a . Sin \left(\frac{(R+r)}{r} \varphi\right),$$

geben auch $x^2 + z^2 = (R+r)^2 + a^2 - 2a(R+r) Cos \frac{R}{r} \varphi$, als das Quadrat der Entfernung CI eines jeden Punktes der Epicycloide vom Mittelpunkte C.

Wäre also als einzelnes Beispiel $R = r$, so hätte man

$$Cos \varphi = \frac{a^2 - x^2 - z^2 + 4r^2}{4ar},$$

also $x = 2r . Cos \varphi - a . Cos 2\varphi = 2r . Cos \varphi - 2a . Cos^2 \varphi + a$,

$$x = a + \frac{a^2 - x^2 - z^2 + 4r^2}{2a} - \frac{(a^2 + 4r^2 - x^2 - z^2)^2}{8ar^2},$$ und so wäre eine rationale Gleichung für die verlängerte oder verkürzte Epicycloide, in welcher $R = r$ ist, dargestellt.

Wäre hier zugleich $a = r$, so würde

$$x = \frac{7r^2 - (x^2 + z^2)}{2r} - \frac{(5r^2 - (x^2 + z^2))^2}{8e^3},$$

oder $8r^3x = 3r^4 + 6r^2(x^2 + z^2) - (x^2 + z^2)^2$,

oder wenn ich $x^2 + z^2 = \varrho^2$ und $\frac{x}{\varrho} = Cos\,\sigma$ nenne,

$8r^3\varrho \,.\, Cos\,\sigma = 3r^4 + 6r^2\varrho^2 - \varrho^4$, eine Gleichung, welche genau mit der für die Cardioide gefundenen (§. 466.) übereinstimmt.

§. 629. Auch für $R = 2r$ liesse sich φ noch ohne grosse Schwierigkeit eliminiren, da alsdann $x^2 + z^2 = 9r^2 + a^2 - 6ar \,.\, Cos\,2\varphi$,

$$\text{also } Cos\,2\varphi = \frac{9r^2 + a^2 - (x^2 + z^2)}{6ar},$$

$$\text{und } Cos^2\varphi = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{9r^2 + 6ar + a^2 - (x^2 + z^2)}{6ar}\right\} \text{ wird, und}$$

sich daraus der Werth von x und z ableiten lässt.

§. 630. **Lehrsatz.** Man erhält jede Epicycloide auf eine doppelte Art, erstlich wenn man auf dem Kreise vom Halbmesser $= R$ den wälzenden Kreis vom Halbmesser $= r$ so fortwälzt, dass der letzte mit seiner convexen Seite den erstern berührt, und zweitens wenn man auf dem erstern vom Halbmesser $= R$ den beweglichen Kreis vom Halbmesser $= R + r$ so fortwälzt, dass jener diesen von innen berührt.

Beweis. Wenn (Fig 168.) C der Mittelpunkt des unbeweglichen Kreises DGH ist, A der Mittelpunkt des von aussen berührten, B der Mittelpunkt des von innen berührten wälzenden Kreises, so soll also, nach unsrer Voraussetzung, $CD = R$, $AD = r$, $BD = R + r$, also $BC = r$ seyn. Wir nehmen die Lage beider wälzenden Kreise zuerst so an, dass der beschreibende Punkt sich in D befindet, indem die drei Mittelpunkte A, C, B in gerader Linie liegen.

Nimmt man nun für den wälzenden Kreis vom Halbmesser $= r$ an, er sey bis G fortgewälzt, und $ACG = \varphi$, so ist der beschreibende Punkt nach X gerückt, und es sind, wie wir schon gesehen haben, des beschreibenden Punktes Coordinaten $CZ = x = (R + r)\,Cos\,\varphi - r \,.\, Cos\,\frac{(R + r)\,\varphi}{r}$;

$$ZX = z = (R + r)\,Sin\,\varphi - r \,.\, Sin\,\frac{(R + r)\,\varphi}{r}.$$

Aber eben die Werthe erhalten wir für die Coordinaten des beschreibenden Punktes auf dem Umfange des grössern wälzenden Kreises, wenn wir für diesen die Wälzung als so weit fortgerückt annehmen, dass der Winkel DCH zwischen dem anfänglichen Berührungspunkte D und dem jetzigen Berührungspunkte H, $= \varphi' = \left(\frac{R + r}{r}\right)\varphi$ geworden ist. Es sey nämlich allgemein

$DCH = \varphi'$, so ist des wälzenden Kreises Mittelpunkt in F, und $CR = r \,.\, Cos\,(180^\circ - \varphi') = - r \,.\, Cos\,\varphi'$, weil $CF = CB = r$ war; aber der beschreibende Punkt liegt jetzt auf dem Umfange HX des grössern wälzenden Kreises so, dass der Bogen $HX = HD$, folglich $HFX = \frac{R}{R+r}\,\varphi'$ ist, indem Bogen $DH = R \,.\, \varphi' = HX = (R+r) \,.\, HFX$ seyn soll; also ist, wenn XS mit AC parallel, FS darauf senkrecht gezogen wird,

$$XFS = \frac{R}{R+r}\,\varphi' - (\varphi' - 90^\circ) = 90^\circ - \frac{r}{R+r}, \text{ und}$$

$$XS = (R+r) \,.\, Sin\, XFS = (R+r) \,.\, Cos\left(\frac{r\,\varphi'}{R+r}\right).$$

Es ist also zur Bestimmung des Punktes X

die Abscisse $CZ = - r \,.\, Cos\,\varphi' + (R+r)\, Cos\left(\frac{r\,\varphi'}{R+r}\right)$,

und die Ordinate $ZX = (R+r)\, Sin\left(\frac{r\,\varphi'}{R+r}\right) - r \,.\, Sin\,\varphi' = FS - FR$, und diese Werthe stimmen mit denjenigen genau überein, die wir für die Lage des beschreibenden Punktes auf dem kleinern Kreise fanden, wenn man $\varphi' = \left(\frac{R+r}{r}\right)\varphi$ nimmt.

§. 631. Ist also zum Beispiel $R = 2r$, oder $AD = \frac{1}{2}\, DC$, wie in Fig. 168., so muss der grössere wälzende Kreis einen dreimal so grossen Weg auf dem ruhenden Kreise zurückgelegt haben als der kleinere, oder es muss $DCH = 3 \,.\, DCG$ seyn, wenn die beschreibenden Punkte beider Kreise in einerlei Lage sollen angekommen seyn.

§. 632. Da der Winkel $GEX = \frac{R}{r} \,.\, DCG$ und auch

$$GCH = \left(\frac{R+r}{r}\right) DCG - DCG = \frac{R}{r} \,.\, DCG$$ seyn soll, so ist $GEX = GCH$, und folglich $CGH = EGX$; die drei Punkte H, G, X liegen also in gerader Linie. Diesen Lehrsatz könnte man so ausdrücken: Wenn man den Durchmesser DCT eines Kreises DHT zieht und auf diesem Kreise den Bogen DG willkürlich, zugleich aber $DH = n \,.\, DG$ nimmt; wenn man ferner einen Kreis von willkürlichem Halbmesser EG zeichnet, der jenen in G von aussen berührt, und einen Kreis vom Halbmesser $FH = n \,.\, EG$ zeichnet, der von DHT in H von innen berührt wird, so liegt der Durchschnittspunkt X der beiden berührenden Kreise auf der verlängerten Sehne HG. Denn wenn $DCG = \varphi$, $DCH = n\,\varphi$, $GE = r$, $FH = nr$ heisst, so ist $HGC = 90^\circ - \frac{1}{2}(n-1)\,\varphi$, und der Punkt X, wo HG den äussern Kreis GX noch einmal schneidet, ist

also so bestimmt, dass $XGE = CGH$ oder $XEG = ECH$ ist, also XE mit FC parallel. Eben so, wenn X den Punkt bezeichnet, wo HG den andern berührenden Kreis HX schneidet, so muss ja $FXH = FHG$, also FX mit CE parallel seyn. Da man nun bei der ersten Betrachtung $EX = CF$ hatte, und bei der zweiten Betrachtung $FX = CE$, so ist für beide Kreise X der Eckpunkt des Parallelogramms, dessen drei übrige Eckpunkte die Mittelpunkte der drei Kreise sind.

§. 633. **Lehrsatz.** Die Normallinie der Epicycloide in jedem Punkte f (Fig. 166.) stimmt allemal überein mit der von f nach dem Berührungspunkte d des wälzenden Kreises gezognen Sehne, wenn nämlich df die Lage des wälzenden Kreises darstellt, bei welcher der beschreibende Punkt nach f gekommen ist.

Beweis. Die Gleichungen für die gewöhnliche Epicycloide (§. 626.) geben $x = (R + r)\, Cos\, \varphi - r\,.\, Cos\, \frac{(R + r)\,\varphi}{r}$,

$$z = (R + r)\, Sin\, \varphi - r\,.\, Sin\, \frac{(R + r)\,\varphi}{r};$$

also $\Delta x = -(R + r)\, \Delta\varphi\,.\, Sin\, \varphi + (R + r)\, \Delta\varphi\,.\, Sin\left(\frac{R + r}{r}\right)\varphi$,

$$\Delta z = \quad (R + r)\, \Delta\varphi\,.\, Cos\, \varphi - (R + r)\, \Delta\varphi\,.\, Cos\left(\frac{R + r}{r}\right)\varphi,$$

wenn ich die folgenden Glieder weglasse, das heisst, wenn ich $Sin\, \Delta\varphi = \Delta\varphi$, und $Cos\, \Delta\varphi = 1$ setze. Daraus folgt

$$\frac{dz}{dx} = tang\, \xi = \frac{Cos\, \varphi - Cos\left(\frac{R + r}{r}\right)\varphi}{-Sin\, \varphi + Sin\left(\frac{R + r}{r}\right)\varphi},$$

wenn ich $GPf = 180° - \xi$ nenne. Daraus folgt

$$Sin\, \xi\,.\, Sin\left(\frac{R + r}{r}\right)\varphi - Sin\, \xi\,.\, Sin\, \varphi = Cos\, \xi\,.\, Cos\, \varphi - Cos\, \xi\,.\, Cos\, \frac{R + r}{r}\,\varphi,$$

oder $Cos\left(\xi - \left(\frac{R + r}{r}\right)\varphi\right) = Cos\,(\xi - \varphi)$; also muss, da nicht $\varphi = \left(\frac{R + r}{r}\right)\varphi$ seyn kann, $\left(\frac{R + r}{r}\right)\varphi - \xi = \xi - \varphi$,

oder $2\xi = \frac{R}{r}\varphi + 2\varphi$ seyn.

Wenn man df zieht, so ist im Viereck $CdfP$ die Summe der vier Winkel $= \varphi + (90° + \tfrac{1}{2}\, \frac{R}{r}\,\varphi) + dfP + 180° - \xi = 360°$, also wenn ich jenen

Werth von ξ benutze, $dfP = 90^\circ - \varphi - \frac{1}{2}\frac{R}{r}\varphi + \xi,$

$$= 90^\circ - \varphi - \frac{1}{2}\frac{R\varphi}{r} + \varphi + \frac{R\varphi}{2r},$$

$$= 90^\circ,$$

df ist also die Normallinie.

§. 634. Aus diesen Betrachtungen ergiebt sich auch, dass die Richtung der Epicycloide auf AC senkrecht ist, da wo die Sehne df mit AC parallel, oder wo $\varphi + \frac{1}{2}\frac{R}{r}\varphi = 90^\circ$, das ist $\varphi = \frac{180^\circ . r}{2r + R}$ ist. Dagegen wird die Berührungslinie mit AC parallel, wenn $\varphi + \frac{1}{2}\frac{R}{r}\varphi = 180^\circ$ ist.

Es erhellt leicht, dass es mehrere Stellen giebt, wo die Richtung der Curve senkrecht auf AC oder mit AC parallel wird. Jenes ist der Fall, wenn $\varphi + \frac{1}{2}\frac{R}{r}\varphi = n . 180^\circ + 90^\circ$ ist, also allgemein, wenn

$$\varphi = \frac{(n . 360^\circ + 180^\circ)\, r}{2r + R} \text{ ist.}$$

Es sey $r = \frac{1}{2}R$, so wird die Tangente auf AC senkrecht (Fig. 166.), wenn $\varphi = 45^\circ$, $x = 3r . Cos\, 45^\circ - r . Cos\, 135^\circ = 4r . Cos\, 45^\circ$,

oder $x = 2r . \sqrt{2}$ ist;

wenn $\varphi = 135^\circ$, $x = -3r . Cos\, 45^\circ - r . Cos\, 45^\circ = -\frac{4r}{\sqrt{2}}$,

wenn $\varphi = 225^\circ$, $x = -3r . Cos\, 45^\circ - r . Cos\, 45^\circ = -\frac{4r}{\sqrt{2}}$, und

wenn $\varphi = 315^\circ$, $x = +\frac{4r}{\sqrt{2}}$ ist.

Es sey $r = \frac{2}{3}R$, so ist die Tangente senkrecht auf AC (Fig. 169.), wenn $\varphi = \frac{2}{7} . 180^\circ$, wenn $\varphi = \frac{6}{7} . 180^\circ$, wenn $\varphi = \frac{10}{7} . 180^\circ$, wenn $\varphi = \frac{14}{7} . 180^\circ = 360^\circ$, wenn $\varphi = \frac{18}{7} . 180^\circ$, wenn $\varphi = \frac{22}{7} . 180^\circ$ ist.

In Fig. 169. ist $DCE = \frac{2}{7} . 180^\circ$, LM die senkrechte Tangente,
$DCF = \frac{6}{7} . 180^\circ$, NO die senkrechte Tangente,
$DCG = \frac{10}{7} . 180^\circ$, PQ die senkrechte Tangente.
In D ist $\varphi = 360^\circ$, und in S die Tangente senkrecht,
$360^\circ + DCH = \frac{18}{7} . 180^\circ$, und RQ die senkrechte Tangente,
$360^\circ + DCI = \frac{22}{7} . 180^\circ$, TO die senkrechte Tangente,
und so würde für $\varphi = \frac{26}{7} . 180^\circ$ noch eine senkrechte Tangente vorkommen. SO ist hier ein Durchmesser, der die ganze Curve in zwei symmetrische Hälften theilt.

§. 635. Der Werth von $tang\, \xi$ giebt auch die Spitzen richtig an. Es kann nämlich $tang\, \xi = \frac{o}{o}$ werden, erstlich wenn $\varphi = o$, zweitens wenn $\varphi + 360° = \frac{(R+r)}{r}\varphi$, oder $\frac{R}{r}\varphi = 360°$ ist, also der wälzende Kreis sich so umgewälzt hat, dass der beschreibende Punkt wieder mit dem Kreise DHF (Fig. 169.) in Berührung ist, und eben das findet statt, wenn $\frac{R\varphi}{r}$ ein Vielfaches von 360° ist.

§. 636. Die übrigen doppelten Punkte würde man auf diese Weise nicht finden, da die beiden hier zusammen treffenden Punkte der Curve nicht demselben Werthe von φ zugehören. Um diese zu bestimmen, dient die Ueberlegung, dass allemal (Fig. 169.)

$$CL = \varrho = \sqrt{(x^2+z^2)} = \sqrt{\left\{(R+r)^2 + r^2 - 2r(R+r)\, Cos\, \frac{R\varphi}{r}\right\}}$$ ist, also ϱ

einerlei Werth erhält, so oft $Cos\left(\frac{R}{r}\varphi\right)$ denselben Werth wieder bekommt. Dieses geschieht also für $\frac{R}{r}\varphi$, für $360° \pm \frac{R}{r}\varphi$ und allgemein für $n.360° \pm \frac{R}{r}\varphi$, oder wenn φ die Werthe φ oder $\frac{nr}{R}.360° \pm \varphi$ erhält. Hat also in Fig. 169., wo $R = \frac{3}{2}r$ war, φ einen bestimmten Werth, zum Beispiel $DCE = \frac{2}{7}.180°$, so kömmt derselbe Werth $\varrho = CL$ wieder, wenn

$$\frac{R}{r}\varphi = 360° - \frac{R}{r}.\tfrac{2}{7}.180° = \tfrac{11}{7}.180°,$$

$$\text{oder} = 360° + \frac{R}{r}.\tfrac{2}{7}.180° = 360° + \tfrac{3}{7}.180°,$$ und so ferner ist, oder wenn $\varphi = \frac{2}{7}.180°$, oder $= \frac{22}{21}.180°$, oder $= (\frac{4}{3} + \frac{2}{7}).180°$ ist. Dieses findet allgemein statt. Soll aber einer der Durchschnittspunkte gefunden werden, so muss zugleich mit ϱ auch z eben den Werth, wie vorhin, erhalten. Es erhält aber, nach einem vollendeten Umlaufe, z wieder eben den Werth, den es für L hatte, im Allgemeinen, wenn der beschreibende Punkt nach U gekommen ist, oder sich irgendwo auf der Linie LU (mit DO parallel) befindet.

Nenne ich also den Werth des Winkels $\varphi = \varphi'$, als der beschreibende Punkt in L, und $= 360° + \varphi''$ als der beschreibende Punkt in U ankam, so soll

$$z' = (R+r)\, Sin\, \varphi' - r.\, Sin\left(\frac{R+r}{r}\right)\varphi'$$

$$= (R+r)\, Sin\, \varphi'' - r.\, Sin\left\{\frac{R+r}{r}.(360° + \varphi'')\right\},$$

oder $(R+r)(Sin\,\varphi' - Sin\,\varphi'') =$

$$= r\left\{Sin\left(\frac{(R+r)\,\varphi'}{r}\right) - Sin\left(\frac{R}{r}\,.\,360^\circ + \left(\frac{R+r}{r}\right)\varphi''\right)\right\}$$

seyn. Wenn man also hier, damit auch ϱ denselben Werth wieder erhalte, $360^\circ + \varphi'' = \frac{rn}{R}\,.\,360^\circ \pm \varphi'$ setzt, so erhält man eine bestimmte Gleichung für φ', welche die Lage des wälzenden Kreises, bei welcher der beschreibende Punkt den Knoten erreicht, angiebt.

Im Allgemeinen würde das zu einer höchst schwierigen Gleichung führen, und selbst im einzelnen Falle ist die Betrachtung nicht leicht. In dem (Fig. 169.) gezeichneten Falle, wo $R = \frac{3}{2}\,r$ war, hätten wir also die zwei Bedingungen, dass $\frac{5}{2}\,(Sin\,\varphi' - Sin\,\varphi'') = Sin\,\frac{5}{2}\,\varphi' - Sin\,(\frac{3}{2}\,.\,360^\circ + \frac{5}{2}\,\varphi'')$

und zugleich $360^\circ + \varphi'' = \frac{2n}{3}\,.\,360^\circ \pm \varphi'$ seyn müsse. Die erste Gleichung giebt auch $\frac{5}{2}\,(Sin\,\varphi' - Sin\,\varphi'' = Sin\,\frac{5}{2}\,\varphi' + Sin\,\frac{5}{2}\,\varphi''$, die zweite $\varphi'' = (\frac{2}{3}\,n - 1)\,360^\circ \pm \varphi'$, wo n jede ganze Zahl bedeuten kann. Zufolge der letztern muss also φ'' entweder $= 120^\circ \pm \varphi'$ oder $360^\circ \pm \varphi'$ seyn, u. s. w., und wenn man einen dieser Werthe für φ'' setzt, so erhält man eine Gleichung für φ', welche die Lage eines Knotens bestimmt. In unserm Falle, der noch zu den leichtern gehört, könnte man bequemer zu einer Bestimmung der Knoten gelangen. Einer derselben liegt, wie sich leicht übersehen lässt, auf dem Durchmesser DO, und für ihn ist also $z = o$, das ist $\frac{5}{2}\,Sin\,\varphi' = Sin\,\frac{5}{2}\,\varphi'$, eine Gleichung, die $\varphi' = 162^\circ\,55'$ giebt. So ergiebt sich also, dass der beschreibende Punkt nach β kömmt, wenn $\varphi = 163^\circ$ ist; die beiden andern Knoten sind um 120 Grade von diesem entfernt.

§. 637. **Aufgabe.** Eine Gleichung für die Hypocycloide zu finden.

Auflösung. Es sey (Fig. 167.) $CB = R$ des ruhenden, $ED = r$ des wälzenden Kreises Halbmesser. Der beschreibende Punkt B war in B mit dem grössern Kreise in Berührung; aber bei der Wälzung des Kreises ist der Mittelpunkt desselben nach E, der beschreibende Punkt nach F gekommen, und deshalb der Bogen BD gleich dem Bogen DF; also wenn $BCD = \varphi$ heisst, $DEF = \frac{R\,.\,\varphi}{r}$.

Um die Lage des Punktes F durch Coordinaten $CX = x$, $XF = z$ zu bestimmen, haben wir hier $CZ = (R - r)\,Cos\,\varphi$; $ZE = (R - r)\,Sin\,\varphi$; $XZ = r\,.\,Sin\,FEZ = r\,.\,Sin\,(180^\circ - \frac{R\,\varphi}{r} - (90^\circ - \varphi)) = r\,.\,Cos\left(\frac{R-r}{r}\right)\varphi$,

also $x = (R - r)\ Cos\ \varphi + r \,.\, Cos \left(\frac{R-r}{r}\right) \varphi;$

$z = (R - r)\ Sin\ \varphi - r \,.\, Sin \left(\frac{R-r}{r}\right) \varphi.$

§. 638. Wäre der beschreibende Punkt nicht auf dem Umfange selbst, oder sein Abstand $= a$ von r verschieden, so würden die letzten Glieder beider Ausdrücke mit a multiplicirt seyn.

§. 639. Wenn man sich statt eines wälzenden Kreises zwei verschiedene denkt, deren einer den Halbmesser $= r$, der andre den Halbmesser $= R - r$, hat, und man lässt jenen durch den Winkel $= \varphi$, diesen durch den Winkel $= \left(\frac{R-r}{r}\right) \varphi$ fortgewälzt seyn, so hat man für die Lage des beschreibenden Punktes bei dem letzten Kreise die Formeln

$$x = (R - (R - r))\ Cos \left(\frac{R-r}{r}\right) \varphi + (R - r)\ Cos \left\{\left(\frac{R - (R - r)}{R - r}\right)\left(\frac{R-r}{r}\right) \varphi\right\},$$

oder $x = r \,.\, Cos \left(\left(\frac{R-r}{r}\right) \varphi\right) + (R - r)\ Cos\ \varphi;$

und

$$z = (R - (R - r))\ Sin\ \frac{R-r}{r}\ \varphi - (R - r)\ Sin \left\{\left(\frac{R - (R - r)}{R - r}\right)\left(\frac{R-r}{r}\right) \varphi\right\},$$

oder $z = r \,.\, Sin \left(\left(\frac{R-r}{r}\right) \varphi\right) - (R - r)\ Sin\ \varphi$, genau so wie vorhin.

Zwei wälzende Kreise, deren Halbmesser $= r$ und $= R - r$ sind, beschreiben also innerhalb des unbeweglichen Kreises vom Halbmesser $= R$ einerlei Hypocycloide, und der beschreibende Punkt kömmt bei der Wälzung des letztern, wenn dieser auf dem unbeweglichen Kreise den Bogen $= \left(\frac{R-r}{r}\right) \varphi$ zurückgelegt hat, eben dahin, wohin er bei der Wälzung des erstern gelangt, nachdem der Bogen $= \varphi$ auf dem unbeweglichen Kreise durchlaufen ist.

§. 640. Wenn $R = 2r$, der Halbmesser des wälzenden Kreises halb so gross, als der des unbeweglichen ist, so geben unsre Gleichungen in §. 637.

$z = r \,.\, Sin\ \varphi - r \,.\, Sin\ \varphi = o,$

$x = 2r \,.\, Cos\ \varphi = R \,.\, Cos\ \varphi$, dann durchläuft also der beschreibende Punkt den Durchmesser des ruhenden Kreises.

Ist $R = 4r$, so wird $x = 3r \,.\, Cos\ \varphi + r \,.\, Cos\ 3\varphi,$

$z = 3r \,.\, Sin\ \varphi - r \,.\, Sin\ 3\varphi;$

$x = r \,.\, \{Cos^3\ \varphi + 3 \,.\, Cos\ \varphi - 3 \,.\, Cos\ \varphi \,.\, Sin^2\ \varphi\} = 4r \,.\, Cos^3\ \varphi;$

$z = r \,.\, \{3 \,.\, Sin\ \varphi - 3 \,.\, Sin\ \varphi \,.\, Cos^2\ \varphi + Sin^3\ \varphi\} = 4r \,.\, Sin^3\ \varphi,$

also $\left(\frac{x}{4r}\right)^{\frac{2}{3}} = Cos^2\,\varphi$; $\left(\frac{z}{4r}\right)^{\frac{2}{3}} = Sin^2\,\varphi$,

das ist $x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = (4r)^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$.

In diesem Falle stimmt also die Hypocycloide mit der in §. 507. 512*. betrachteten Curve überein.

§ 641. Die Bestimmung der Tangente und andre Untersuchungen finden hier fast genau nach der bei der Epicycloide gegebne Anleitung statt, daher ich sie übergehe.

Wie sowohl diese Curven als die Cycloiden in der Mechanik vorkommen und bei Maschinen angewandt werden, muss man in Büchern über die Mechanik nachsehn (Vergl. mein Lehrbuch der Gesetze der Bewegung. **Th. I. S. 118.** und **Th. II. S. 94.** Eytelweins Statik. Th. I. S. 311.).

Zweite Abtheilung.

Untersuchungen über diejenigen geometrischen Bestimmungen, wo nicht alle zu betrachtende Linien und Punkte in einer Ebene liegen.

Erster Abschnitt.

Bestimmung der Lage eines Punktes durch drei Coordinaten. Beziehung auf verschiedene Systeme von Coordinaten.

§. 642. Bemerkung. Wenn nicht alle Punkte, die in der Untersuchung vorkommen, in einer Ebne liegen, so nimmt man eine Ebne als bekannt an, um die Lage jener Punkte auf sie zu beziehen. Sie heisst die Abscissen-Ebne. Jedes Punktes Lage wird nun bestimmt, indem man seinen Abstand von dieser Ebne und zugleich den Punkt angiebt, wo die Abstandslinie in die Abscissen-Ebne eintrifft. Das Letztere geschieht wieder dadurch, dass man in der Abscissen-Ebne eine Abscissenlinie zieht und darauf Ordinaten in der Ebne errichtet.

§. 643. Die Lage jedes Punktes wird hier also durch drei Coordinaten bestimmt, die rechtwinkelig gegen einander oder unter gegebnen Winkeln gegen einander geneigt seyn können; und wenn diese Lage des Punktes einmal gegen eine Ebne gegeben ist, so kann sie nun auch gegen eine andre Ebne, deren Lage gegen jene bekannt ist, bestimmt werden.

§. 644. Man kann diese Bestimmung auch auf folgende Art betrachten. Es sey E (Fig. 171.) der gemeinschaftliche Anfangspunkt der Coordinaten, die wir hier als auf einander senkrecht annehmen wollen, und durch ihn drei auf einander senkrechte Ebnen $ABCD$, $KLMN$, $OPQR$ gelegt, die sich in den Linien FG, HI, ST durchschneiden. Dann giebt, für irgend einen Punkt X, die eine mit EG parallele Ordinate $EY = XV$ den senkrechten Abstand von der dritten Ebne $OPQR$ an, die zweite mit HI parallele Ordinate ZY den Abstand von der zweiten Ebne $KLMN$, die dritte mit ES parallele Ordinate ZX den Abstand von der ersten Ebne $ABCD$ an.

Offenbar sind auch hier die Coordinaten positiv oder negativ, je nachdem der Punkt an der einen oder an der andern Seite dieser Ebnen liegt. Nenne ich also $EY = x$, $YZ = y$, $ZX = z$, so sind 1. alle drei Coordinaten positiv, wenn X sich oberhalb des durch EI, EG begrenzten Theiles der ersten

Ebne befindet, dagegen 2. z negativ und x, y positiv, wenn der Punkt sich unterhalb dieses Theiles der ersten Ebne befindet; 3. wenn der Punkt sich oberhalb FEI befindet, so ist x negativ, y positiv, z positiv; 4. aber senkrecht unterhalb eines Punktes der FEI ist z negativ, x negativ, y positiv; 5. oberhalb HEG ist z positiv, x positiv, y negativ; 6. unterhalb HEG ist z negativ, x positiv, y negativ; 7. oberhalb FEH ist z positiv, x und y negativ; 8. unterhalb FEH sind alle drei Coordinaten negativ. Es versteht sich wohl von selbst, dass man die Ebnen und so auch ihre gemeinschaftlichen Durchschnittslinien EG, EF, EI, EH, ES, ET als unbegrenzt fortgesetzt ansehn muss.

§. 645. Aufgabe. Wenn die Lage eines Punktes X (Fig. 172.) durch auf einander senkrechte Coordinaten $EY = x$, $YZ = y$, $ZX = z$ gegeben ist, die Bestimmung der Lage, in Beziehung auf die Ebne $ABCD$, durch schiefwinkelige Coordinaten $EU = u$, $UW = v$, $WX = w$ auszudrücken.

Auflösung. Damit diess geschehen könne, muss der Winkel $EUW = \alpha$, die Neigung der Ordinate XW gegen die Abscissen-Ebne, das ist $XWZ = \beta$, und endlich die Lage der zwischen den Einschnittspunkten W, Z beider Ordinaten gezognen Linie WZ, das ist der Winkel $WZY = \gamma$, gegeben seyn. Dann ist offenbar $Z = w \,.\, Sin\, \beta$, oder

$$w = \frac{z}{Sin\, \beta}; \quad WZ = z \,.\, Cotang\, \beta.$$

Die Werthe von v und u kann man dadurch finden, dass man die mit x und y parallelen Coordinaten des Punktes W bestimmt, die offenbar $= x - z \,.\, Cotang\, \beta \,.\, Sin\, \gamma$ und $= y - z \,.\, Cotang\, \beta \,.\, Cos\, \gamma$ sind, woraus dann $v = \dfrac{y - z \,.\, Cotang\, \beta \,.\, Cos\, \gamma}{Sin\, \alpha}$;

$$u = x - z \,.\, Cotang\, \beta \,.\, Sin\, \gamma + (y - z \,.\, Cotang\, \beta \,.\, Cos\, \gamma)\, Cotg\, \alpha,$$

oder $u = x + y \,.\, Cotang\, \alpha - \dfrac{z \,.\, Cotang\, \beta \,.\, Cos\, (\alpha - \gamma)}{Sin\, \alpha}$ folgt.

§. 646. Hieraus lässt sich auch umgekehrt x, y, z durch u, v, w, ausdrücken; $z = w \,.\, Sin\, \beta$;

$$y = v \,.\, Sin\, \alpha + w \,.\, Cos\, \beta \,.\, Cos\, \gamma;$$

$$x = u - v \,.\, Cos\, \alpha - w \,.\, Cotg\, \alpha \,.\, Cos\, \beta \,.\, Cos\, \gamma + \frac{w \,.\, Cos\, \beta \,.\, Cos\, (\alpha - \gamma)}{Sin\, \alpha},$$

oder $x = u - v \,.\, Cos\, \alpha + w \,.\, Cos\, \beta \,.\, Sin\, \gamma$.

§. 647. Erklärung. Wenn man sich von allen Punkten der Linie WX (Fig. 172.) senkrechte Linien auf die Ebne $ABCD$ gezogen denkt, so heisst die Linie WZ, worin sich die sämmtlichen Einschnittspunkte der Senkrechten in die Ebne befinden, die Projection der Linie WX auf die Ebne $ABCD$.

§. 648. Bemerkung. Wenn zwei Ebnen gegen einander geneigt sind, wie (Fig. 170.) $GHIK$ gegen $ABCD$, so ist die Lage der einen gegen die

andre bestimmt, wenn man den Neigungswinkel und die Lage der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie GH kennt. Heisst also jener $= \zeta$, und ist $HFE = \eta$ der Winkel, welchen die Durchschnittslinie mit einer gegebnen Linie in jener Ebne macht, so ist alles gegeben, was zu Bestimmung der Lage jener Ebne dient.

Soll nun die Lage des Punktes X, für welchen die auf einander senkrechten Coordinaten $EY = x$, $YZ = y$, $ZX = z$ gegeben waren, in Beziehung auf diese neue Ebne bestimmt werden, so wird man am liebsten den senkrechten Abstand $VX = w$ des Punktes von dieser Ebne angeben und die Lage des Einschnittspunktes V durch senkrechte Coordinaten in der Ebne $FU = u$, $UV = v$, bestimmen. Da nun hier XZ auf die erste, XV auf die zweite Ebne senkrecht ist, so wird (Geom. §. 418.) eine durch VXZ gelegte Ebne auf jene beiden Ebnen senkrecht seyn, folglich (Geom. §. 421.) auf ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie senkrecht seyn, und also die Ebne ihres Neigungswinkels darstellen (Geom. §. 421.). Diese Ebne schneidet also die beiden Ebnen so, dass die Durchschnittslinie ZU, VU, beide auf FH senkrecht sind und einen Winkel $= \zeta$, dem Neigungswinkel gleich, bilden (Geom. §. 413.).

§. 649. Aufgabe. Es ist (Fig. 170.) die Lage eines Punktes X in Beziehung auf eine Abscissen-Ebne $ABCD$ durch rechtwinkelige Coordinaten $EY = x$, $YZ = y$ in der Ebne, und $ZX = z$ senkrecht auf die Ebne gegeben. Wenn nun die Lage der neuen Abscissen-Ebne $GHIK$ bekannt, das heisst, ihr Neigungswinkel $VUZ = \zeta$ und der Winkel $HFE = \eta$, auch der Abstand des Anfangspunktes E, nämlich $FE = f$, gegeben ist, die Lage des Punktes X gegen sie durch senkrechte Coordinaten $FU = u$, $UV = v$ in der Ebne, und $VX = w$ senkrecht auf die Ebne anzugeben.

Auflösung. Es kömmt hier nur auf die Betrachtung der beiden Vierecke $FYZU$ in der ersten Abscissen-Ebne, und $UZXV$ in der Ebne des Neigungswinkels an. In jenem sind bei U und Y rechte Winkel, und es ist

$$FU = u = (f + x)\,Cos\,\eta + y\,.\,Sin\,\eta,$$

und $$UZ = (f + x)\,Sin\,\eta - y\,.\,Cos\,\eta;$$

in dem andern ist $VUZ = \zeta$, und bei V und Z rechte Winkel, also

$$VU = v = UZ\,.\,Cos\,\zeta + z\,.\,Sin\,\zeta,$$
$$= (f + x)\,Sin\,\eta\,.\,Cos\,\zeta - y\,.\,Cos\,\eta\,.\,Cos\,\zeta + z\,.\,Sin\,\zeta;$$
$$VX = w = UZ\,.\,Sin\,\zeta - z\,.\,Cos\,\zeta,$$
$$= (f + x)\,Sin\,\eta\,.\,Sin\,\zeta - y\,.\,Cos\,\eta\,.\,Sin\,\zeta - z\,.\,Cos\,\zeta.$$

§. 650. Es lässt sich leicht übersehen, wie nun auch x, y, z durch u, v, w ausgedrücht werden, indem

$$z = v\,.\,Sin\,\zeta - w\,.\,Cos\,\zeta;$$
$$UZ = v\,.\,Cos\,\zeta + w\,.\,Sin\,\zeta;$$
$$y = u\,.\,Sin\,\eta - UZ\,.\,Cos\,\eta;$$
$$f + x = u\,.\,Cos\,\eta + UZ\,.\,Sin\,\eta.$$

§. 651. Aufgabe. Die Lage des Punktes ist durch schiefwinkelige Coordinaten u, v, w in Beziehung auf eine Abscissen-Ebne gegeben; man soll seine Lage durch schiefwinkelige Coordinaten u', v', w' in Beziehung auf eine zweite Abscissen-Ebne angeben.

Auflösung. Es sey, wie in §. 645., der Winkel $= \alpha$ derjenige, den u und v mit einander bilden, β sey der Neigungswinkel, der w gegen die erste Abscissen-Ebne, und γ der Winkel, welchen die Projection der w mit v macht, so ist (§. 646.) für Coordinaten, die sich auf eben die Abscissen-Ebne beziehen und gegen einander senkrecht sind,

$$x = u - v \,.\, Cos\,\alpha + w \,.\, Cos\,\beta \,.\, Sin\,\gamma;$$
$$y = v \,.\, Sin\,\alpha + w \,.\, Cos\,\beta \,.\, Cos\,\gamma;$$
$$z = w \,.\, Sin\,\beta.$$

Sucht man hieraus eben so, wie in §. 649., die auf die neue Abscissen-Ebne senkrechte Ordinate z', die mit der Durchschnittslinie beider Ebnen parallele Coordinate x' und die darauf senkrechte Coordinate y', unter Voraussetzung, dass ζ, η und f hier eben das, wie in §. 649. bedeuten, so ist

$$x' = (f + x)\, Cos\,\eta + y \,.\, Sin\,\eta;$$
$$y' = (f + x)\, Sin\,\eta \,.\, Cos\,\zeta - y \,.\, Cos\,\eta \,.\, Cos\,\zeta + z \,.\, Sin\,\zeta;$$
$$z' = (f + x)\, Sin\,\eta \,.\, Sin\,\zeta - y \,.\, Cos\,\eta \,.\, Sin\,\zeta - z \,.\, Cos\,\zeta.$$

Endlich kann man aus diesen auf die neue Ebne bezognen, unter einander senkrechten Coordinaten andre u', v' in der Ebne und w' gegen die Ebne geneigt, vermittelst der Formeln §. 645. herleiten, wenn die Richtung dieser schiefwinkelig geneigten Coordinaten gegeben ist.

§. 652. Bemerkung. Man könnte auch den Abstand des Punktes X von einem in der Abscissen-Ebne gegebnen Punkte E bestimmen (Fig. 170.) und die Lage der Abstandslinie vermittelst ihres Neigungswinkels $= \mu$ und der Lage ihrer Projection angeben; dann wäre durch die drei Grössen $EX = \varrho$, Neigungswinkel $XEZ = \mu$, und den Winkel $ZEY = \nu$ die Lage des Punktes X vollkommen bestimmt.

§. 653. Aufgabe. Formeln anzugeben, wodurch ϱ, μ, ν vermittelst der senkrechten Coordinaten $EY = x$, $YZ = y$, $ZX = z$, und umgekehrt diese durch jene bestimmt werden (Fig. 170.).

Auflösung. Es ist $\varrho = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$; $tang\,\mu = \dfrac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$; und $tang\,\nu = \dfrac{y}{x}$. Und eben so leicht $z = \varrho \,.\, Sin\,\mu$; $\sqrt{(x^2 + y^2)} = \varrho \,.\, Cos\,\mu$; $y = \varrho \,.\, Cos\,\mu \,.\, Sin\,\nu$, $x = \varrho \,.\, Cos\,\mu \,.\, Cos\,\nu$.

Diese Werthe gelten, wenn der Anfangspunkt der Coordinaten zugleich derjenige ist, von welchem die Abstandslinie EX ausgeht; wäre das nicht der

Fall, so müsste man noch einige vorläufige Bestimmungen für diesen Punkt zu Hülfe nehmen.

Zweiter Abschnitt.

Ueber die Bestimmung von Linien, die nicht in der Abscissen-Ebne liegen.

§. 654. **Bemerkung.** Es ist einleuchtend, dass auch hier bestimmte Aufgaben, welche die Lage eines Punktes, der sich nicht in der Abscissen-Ebne befindet, anzugeben verlangen, und unbestimmte Aufgaben, welche uns nur den geometrischen Ort eines Punktes kennen lehren, vorkommen können. Die Auflösung der ersteren wird allemal dadurch zu Stande gebracht werden, dass man die Coordinaten des verlangten Punktes bestimmt, oder andre Mittel, um seine Lage bequem anzugeben, auffindet; bei der Auflösung der andern aber können mehrere verschiedene Fälle vorkommen.

Der Punkt nämlich, dessen geometrischer Ort bestimmt werden soll, kann sich entweder auf einer geraden oder krummen Linie befinden, oder für seine Lage kann eine solche Unbestimmtheit statt finden, dass er jede Stelle in irgend einer ebnen oder krummen Fläche einnehmen könnte. Ein Fall der letztern Art ist ja unstreitig der, wo für den gesuchten Punkt keine andre Bestimmung statt findet, als dass sein Abstand von einem gegebnen $= a$ seyn soll; denn da ist jeder Punkt der Kugeloberfläche vom Halbmesser $= a$, deren Mittelpunkt mit dem gegebnen Punkte zusammen fällt, der Bedingung entsprechend. Aber auch, wenn der geometrische Ort des Punktes eine Linie ist, so kann hier die Schwierigkeit ihrer Bestimmung grösser seyn, wenn sie nicht in der Abscissen-Ebne selbst liegt, und es kann hier sogar Fälle geben, wo nicht die ganze Curve in **einer** Ebne liegt.

§. 655. **Erklärung.** Wenn eine krumme Linie ganz in einer Ebne liegt, so heisst sie eine **ebne Curve**, dagegen eine **doppelt gekrümmte Linie**, wenn eine durch drei Punkte derselben gelegte Ebne nicht zugleich alle übrige Punkte der Curve enthält.

Ein Beispiel einer solchen doppelt gekrümmten Linie giebt die Schraubenlinie, indem sie nicht in einer Ebne liegt.

§. 656. **Bemerkung.** Um die Beschaffenheit einer Linie, die nicht in der Abscissen-Ebne liegt, kennen zu lernen, ist es meistens am vortheilhaftesten, sich von allen Punkten der Linie Senkrechte gegen die Acscissen-Ebne gezogen zu denken; eine Gleichung für die Linie zu suchen, in welcher sich alle Einschnittspunkte jener senkrechten Linien in die Abscissen-Ebne befinden, und die nun die **Projection** jener Linie auf die Abscissen-Ebne

heisst; und endlich anzugeben, wie entfernt von dieser Ebne jeder, einem bestimmten Punkte der Projection entsprechende Punkt unsrer Curve liegt.

§. 657. Aufgabe. Es sind drei Punkte H, I, K gegeben (Fig. 173.) und ihre Abstände von einem vierten Punkte Z, man sucht die Lage dieses vierten Punktes durch Coordinaten zu bestimmen.

Auflösung. Wenn ich den vierten Punkt durch die drei auf einander senkrechten Coordinaten $AX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ zu bestimmen suche und für die gegebnen Punkte H, I, K die drei Coordinaten $AB = a$, $AD = a'$, $AF = a''$, mit x parallel, $BC = b$, $DE = b'$, $FG = b''$ mit y parallel, und $CH = c$, $EI = c'$, $GK = c''$ mit z parallel, als gegeben annehme, so ist
$CY^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$

$$HZ^2 = (z - c)^2 + CY^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2.$$

Die Entfernungen $HZ = D$, $IZ = D'$, $KZ = D''$ sind gegeben, also

$$D^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - 2by + y^2 + c^2 - 2cz + z^2;$$
$$D'^2 = a'^2 - 2a'x + x^2 + b'^2 - 2b'y + y^2 + c'^2 - 2c'z + z^2;$$
$$D''^2 = a''^2 - 2a''x + x^2 + b''^2 - 2b''y + y^2 + c''^2 - 2c''z + z^2;$$

die zwei ersten geben:

$$D^2 - D'^2 = (a^2 - a'^2) + (b^2 - b'^2) + (c^2 - c'^2) - 2(a - a')x - 2(b - b')y - 2(c - c')z;$$

$$\text{also } z = \frac{(a^2 - a'^2) + (b^2 - b'^2) + (c^2 - c'^2) - (D^2 - D'^2) - 2(a - a')x - 2(b - b')y}{2(c - c')}.$$

Eben so giebt die erste und dritte Gleichung

$$z = \frac{(a^2 - a''^2) + (b^2 - b''^2) + (c^2 - c''^2) - (D^2 - D''^2) - 2(a - a'')x - 2(b - b'')y}{2(c - c'')},$$

und die Verbindung beider giebt einen Werth von y durch x ausgedrückt, durch welchen man mit Hülfe einer der zuerst gegebnen Gleichungen x bestimmen kann.

§. 658. Hätte man die durch die drei Punkte H, I, K gelegte Ebne selbst als Abscissen-Ebne angenommen, so wären die Abstände c, c', c'' von dieser Ebne $= o$ und folglich

$$D^2 - D'^2 = (a^2 - a'^2) + (b^2 - b'^2) - 2(a - a')x - 2(b - b')y,$$

$$\text{also } y = \frac{(a^2 - a'^2) + (b^2 - b'^2) - (D^2 - D'^2) - 2(a - a')x}{2(b - b')}$$

$$\text{und auch } y = \frac{(a^2 - a''^2) + (b^2 - b''^2) - (D^2 - D''^2) - 2(a - a'')x}{2(b - b'')},$$

also x leicht zu bestimmen.

§. 659. Aufgabe. Für die Lage des Punktes Z (Fig. 173.) sind nur die Abstände von zwei Punkten H und I, gegeben, man sucht den geometrischen Ort des Punktes Z.

Auflösung. Wenn man auch hier $AB = a$, $BC = b$, $CH = c$, $AD = a'$, $DE = b'$, $EI = c'$, $HZ = D$, $IZ = D'$, $AX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ setzt und die Coordinaten als auf einander senkrecht annimmt, so wird eben so, wie vorhin,

$$z = \frac{(a^2 - a'^2) + (b^2 - b'^2) + (c^2 - c'^2) - D^2 - D'^2 - 2(a-a')x - 2(b-b')y}{2(c-c'^2)},$$

und dieser Werth müsste in die (§ 657.) für D^2 und D'^2 gefundenen Werthe gesetzt werden.

Um die Ausdrücke bequemer zu machen, wollen wir annehmen, die Abscissenlinie gehe durch C und E, und C sey der Anfangspunkt, so ist, wenn ich in Beziehung auf diese Abscissenlinie des Punktes Z Coordinaten x', y', z' nenne (wobei zu bemerken ist, dass $z' = z$ bleibt), nun $b = b' = o$, und $a = o$, CE sey $= A$, und es wird

$$z = \frac{-A^2 + c^2 - c'^2 - D^3 + D'^2 + 2Ax'}{2(c-c')},$$

und $D^2 = x'^2 + y'^2 + c^2 - 2cz + z^2$, also

$$y'^2 = D^2 - x'^2 - (c-z)^2 = D^2 - x'^2 - \frac{((c-c')^2 + A^2 + D^2 - D'^2 - 2Ax')^2}{4(c-c')^2},$$

weil $c - z = \dfrac{(c-c')^2 + A^2 + D^2 - D'^2 - 2Ax'}{2(c-c')}$ ist.

Diese Gleichung für y' zeigt, dass alle Punkte unsrer gesuchten Curve senkrecht über der durch diese Gleichung des zweiten Grades ausgedrückten Projection liegen, und diese Projection ist eine Ellipse, da der Coefficient von x'^2 negativ ist (§. 282.).

Um einen bequemern Ausdruck zu erhalten, verlege ich den Anfangspunkt der Abscissen in den Mittelpunkt der Projection, das ist, ich setze

$$x' = u + \tfrac{1}{2}A\left(1 + \frac{D^2 - D'^2}{(c-c')^2 + A^2}\right),$$

oder $(c-c')^2 + A^2 + D^2 - D'^2 - 2Ax' =$

$$-2Au + (c-c')^2\left\{\frac{(c-c')^2 + A^2 + D^2 - D'^2}{(c-c')^2 + A^2}\right\},$$

also

$$y'^2 = D^2 - \tfrac{1}{4}A^2\left\{\frac{(c-c')^2 + A^2 + D^2 - D'^2}{(c-c')^2 + A^2}\right\}^2 - Au\left\{\frac{(c-c')^2 + A^2 + D^2 - D'^2}{(c-c')^2 + A^2}\right\}$$

$$- u^2$$

$$- \frac{A^2u^2}{(c-c')^2} - \frac{(c-c')^2}{4}\left\{\frac{(c-c')^2 + A^2 + D^2 - D'^2}{(c-c')^2 + A^2}\right\}^2 + Au\left\{\frac{(c-c')^2 + A^2 + D^2 - D'^2}{(c-c')^2 + A^2}\right\},$$

oder

$$y'^2 = D^2 - \tfrac{1}{4}\frac{((c-c')^2 + A^2 + D^2 - D'^2)^2}{(c-c')^2 + A^2} - \frac{u^2\{A^2 + (c-c')^2\}}{(c-c')^2}.$$

Hiermit ist also die Projection völlig bekannt, und vermittelst der für z gegebenen Gleichung kann für jedes u, da man das zugehörige y' kennt, auch z, das ist die Höhe über einem gegebenen Punkte der Projection, gefunden werden.

Damit aber die Natur unsrer Curve selbst noch genauer erkannt werde, wollen wir uns CE in L so getheilt denken, dass $CL = \frac{1}{2} A \left\{ 1 + \frac{D^2 - D'^2}{(c-c')^2 + A^2} \right\}$ sey. Dann ist L der Anfangspunkt der Abscissen u, oder L der Mittelpunkt der Projection.

Es erhellt leicht, dass $HI^2 = A^2 + (c - c')^2$ ist, ich will daher $A^2 + (c - c')^2 = E^2$ setzen, also $CL = \frac{1}{2} A \left(1 + \frac{D^2 - D'^2}{E^2} \right)$. Zieht man nun durch L die Senkrechte LM, bis sie in HI eintrifft, so ist $LM = c + (c' - c) \cdot \frac{CL}{A} = c + \frac{(c' - c)}{2} \left(1 + \frac{D^2 - D'^2}{E^2} \right)$; der Punkt Z liegt also um so viel, als $z - LM$ beträgt, höher als M, und da u, y', z die Coordinaten des Punktes Z, aber o, o, LM die Coordinaten des Punktes M sind (indem L der Anfangspunkt der u, y' war), so ist

$$MZ^2 = u^2 + y^2 + (z - LM)^2 = u^2 + D^2 - \tfrac{1}{4} \frac{(E^2 + D^2 - D'^2)^2}{E^2} - \frac{u^2 E^2}{(c-c')^2}$$
$$+ \left(z - c - \frac{(c' - c)}{2} \left(\frac{E^2 + D^2 - D'^2}{E^2} \right) \right)^2.$$

Das letzte Glied wird, weil $z - c = \frac{- E^2 - D^2 + D'^2 + 2 A x'}{2(c - c')}$, oder $z - c = \frac{Au}{c - c'} - \frac{1}{2} (e - c') \left\{ \frac{E^2 + D^2 - D'^2}{E^2} \right\}$ ist, den Werth $= \frac{A^2 u^2}{(c - c')^2}$ erhalten, und es ist also

$$MZ^2 = D^2 - \tfrac{1}{4} \frac{(E^2 + D^2 - D'^2)^2}{E^2} - \frac{u^2 (E^2 - (c - c')^2)}{(c - c')^2} + \frac{A^2 u^2}{(c - c')^2};$$

also da $E^2 = A^2 + (c - c')^2$ ist

$$MZ^2 = D^2 - \tfrac{1}{4} \frac{(E^2 + D^2 - D'^2)^2}{E^2}.$$

Es ist also jeder Punkt Z unsrer Curve von M gleich weit entfernt und über das $D^2 - MZ^2 = \frac{1}{4} \frac{(E^2 + D^2 - D'^2)}{E^2}$. Da nun

$$LM - c = \tfrac{1}{2} (c' - c) \left(1 + \frac{D^2 - D'^2}{E^2} \right)$$

und $CL = \frac{1}{2} A \left(1 + \frac{D^2 - D'^2}{E^2} \right)$ ist,

so wird $CL^2 + (LM - c)^2 = \frac{1}{4}(A^2 + (c' - c)^2)\left(\frac{E^2 + D^2 - D'^2}{E^2}\right)^2$,

oder $CL^2 + (LM - c)^2 = \frac{1}{4}\frac{(E^2 + D^2 - D'^2)^2}{E^2} = D^2 - MZ^2$, das heisst,

weil $CL^2 + (LM - c)^2 = HM^2$ ist,

$HM^2 = D^2 - MZ^2$.

Das Dreieck HMZ ist also allemal bei M rechtwinkelig, wo man auch auf unsrer gesuchten Curve den Punkt Z nehme; daher liegen alle Punkte unsrer Curve in der durch M auf HI senkrechten Ebne, zugleich alle gleich entfernt von M; unsre Curve ist also ein Kreis.

§. 660. Bemerkung. Dieses Beispiel zeigt zuerst, wie man die Lage der Curve durch zwei Gleichungen bestimmen muss, wenn sie nicht in der Abscissen-Ebne liegt, durch eine Gleichung nämlich, welche die Projection auf der Abscissen-Ebne angiebt, und durch eine zweite, welche die Höhe über jedem Punkte der Projection bestimmt; es zeigt aber auch zweitens, dass wir uns dennoch, obgleich die Curve nicht in der Abscissen-Ebne liegt, überzeugen können, dass sie eine ebne Curve ist, wenn wir nur Mittel finden, die Lage der Ebne, in welcher sie liegt, anzugeben.

Eine solche Bestimmung durch zwei Gleichungen findet nun auch für doppelt gekrümmte Linien statt, und man lernt die Linie vollkommen kennen, wenn man entweder eine Projection und den senkrechten Abstand der Curve von jedem Punkte der Projection kennt, oder auch, indem man zwei Projectionen auf Ebnen, welche gegen einander senkrecht sind, angiebt.

§. 661. Erklärung. Die Schraubenlinie erhält man, wenn man auf der Oberfläche eines geraden Cylinders, dessen auf die Axe senkrechte Querschnitte Kreise sind, eine Linie so zieht, dass für jeden Theil ihres Bogens die senkrechte Entfernung von der Grundfläche des Cylinders der Länge des Bogens proportional wachse.

§. 662. Aufgabe. Die zwei Gleichungen anzugeben, durch welche die Schraubenlinie bestimmt wird.

Auflösung. 1. Wenn man die Projection auf der Grundfläche des Cylinders sucht und die senkrechten Abstände von ihr bestimmt, so ist jene offenbar ein Kreis, die Grundfläche des Cylinders selbst. Wir rechnen die Abscissen $= x$ und Ordinaten $= y$ in der Ebne der Grundfläche vom Mittelpunkte des Kreises, dessen Halbmesser $= r$ ist, an; dann ist $y^2 = r^2 - x^2$ die Gleichung für diese Projection. Da nun die Schraubenlinie die Eigenschaft haben soll, dass (Fig. 174.) die Höhe $ZX = z$ allemal ihrem Bogen AZ oder dem Kreisbogen AX proportional seyn soll, so ist $z = n . AX$; oder da AX gleich

$r \cdot \varphi$ ist, wenn $ABX = \varphi$, oder $Cos\,\varphi = \frac{x}{r}$, oder $\varphi = Arc\,Cos\,\frac{x}{r}$, so ist

$z = n \cdot r \cdot Arc\,Cos\,\frac{x}{r}$ die zweite Gleichung.

2. Wollte man die Projection auf eine gegen die Grundfläche senkrechte Ebne, auf welcher BA senkrecht stände, suchen, so müsste man die beiden Gleichungen so verbinden, dass man zuerst für die Projection eine Gleichung zwischen y und z erhielte, die offenbar

$z = n \cdot r \cdot Arc\,Sin\,\frac{y}{r} = n \cdot r \cdot Arc\,Cos\,\frac{\sqrt{(r^2 - y^2)}}{r}$ seyn würde, und dann als zweite Gleichung $x = \sqrt{(r^2 - y^2)}$ für den Abstand von jedem Punkte der Projectionangabe. In der so bestimmten Projection würde also z so gefunden, dass sie dem Bogen, welcher zum Sinus $= \frac{y}{r}$ gehört, proportional wäre, also da $0{,}1 = Sin\,5^\circ\,45' = Sin\,arc\,0{,}1003$, so gehört zu $y = 0{,}1 \cdot r$ eine Ordinate $z = 0{,}1003 \cdot n \cdot r$; zu $y = 0{,}5 \cdot r$, eine Ord. $z = n \cdot r \cdot Arc\,Sin\,0{,}5 = n \cdot r \cdot 0{,}5236$, zu $y = 1 \cdot r$, eine Ord. $z = n \cdot r \cdot Arc\,Sin\,1 = n \cdot r \cdot 1{,}5708$, zu $y = 0{,}5 \cdot r$, eine Ord. $z = n \cdot r \cdot Arc\,Sin\,0{,}5 = n \cdot r \cdot \frac{150^\circ}{180^\circ} \cdot \pi = n \cdot r \cdot 2{,}6180$ und so ferner. Dieselben Werthe des Sinus gehören nämlich, wie bekannt, zu Bogen unter und über 90 Grad, und es wird daher, wenn man φ vergrössert, y zwar die vorigen Werthe wieder erhalten, aber nur auf andre Bogen zu beziehen seyn, also wenn $y = o$ wird, die Ordinate $z = n \cdot r \cdot \pi = n \cdot r \cdot 3{,}1416$; wenn $y = -1$, wird $z = n \cdot r \cdot \frac{3}{2} \cdot \pi$; wenn y wieder $= o$ wird, $z = n \cdot r \cdot 2 \cdot \pi$ und so weiter.

Dritter Abschnitt.

Allgemeine Betrachtungen über die Bestimmung von Flächen durch Gleichungen, und nähere Untersuchung der Flächen der ersten Ordnung.

§. 663. **Bemerkung.** Wenn die Lage eines Punktes durch eine Gleichung zwischen drei unbestimmten Grössen, zwischen drei Coordinaten, angegeben wird, so ist dadurch nicht eine Linie, sondern eine Fläche bestimmt, auf welcher der Punkt sich befinden soll. Hier nämlich ist, indem zum Beispiel $z = \frac{x^2}{a} + \frac{nxy}{b} + y$ seyn soll, eine völlige Unbestimmtheit der Grössen x und y, und indem ich beide nach Willkür wähle, wird jedesmal ein neuer Werth von z bestimmt. Nehme ich in Fig. 172. $x = FY$ und verbinde damit

für y den Werth $y = YZ$, so giebt die Gleichung für z an, wie hoch der gesuchte Punkt, den wir in allen Lagen, welche er erhalten kann, zu betrachten vorhaben, über Z liegt; hätten wir dagegen $y = YQ$ genommen, so würden wir die Höhe finden, die er haben muss, wenn er senkrecht über Q liegt, und so könnten wir für jeden Punkt in der Abscissen-Ebne einen Werth für z erhalten, so dass also die ganze über der Abscissen-Ebne hin sich erstreckende Fläche, deren Höhe in jedem Punkte dem Werth von z entspräche, der geometrische Ort jenes Punktes seyn würde.

§. 664. Da, wo bloss eine Linie durch drei Coordinaten bestimmt wurde, geschah es dadurch, dass eine Gleichung zwischen x und y die Punkte in der Abscissen-Ebne angab, von welchen aus man eine Senkrechte ziehen musste, um den geometrischen Ort des Punktes zu treffen; hier hingegen sind alle Punkte der Abscissen-Ebne, — oder wenigstens alle, die zwischen gewissen Grenzen liegen, — brauchbar, um in der von ihnen aus gezognen Senkrechten den verlangten Punkt zu finden.

§. 665. Aufgabe. Eine Gleichung für die Kugelfläche zu finden.

Auflösung. Da die Haupteigenschaft der Kugeloberfläche die ist, dass alle Punkte derselben vom Mittelpunkte C gleich weit entfernt sind (Fig. 175.), so sey C der Anfangspunkt der Coordinaten, und in der Abscissen-Ebne $ABDE$ die Abscisse $CU = x$, $UV = y$, senkrecht gegen x gezogen. Dann ist ja $CV^2 = x^2 + y^2$, und wenn für irgend einen Punkt Z der Kugelfläche die auf die Abscissen-Ebne Senkrechte $VZ = z$ ist, so wird $CZ = \sqrt{(z^2 + CV^2)}$ $= \sqrt{(z^2 + x^2 + y^2)}$. In der Kugeloberfläche ist aber jeder Punkt Z gleich weit um den Halbmesser $= r$ vom Mittelpunkte entfernt, also $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, wodurch eine der drei Coordinaten bestimmt wird, wenn man den beiden übrigen willkürliche Werthe giebt.

Nimmt man zum Beispiel $x = \frac{1}{2} r$, $y = o$, so ist $z^2 = r^2 - \frac{1}{4} r^2$; nimmt man $x = \frac{1}{2} r$, $y = \frac{1}{2} r$, so ist $z^2 = \frac{1}{2} r^2$; nimmt man $x = \frac{1}{2} r$, $y = \frac{3}{4} r$, so ist $z^2 = r^2 - \frac{1}{4} r^2 - \frac{9}{16} r^2 = \frac{3}{16} r^2$; und alle so bestimmte Punkte liegen oberhalb der einzigen Senkrechten UV, die in der Entfernung $CU = \frac{1}{2} r$ vom Mittelpunkte gegen die Abscissenlinie gezogen ist.

§. 666. Bemerkung. Auch hier unterscheidet man die Gleichungen für die Fläche, so wie es früher bei Gleichungen für Linien der Fall war, nach dem Grade, zu welchem sie gehören.

Die allgemeinste Gleichung für Flächen der ersten Ordnung ist
$a = mx + ny + z$, wo m und n Zahlen bedeuten, der Coefficient von z aber $= 1$ gesetzt ist, indem man, wenn er ein andrer wäre, die Gleichung durch Division leicht auf diese Form zurückführt.

Die allgemeinste Form für Flächen der zweiten Ordnung ist

$$z^2 + lzy + mzx + ny^2 + pyx + qx^2 + ax + by + cz + f^2 = o.$$

§. 667. **Bemerkung.** Um eine Fläche näher kennen zu lernen, ist es nothwendig, die Durchschnittslinien zu kennen, welche sie mit Ebnen macht, deren Lage bekannt ist. Wir würden zum Beispiel eine Fläche für eine Ebne anerkennen, wenn wir fänden, dass ihre Durchschnittslinien mit allen Ebnen gerade Linien würden.

§. 668. **Lehrsatz.** Zu den Flächen der ersten Ordnung gehört allein die Ebne.

Beweis. Wenn wir aus der allgemeinen Gleichung für Flächen der ersten Ordnung $a = mx + ny + z$ die Eigenschaften dieser Flächen zu bestimmen suchen, so stellen wir uns x, y als Coordinaten in der Abscissen-Ebne, z aber als darauf senkrecht vor. Es erhellt hier sogleich, dass z hier alle mögliche, positive und negative Werthe erhalten kann, indem keine der Ordinaten unmöglich werden kann, welchen Werth man auch z gebe.

Setzen wir nun zuerst $z = o$, so ist $a = mx + ny$ die Gleichung für die Durchschnittslinie unsrer Fläche mit der Abscissen-Ebne; denn wo die letztere gar keine Entfernung $= z$ von dieser hat, $z = o$ ist, da schneiden sie einander. Die Gleichung $a = mx + ny$ gehört einer geraden Linie, welche die Abscissenlinie da schneidet, wo $x = \frac{1}{m} a$, und welche unter dem Winkel $= \alpha$, dessen Tangente $= -\frac{m}{n}$ ist, gegen die Abscissenlinie geneigt ist. Genau eben so würde man die Durchschnittslinien unsrer Fläche der ersten Ordnung, mit den beiden übrigen durch den Anfangspunkt der Coordinaten parallel mit zwei Ordinaten gelegten Ebnen (Fig. 171.), bestimmen und sie als gerade Linien erkennen.

Aber auch, wenn wir die Durchschnittslinie unsrer Fläche mit einer Ebne, die der Abscissen-Ebne parallel ist, suchen, so finden wir eine gerade Linie. Denken wir uns eine Ebne in der Entfernung $= b$ von der Abscissen-Ebne parallel mit ihr gelegt, so wird der senkrechte Abstand irgend eines Punktes unsrer Fläche von dieser Ebne allgemein $z - b$ seyn. Setze ich also $z = b$, so bestimme ich die Punkte unsrer Fläche, die in dieser parallelen Ebne selbst liegen, und folglich ist die Gleichung für die Durchschnittslinie mit ihr,

$$a - b = mx + ny,$$

abermals eine gerade Linie, die gegen die x unter eben dem Winkel $= \alpha$, dessen Tangente $= -\frac{m}{n}$, geneigt ist. Also alle Durchschnittslinien unsrer Fläche mit Ebnen, der Abscissen-Ebne parallel, sind gerade unter sich parallele (Geometrie §. 401.) Linien. Dasselbe lässt sich für Ebnen, die mit x und z oder mit y und z parallel sind, zeigen.

Um ganz allgemein zu übersehen, dass unsre Fläche mit allen Ebnen

gerade Durchschnittslinien hat, wollen wir uns nun eine geneigte Ebne, so wie in §. 649., denken, deren Neigungswinkel gegen die Abscissen-Ebne $= \zeta$, und deren Durchschnittslinie mit der Abscissen-Ebne gegen x unter dem Winkel $= \eta$ geneigt ist. Dann ist (§. 650.), wenn $f = o$,

$$z = v \,.\, Sin\,\zeta - w \,.\, Cos\,\zeta;$$
$$y = u \,.\, Sin\,\eta - v \,.\, Cos\,\eta \,.\, Cos\,\zeta - w \,.\, Cos\,\eta \,.\, Sin\,\zeta;$$
$$x = u \,.\, Cos\,\eta + v \,.\, Sin\,\eta \,.\, Cos\,\zeta + w \,.\, Sin\,\eta \,.\, Sin\,\zeta,$$

wenn u, v Coordinaten in der neuen Abscissen-Ebne, w die senkrechten Abstände von derselben bedeuten.

Unsre Gleichung $a = mx + ny + z$ wird also in Beziehung auf diese neue Ebne durch

$$a = (m.\,Cos\,\eta + n.\,Sin\,\eta)\,u + (m.\,Sin\,\eta.\,Cos\,\zeta - n.\,Cos\,\eta.\,Cos\,\zeta + Sin\,\zeta)\,v$$
$$+ (m.\,Sin\,\eta.\,Sin\,\zeta - n.\,Cos\,\eta.\,Sin\,\zeta - Cos\,\zeta)\,w$$

ausgedrückt, und für $w = o$ erhält man, als Gleichung für die Duchschnittslinie unsrer Fläche mit der neuen Abscissen-Ebne,

$$a = u\,(m.\,Cos\,\eta + n.\,Sin\,\eta) + v\,(m.\,Sin\,\eta.\,Cos\,\zeta - n.\,Cos\,\eta.\,Cos\,\zeta + Sin\,\zeta),$$

eine Gleichung, die ebenfalls einer geraden Linie angehört.

Gäbe man w einen immer gleichen Werth $= b$, so erhielte man die Gleichung für die Durchschnittslinie mit einer Ebne, die in der Entfernung $= b$ mit jener parallel gelegt ist, und es lässt sich wieder leicht zeigen, dass diese letztere mit jener parallel ist.

§. 669. **Aufgabe.** Aus der Gleichung $a = mx + ny + pz$ die Lage der dadurch dargestellten Ebne gegen die Abscissen-Ebne anzugeben.

Auflösung. Da $z = o$ wird, wenn $y = \frac{1}{n}\,a - \frac{m}{n}\,x$, so liegt die Durchschnittslinie unsrer Ebne mit der Abscissen-Ebne so, dass sie die Abscissenlinie in der Entfernung $x = \frac{1}{m}\,a$ vom Anfangspunkte trifft und mit ihr den Winkel $= \alpha$ bildet, dessen Tangente $tang\,\alpha = -\frac{m}{n}$ ist. Denken wir uns also (Fig. 170.) FU als diese Durchschnittslinie, nennen $FY = x - \frac{1}{m}\,a$, $YZ = y$, $FU = u$, $UZ = v$, so ist

$$x - \frac{1}{m}\,a = u\,.\,Cos\,\alpha + v\,.\,Sin\,\alpha = -\frac{nu + mn}{\sqrt{(m^2 + n^2)}},$$
$$y = u\,.\,Sin\,\alpha - v\,.\,Cos\,\alpha = \frac{mu + nv}{\sqrt{(m^2 + n^2)}},$$

also wird z, als Abstand von der Abscissen-Ebne $ABCD$, durch

$$a = a + \frac{m^2 v - mnu}{\sqrt{(m^2 + n^2)}} + \frac{nmu + n^2 v}{\sqrt{(m^2 + n^2)}} + pz$$ angegeben, das ist

$$z = -v \cdot \frac{\sqrt{(m^2 + n^2)}}{p}.$$

Da v mit der Durchschnittslinie einen rechten Winkel macht, und z gegen die Abscissen-Ebne senkrecht ist, so steht die Ebne UZX sowohl auf der Abscissen-Ebne, als auf der Ebne, die wir eben betrachten, senkrecht, und UZX ist die Ebne des Neigungswinkels beider gegen einander. Offenbar ist $\frac{z}{v} = tang$ des Neigungswinkels, $= tang\ \zeta$, also $tang\ \zeta = -\frac{\sqrt{(m^2 + n^2)}}{p}$.

§. 670. Dass $tang\ \alpha$ sowohl als $tang\ \zeta$ einen negativen Werth erhält, rührt daher, weil für grosse positive x und y, z nothwendig negativ wird, wenn m, n, p positiv sind. Die Ebne liegt also, wenn m, n, p positive Zahlen sind, so, dass $UFY = \alpha$ ein stumpfer, und auch der Neigungswinkel ζ ein stumpfer Winkel wird.

§. 671. Aufgabe. Es ist die Lage dreier Punkte durch Coordinaten
$x = f$, $y = g$, $z = h$, für den ersten,
$x = f'$, $y = g'$, $z = h'$, für den zweiten,
$x = f''$, $y = g''$, $z = h''$, für den dritten gegeben; man sucht die Lage der durch diese drei Punkte gelegten Ebne gegen die Abscissen-Ebne.

Auflösung. Da die Lage völlig bestimmt ist, wenn man die Winkel α und ζ kennt, diese aber durch $\frac{m}{n}$ und $\frac{\sqrt{(m^2 + n^2)}}{p}$ so leicht bestimmt werden, so wollen wir in der Gleichung $a = mx + ny + pz$ die Grössen a, m, p als die zu bestimmenden ansehen, n aber als Einheit betrachten, dann ist $tang\ \alpha = -m$, $tang\ \zeta = -\frac{\sqrt{(1 + m^2)}}{p}$; die drei Grössen a, m, p müssen also aus den drei Gleichungen

$$a = mf + g + ph,$$
$$a = mf' + g' + ph',$$
$$a = mf'' + g'' + ph'',$$

bestimmt werden. Sie geben

$$m(f' - f) + g' - g + p(h' - h) = o,$$
$$m(f'' - f) + g'' - g + p(h'' - h) = o,$$

also

$$m = \frac{(g'' - g)(h' - h) - (g' - g)(h'' - h)}{(f' - f)(h'' - h) - (f'' - f)(h' - h)};$$

$$p = \frac{(g'' - g)(f' - f) - (g' - g)(f'' - f)}{(h' - h)(f'' - f) - (h'' - h)(f' - f)};$$

und

$$a = \frac{fg'h'' - fg''h' + f'g''h - f'gh'' + f''gh' - f''g'h}{(h' - h)(f'' - f) - (h'' - h)(f' - f)},$$

wodurch die Lage der Ebne bestimmt ist.

§. 672. Aufgabe. Die Lage zweier Ebnen in Beziehung auf die Abscissen-Ebne ist gegeben; man sucht die Lage der Durchschnittslinie beider Ebnen.

Auflösung. Man ziehe in der Abscissen-Ebne eine Abscissenlinie, welche in beide Durchschnittslinien jener Ebnen mit der Abscissen-Ebne einschneidet. Der Winkel, den diese Durchschnittslinie mit der Abscissenlinie macht, heisse $= \alpha$ für die erste, $= \alpha'$ für die zweite Ebne; der Abstand des Punktes, wo die Durchschnittslinie die Abscissenlinie schneidet, vom Anfangspunkte der Abscissen, sey $= f$ für die erste, $= f'$ für die zweite; endlich sey der Neigungswinkel der Ebne gegen die Abscissen-Ebne $= \zeta$ für die erste, $= \zeta'$ für die zweite.

Setzen wir also, nach §. 669., $f = \frac{1}{m} a$, $tang\, \zeta = -\frac{\sqrt{\left(\frac{m^2}{n^2} + 1\right)}}{\frac{p}{n}}$,

$tang\, \alpha = -\frac{m}{n}$, oder $\frac{m}{n} = -tang\, \alpha$, $\frac{p}{n} = -\frac{Sec\, \alpha}{tang\, \zeta}$, $\frac{a}{n} = \frac{m}{n} f = -f . tang\, \alpha$,

so ist die Gleichung für die erste Ebne, die dort allgemein $\frac{a}{n} = \frac{m}{n} x + y + \frac{p}{n} z$ war, hier $-f . tang\, \alpha = -x . tang\, \alpha + y - \frac{z . Sec\, \alpha}{tang\, \zeta}$, und eben so für die zweite Ebne $-f' . tang\, \alpha' = -x . tang\, \alpha' + y - \frac{z . Sec\, \alpha'}{tang\, \zeta'}$.

Für jeden Werth von x und y, als Coordinaten in der Abscissen-Ebne, wird also z für die eine und für die andre Ebne bestimmt werden,

$$z = tang\, \zeta\, ((f - x)\, Sin\, \alpha + y . Cos\, \alpha),$$
$$z = tang\, \zeta'\, ((f' - x)\, Sin\, \alpha' + y . Cos\, \alpha').$$

Diese Werthe, die in den meisten Fällen ungleich ausfallen, sind gleich, da wo beide Ebnen sich schneiden; da also ist

$$y\, (Cos\, \alpha . tang\, \zeta - Cos\, \alpha' . tang\, \zeta') = f' . tang\, \zeta' . Sin\, \alpha' - f . tang\, \zeta . Sin\, \alpha + x\, (tang\, \zeta . Sin\, \alpha - tang\, \zeta' . Sin\, \alpha'),$$

und dieses ist die Gleichung für die Projection der gesuchten Durchschnittslinie auf die Abscissen-Ebne. Nimmt man nämlich für einen willkürlichen Werth von x das y so an, wie diese Gleichung fordert, so hat man einen Punkt in der durch die gesuchte Durchschnittslinie senkrecht auf die Abscissen-Ebne gesetzten Ebne, und z wird nun durch beide obige Gleichungen gleiche Werthe erhalten.

§. 672*. Dass aus jenen Bestimmungen der Winkel, welchen die Projection der Durchschnittslinie mit der Abscissenlinie macht, und der Neigungs-

winkel der Durchschnittslinie gegen die Abscissen-Ebne gefunden wird, erhellt leicht.

§. 673. Aufgabe. Es sind zwei gerade Linien gegeben, man soll die Lage einer Ebne bestimmen, die durch die eine derselben gelegt und mit der andern parallel ist.

Auflösung. Es sey (Fig. 176.) AC die Linie, mit welcher die Ebne parallel seyn soll, so ist es am bequemsten, ihre Projection AB selbst als Abscissenlinie anzunehmen. IK sey die Linie, durch welche die Ebne soll gelegt werden, und zu deren Bestimmung die Coordinaten zweier Punkte I und K in ihr gegeben sind.

Offenbar ist die gesuchte Ebne diejenige, in welcher die mit AC parallel durch I und K gezogenen Linien sich befinden. Da nun $CAB = \gamma$ die Neigung der AC gegen die Abscissen-Ebne gegeben ist, so hat man auch $KQH = IPG = \gamma$, wenn KQ, IP mit CA, und QH, PG mit AB parallel sind. Die Coordinaten der Punkte I und K mögen $AE = -f$, $AF = -f'$, $EG = g$, $FH = g'$, $GI = h$, $HK = h'$ heissen, so ist $QH = h' \,.\, Cotang\, \gamma$, $PG = h \,.\, Cotang\, \gamma$, wenn QH und PG in der Abscissen-Ebne liegen. PQ ist die Durchschnittslinie unsrer gesuchten Ebne mit der Abscissen-Ebne, und ihre Lage ist durch $tang\; QPG = \frac{g' - g}{PT - QH} = \frac{g' - g}{(f - f') + (h - h')\, Cotang\, \gamma}$ bestimmt. Der Neigungswinkel der Ebne $PIKQ$ wird aber nun leicht gefunden, da die Ebne IPS auf QPS senkrecht steht, also in dem rechtwinkeligen körperlichen Dreiecke an P der Flächenwinkel $IPQS = \zeta$ durch

$tang\, \zeta = \frac{tang\, \gamma}{Sin\; QPS}$ angegeben wird.

§. 674. Aufgabe. Es sind zwei Linien IK und AC (Fig. 176.) gegeben, man sucht den kleinsten Abstand, der zwischen beiden statt findet.

Auflösung. Wenn die geraden Linien IK, AC nicht in einer Ebne liegen, so können sie sich nicht schneiden; es giebt aber einen Punkt, wo der gegenseitige Abstand am kleinsten ist. Dieser kleinste Abstand ist gleich dem senkrechten Abstande der Linie AC von der durch IK mit AC parallel gelegten Ebne; denn zu einem geringern Abstande von AC kann IK offenbar nicht kommen, indem sie ganz in der Parallel-Ebne liegt. Sie erreicht aber diesen kleinsten Abstand da, wo die auf $PIKQ$ gezeichnete Projection der AC die IK schneidet, oder wo die durch AC auf $PIKQ$ senkrecht gesetzte Ebne diese schneidet.

§. 675. Bemerkung. Die ganze Perspective beruht auf Betrachtungen, die hierher gehören. Sie hat nämlich zu ihrem Gegenstande die Frage, in welchem Punkte der Tafel $ABCD$ (Fig. 177.) die von allen Punkten des abzubildenden Körpers nach dem Auge O gezognen geraden Linien in die Tafel $ABCD$ eintreffen; denn wenn man diese kennt, so hat man eine Abzeichnung in dieser

Ebne, welche dem Auge in O jenen Körper völlig bedeckt, und also, wenn man Schattirung u. s. w. hinzudenkt, genau eben so wie der Körper selbst erscheint.

§. 676. Aufgabe. Eine gerade Linie, deren Lage gegeben ist, auf die Tafel $ABCD$ so aufzutragen, dass dem Auge in O das Bild der Linie diese selbst zu bedecken scheint (Fig. 177.)

Auflösung. Wenn OE senkrecht von dem Auge auf die Tafel gefället ist, und OEF die auf die Tafel $ABCD$ senkrechte, durch das Auge gehende Ebne ist, so wollen wir EF die Mittellinie der Tafel nennen. Ist nun auf der Tafel die Linie CD senkrecht gegen FE gezogen, so können wir folgende Fälle unterscheiden.

Erster Fall. Die gegebne Linie gh sey mit CD parallel. Dann lässt sich ja durch gh eine Ebne auf die Tafel senkrecht setzen, und diese wird die Tafel so schneiden, dass die Durchschnittslinie auf EF senkrecht ist. AB sey diese Durchschnittslinie. Da das Bild der Linie gh in der Durchschnittslinie der Ebne Ogh mit der Tafel liegen muss, die Ebne Ogh aber mit AB parallel ist (Geom. §. 393.), so ist auch das Bild ik der Linie gh mit AB parallel, weil es mit AB und auch mit gh in einer Ebne liegt. Man findet aber die Entfernung Fk dieser Parallellinie von der AB durch die Formel $Fk = \frac{FE \,.\, gl}{OE + gl}$, wo gl senkrecht auf AB, und wegen der bekannten Stellung des Auges und der bekannten Lage der Linie die Grössen FE, gl, OE gegeben sind. Zugleich findet man den Abstand ki des Punktes, wohin das Bild des Endpunktes g fällt, durch den Ausdruck $ki = \frac{lF \,.\, (FE - EK)}{EF}$.

Zweiter Fall. Wenn die Linie zwar nicht mit AB parallel ist, aber doch in einer durch AB auf die Tafel senkrecht gesetzten Ebne liegt. —

gm sey eine solche Linie, so wird der Endpunkt g sich im Bilde nach i auftragen lassen, wenn man die Senkrechte $gl = a$ und den Abstand von der Mitte $lF = b$ kennt; es ist nämlich, wie vorhin, der Punkt i durch

$$Fk = \frac{a \,.\, FE}{OE + a},$$

$$ki = \frac{b \,.\, OE}{OE + a} \text{ bestimmt.}$$

Aber wenn man eben so den Abstand des Punktes m von AB bestimmt $= a'$, und die Entfernung von der Mitte $= b'$, so ist für das Bild n des Punktes m, die Höhe $Fp = \frac{FE \,.\, a'}{OE + a'}$, Abstand von der Mittellinie

$$np = \frac{b' \,.\, OE}{OE + a'}. \quad \text{Man hat also } \operatorname{tang} kin = \frac{Fp - Fk}{ik - np}.$$

Dritter Fall. Wenn die Linie nicht in jener Ebene liegt. Dann kann man durch beide Endpunkte Ebnen legen, die auf die Tafel senkrecht sind und mit ihr Durchschnittslinien, der AB parallel, bilden, und das Bild beider Punkte, so wie vorhin, auf die Tafel bringen.

§. 677. Der zweite Fall führt noch zu einem andern merkwürdigen Resultate.

Denkt man sich von einem Punkte g der Linie gm die Senkrechte gl gegen AB gezogen, und ist diese zugleich senkrecht auf die Tafel $ABDC$, so bestimmt man leicht das Bild einer durch l gehenden, mit gm parallelen Linie lq. Wenn wieder $lF = b$, und zugleich $qlF = \alpha$, also $qF = b \,.\, tang\ \alpha$ ist, so schneidet die von q nach O gezogne Linie nun die Mittellinie FE so, dass $Fr = \frac{b \,.\, tang\ \alpha \,.\, EF}{OE + b \,.\, tang\ \alpha}$ ist, und lr ist also das Bild von lq. Verlängert man lr, bis sie CE in P schneidet (wo CE parallel mit AB ist und durch den Einschnittspunkt E der Senkrechten OE geht), so ist

$$EP = \frac{lF \,.\, Er}{Fr} = \frac{b \,.\, EF\left(1 - \frac{b \,.\, tang\ \alpha}{OE + b \,.\, tang\ \alpha}\right)}{\frac{b \,.\, tang\ \alpha \,.\, EF}{OE + b \,.\, tang\ \alpha}} = OE \,.\, Cotang\ \alpha,$$

das ist OP macht mit CDP den Winkel $= \alpha$, oder OP ist mit lq, folglich mit gm parallel.

Wenn man in, das Bild der gm, verlängert, bis die Verlängerung in CD einschneidet, und die Entfernung von E bis zum Einschnittspunkte $= z$ nennt, so ist $z = Es \,.\, tang\ EsP = (Ek - ik \,.\, tang\ i)\ tang\ EsP,$
$= Ek \,.\, Cotang\ i - ik.$

$$\text{Aber } Ek = FE - Fk = \frac{FE \,.\, OE}{OE + a};$$

$$tang\ nik = \frac{FE \,.\, a' (OE + a) - FE \,.\, a (OE + a')}{b \,.\, OE (OE + a') - b' \,.\, OE (OE + a)};$$

$$= \frac{FE (a' - a)}{(b - b') \,.\, OE + ba' - b'a};$$

$$\text{also } Ek \,.\, Cotang\ nik = \frac{OE}{OE + a} \left\{\frac{(b - b') \,.\, OE + ba' - b'a}{a' - a}\right\}$$

$$\text{und } ik = \frac{b \,.\, OE}{OE + a};$$

also $z = Ek \,.\, Cotang\ i - ik = \frac{OE (b - b')}{a' - a} = OE \,.\, Cotang\ \alpha$, weil offenbar $tang\ mgh = tang\ \alpha = \frac{a' - a}{b - b'}$ ist. Es ist also $z = EP$, und die Bilder

aller Parallellinien zu lq, die in der Ebne $glmF$ liegen, treffen in CD in einem einzigen Punkte P zusammen, den man findet, indem man CP mit gm parallel zieht.

§. 678. Der Grund hiervon lässt sich auch so übersehen. Zieht man OP durch den eben bestimmten Punkt P, so ist OP mit gm parallel, und wenn man sich Ebnen denkt, die, sämmtlich durch OP gelegt, in die Ebne $glFm$ einschneiden, so sind ihre Einschnittslinien in die letztern Parallellinien zu gm und zu OP. Aber alle diese Ebnen schneiden die Tafel so, dass die Durchschnittslinien in P, wo OP die Tafel trifft, zusammen laufen. (Vergl. Eytelweins Handbuch der Perspective §. 14.)

Vierter Abschnitt.

Von der Kugelfläche, Cylinderfläche und Kegelfläche, und den Durchschnittslinien, welche sie mit Ebnen bilden.

1. Von der Kugelfläche.

§. 679. Bemerkung. Schon oben (§. 665.) fanden wir eine Gleichung, die jeden Punkt in der Kugelfläche bestimmte, indem, wenn r der Kugel Halbmesser ist, und ein Punkt in irgend einer durch den Mittelpunkt gelegten Ebne durch Coordinaten x, y bestimmt wird, der senkrechte Abstand der Kugelfläche $= z$ von jener Ebne hier $= z = \sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)}$ ist.

§. 680. Aufgabe. Die Durchschnittslinie irgend einer Ebne mit der Kugelfläche durch eine Gleichung zu bestimmen (Fig. 178.).

Auflösung. C sey der Kugel Mittelpunkt, $DEGF$ die schneidende Ebne, die gegen die Abscissen-Ebne unter dem Winkel $= \zeta$ geneigt ist. CB sey die Linie, welche in der Abscissen-Ebne auf die Durchschnittslinie DE dieser mit jener schneidenden Ebne senkrecht gezogen ist.

Nehmen wir nun CB als Abscissenlinie an, $CX = x$, $XY = y$ darauf senkrecht, also mit BD parallel, $YZ = z$ auf die Abscissen-Ebne senkrecht, so ist, wenn Z auf der Kugelfläche liegt, $z^2 = r^2 - x^2 - y^2$. Und wenn ich in der Ebne $DEGF$ die Linien BH, UV auf BD senkrecht ziehe und $BU = y$, $UV = v$, $VZ = w$, $CB = f$ setze, so ist (§. 650.) $z = v \,.\, Sin\, \zeta - w \,.\, Cos\, \zeta$,

$$f - x = v \,.\, Cos\, \zeta + w \,.\, Sin\, \zeta,$$

und YU ist hier mit XB parallel. Also

$$(v \,.\, Sin\, \zeta - w \,.\, Cos\, \zeta)^2 = r^2 - y^2 - (f - v \,.\, Cos\, \zeta - w \,.\, Sin\, \zeta)^2,$$

eine Gleichung, wodurch allgemein der Abstand $= w$ von der Ebne $DEGF$ für jeden Punkt der Kugelfläche angegeben wird, wenn man durch y und v den Punkt auf der Ebne bestimmt, wo die Senkrechte eintreffen soll.

Für die Punkte, wo unsre Ebne in die Kugelfläche einschneidet, ist $w = o$, da also muss $v^2 . Sin^2 \zeta = r^2 - y^2 - f^2 + 2fv . Cos \zeta - v^2 . Cos^2 \zeta$,

$$\text{oder } v^2 - 2fv . Cos \zeta = r^2 - y^2 - f^2,$$
$$v = f . Cos \zeta \pm \surd\{r^2 - y^2 - f^2 . Sin^2 \zeta\} \text{ seyn; oder}$$
$$(v - f . Cos \zeta)^2 = r^2 - f^2 . Sin^2 \zeta - y^2.$$

Diese Gleichung gehört offenbar einem Kreise vom Halbmesser $= \surd(r^2 - f^2 . Sin^2 \zeta)$ zu, dessen Mittelpunkt auf BH in der Entfernung $= f . Cos \zeta$ von B liegt.

Setzt man durch CB eine Ebne auf die Abscissen-Ebne senkrecht, so schneidet diese die $DEGF$ in BH, und eine Senkrechte, von C auf $DECF$ gefället, giebt den Abstand des Mittelpunkts C von dieser Ebne, $= f . Sin \zeta$, an, und diese Senkrechte trifft BH in W, wo $BW = f . Cos \zeta$ ist. Der Mittelpunkt jenes Kreises, den wir sls Durchschnittslinie fanden, liegt also da, wo diese Senkrechte von C aus die Ebne trifft, und der Halbmesser des Kreises ist $= \surd(r^2 - f^2 . Sin^2 \zeta)$.

§. 681. Wäre die Lage der Ebne so, dass des Mittelpunktes C Abstand von ihr grösser als r oder $f . Sin \zeta > r$ wäre, so würde es keine Durchschnittslinie mehr geben. Wäre $f . Sin \zeta = r$, so würde der Halbmesser des Durchschnittskreises $= o$, also ginge die Durchschnittslinie in einen Punkt über, oder die Ebne wäre eine bloss berührende, und der nach dem Berührungspunkte gezogne Radius wäre selbst die Senkrechte auf die berührende Ebne.

§. 682. Bemerkung. Es ist schon aus der Geometrie bekannt, dass man vier Punkte willkürlich annehmen darf, um eine Kugelfläche zu bestimmen. Eben das lässt sich auch hier zeigen; denn wenn man irgend einen willkürlichen Anfangspunkt der Coordinaten nimmt, so wird des Mittelpunktes Lage durch drei Coordinaten angegeben, und wenn diese unbekannt sind, so müssen sie und zugleich der Halbmesser $= r$ bestimmt werden. Nenne ich daher die drei auf einander senkrechten unbekannten Coordinaten des Mittelpunktes t, u, v und nehme an, ein Punkt in der Oberfläche solle durch die mit ihnen parallelen Coordinaten a, b, c gegeben seyn, so ist

$$r^2 = (a - t)^2 + (b - u)^2 + (c - v)^2,$$

und man müsste also vier Gleichungen haben, um die vier Grössen r, t, u, v zu bestimmen. Diese Gleichungen würden, wenn alle vier Punkte durch ihre Coordinaten gegeben sind, von eben der Form wie die angegebne seyn.

Wäre eine Ebne bestimmt, welche die Kugel berühren sollte, und der Punkt in ihr, wo die Berührung geschehen soll, so würde die Senkrechte durch diesen Punkt auf jene Ebne die gerade Linie bestimmen, in welcher der Mittelpunkt liegen muss; es dürfte also ausserdem nur noch eine Bedingung zur Bestimmung der Kugelfläche, um die Grösse des Halbmessers, also die Lage des Mittelpunktes zu finden, gegeben seyn. Jener gegebne Berührungspunkt an einer gegebnen Ebne gilt also dreien Bedingungen gleich.

2. Von der Cylinderfläche.

§. 683. Aufgabe. Die Gleichung für die Oberfläche eines geraden Cylinders zu finden, dessen Querschnitt senkrecht auf die Axe ein Kreis ist.

Auflösung. Es sey AB die Axe des Cylinders, $BAC = \alpha$ ihr Neigungswinkel gegen die Abscissen-Ebne $DEFG$ (Fig. 179.). Wir wollen den Durchschnittspunkt A der Axe mit dieser Ebne zum Anfangspunkt der Coordinaten nehmen und die durch die Axe AB senkrecht auf die Abscissen-Ebne gesetzte Ebne BAC wählen, um in ihr auf der Durchschnittslinie AC die Abscissen $= x$ und senkrecht auf sie die Ordinaten z zu nehmen; die Ordinaten y liegen dann in der Ebne $DEFG$ und senkrecht auf die Ebne BAC. Des Cylinders Halbmesser sey $= r$.

Soll nun ein Punkt Z der Cylinderfläche durch Coordinaten $AX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ bestimmt werden, so sey eine Ebne $ZVSY$ mit BAC parallel gelegt; auf sie und auf die Axe sey die Ebne ZUW senkrecht, die einen auf die Axe senkrechten Querschnitt des Cylinders, also einen Kreis als Durchschnittsfläche mit der Cylinderfläche darstellt. Von dem Mittelpunkte W dieses Kreises sey WU senkrecht auf die Ebnen BAC und $ZVSY$, so ist $WV = XY = y$ und $ZV = \sqrt{(r^2 - y^2)}$. Es ist aber, wenn VR mit XA in der Ebne $ZVSY$ parallel gezogen worden, $ZY = z = ZR + RY = ZR + VS$, also $z = ZV \,.\, Cos\,\alpha + AW \,.\, Sin\,\alpha$, und (Geom. §. 390.)

$$AX = AT - TX = AT - VR = AW \,.\, Cos\,\alpha - ZV \,.\, Sin\,\alpha = x,$$

wenn TS parallel mit WV und XY ist. Wir haben also

$$z \,.\, Cos\,\alpha = ZV \,.\, Cos^2\alpha + AW \,.\, Sin\,\alpha \,.\, Cos\,\alpha$$
$$x \,.\, Sin\,\alpha = - ZV \,.\, Sin^2\alpha + AW \,.\, Cos\,\alpha \,.\, Sin\,\alpha$$

also $z \,.\, Cos\,\alpha - x \,.\, Sin\,\alpha = ZV = \sqrt{(r^2 - y^2)}$

oder $z = x \,.\, tang\,\alpha \pm \frac{\sqrt{(r^2 - y^2)}}{Cos\,\alpha}$ als Gleichung für jeden Punkt in der Oberfläche des Cylinders.

§. 684. Lehrsatz. Alle Durchschnittslinien der Cylinderfläche mit Ebnen, die unter schiefen Winkeln gegen die Axe geneigt sind, stellen Ellipsen dar, die in den Kreis übergehn, wenn die Neigung gegen die Axe $= 90°$ ist, und in zwei Parallellinien, wenn die Axe in der Ebne liegt, oder die Neigung $= o$ ist.

Beweis. Unsre Gleichung $z = x \,.\, tang\,\alpha \pm \frac{\sqrt{(r^2 - y^2)}}{Cos\,\alpha}$ giebt für $z = b$, oder als Durchschnittslinie irgend einer mit $DEFG$ parallelen Ebne $(b \,.\, Cos\,\alpha - x \,.\, Sin\,\alpha)^2 = r^2 - y^2$, eine Gleichung für eine Ellipse, deren Mittelpunkt senkrecht über dem durch $y = o$ und $x = b \,.\, Cotang\,\alpha$ bestimmten Punkte liegt. Die kleine halbe Axe wird $= r$, die grosse halbe Axe

wird, da $(b \cdot Cotang\, \alpha - x)^2 = \frac{r^2 - y^2}{Sin^2\, \alpha}$ war, $= \frac{r}{Sin\, \alpha}$. Es geht daher die Ellipse in einen Kreis über, wenn $\alpha = 90^\circ$ oder die Durchschnitts-Ebne senkrecht auf die Axe ist. Dagegen wächst die grosse Axe ohne Grenzen, wenn α immer mehr abnimmt. Für $\alpha = o$ geht unsre Hauptgleichung $z \cdot Cos\, \alpha - x \cdot Sin\, \alpha = \sqrt{(r^2 - y^2)}$ in $z^2 = r^2 - y^2$ über, und für $z = b$ ist $y^2 = r^2 - b^2$, also bildet der Schnitt zwei Parallellinien.

Eben das würden wir bei jedem Werthe des Winkels α finden, wenn wir den mit BAC parallelen, das heisst mit der Axe des Cylinders parallelen Schnitt bestimmten, oder in der Gleichung $z \cdot Cos\, \alpha - x \cdot Sin\, \alpha = \pm \sqrt{(r^2 - c^2)}$, dem y den beständigen Werth $= c$ gaben, dann ist

$$z = x \cdot tang\, \alpha \pm \frac{\sqrt{(r^2 - c^2)}}{Cos\, \alpha},$$

die Gleichung für zwei Parallellinien, deren senkrechter Abstand von einander $= 2\sqrt{(r^2 - c^2)}$ ist, indem der Unterschied der beiden Werthe von z, $= \frac{2\sqrt{(r^2 - c^2)}}{Cos\, \alpha}$ ist, z aber gegen diese Linien unter dem Winkel $= 90^\circ - \alpha$ geneigt ist. Für $c = r$ erhält z nur einen Werth, und die Ebne berührt nur noch die Cylinderfläche in einer mit der Axe parallelen geraden Linie.

§ 685. Wenn man die Gleichung für die Cylinderfläche so bestimmen will, dass $\alpha = 90^\circ$ oder z der Axe parallel ist, so hat man $z = \infty$, oder, indem man $z \cdot Cos\, \alpha = x \cdot Sin\, \alpha \pm \sqrt{(r^2 - y^2)}$ setzt, $x \cdot Sin\, \alpha = \pm \sqrt{(r^2 - y^2)}$ das ist $x^2 = r^2 - y^2$.

Da nämlich nun nur dann die Gleichung auf Punkte gehen kann, die in der Cylinderfläche liegen, wenn die Ordinate z sich ihrer ganzen Richtung nach in der Cylinderfläche befindet, so bleibt die Länge von z unbestimmt, x und y aber müssen so genommen werden, dass sie einen Punkt im Umfange des Kreises bestimmen.

3. Von der Kegelfläche.

§. 686. Aufgabe. Eine Gleichung für die Oberfläche des geraden Kegels zu finden, dessen Grundfläche ein Kreis ist.

Auflösung. Wenn man irgend eine Ebne ACU (Fig. 180.) durch die Axe AC des Kegels legt, so ist bekanntlich die Durchschnittslinie dieser mit der Kegelfläche eine gerade Linie CU, und wenn man in dieser einen Punkt Z nimmt und eine Senkrechte $ZY = z$ gegen die Grundfläche zieht, zugleich auch $AC = a$, $ACU = \beta$, also $AU = a \cdot tang\, \beta$ nennt, so ist

$$a : z = a \cdot tang\, \beta : YU,$$

und $AY = a \cdot tang\, \beta - YU = (a - z)\, tang\, \beta$.

Nehme ich also auf einer willkürlichen Abscissenlinie $AX = x$ und

senkrecht darauf $XY = y$, beide in der Grundfläche, so ist

$$AY = \sqrt{(x^2 + y^2)} = (a - z) \tan \beta,$$

die Gleichung für die Kegelfläche.

Wenn man $a - z = u$ setzt, oder die positiven Ordinaten von einer durch die Spitze C senkrecht auf die Axe gelegten Ebne an herabwärts rechnet,

so ist $x^2 + y^2 = u^2 . \tan^2 \beta$,

und $CV = x$, $VW = y$, $WZ = u$ sind die drei Coordinaten.

§. 687. Die Gleichung $x^2 + y^2 = u^2 . \tan^2 \beta$ ist ganz unabhängig von der Höhe AC des Kegels, und es lässt sich auch leicht übersehen, dass diese, immer nur willkürlich angenommene Höhe nichts zur Bestimmung der Kegelfläche beitragen kann, indem es eigentlich die unendlich verlängerte Linie CU ist, welche, indem sie, immer gegen CA unter dem Winkel $= \beta$ geneigt, um AC herum fortgeführt wird, die Kegelfläche beschreibt. Unsere Gleichung zeigt auch, dass die vollständige Kegelfläche, da sie eben so gut durch die nach P verlängerte Linie beschrieben wird, einen ganz gleichen oberhalb C liegenden Theil hat; denn $u = \pm \sqrt{(x^2 + y^2)} . \cot \beta$ giebt gleiche Werthe oberhalb und unterhalb der Abscissen-Ebne.

§. 688. Aufgabe. Eine Gleichung für die Oberfläche des schiefen Kegels zu finden, dessen Grundfläche ein Kreis ist.

Auflösung. Man bestimmt hier irgend einen Punkt Z der Oberfläche am besten dadurch, dass man durch ihn (Fig. 181.) eine Linie ZY mit der Axe CA parallel zieht und ihren Endpunkt Y durch Coordinaten x, y in der Ebne der Grundfläche bestimmt. Diese Coordinaten aber werden am besten so angenommen, dass man die Abscissen $AX = x$ auf der Durchschnittslinie AD einer durch AC senkrecht auf die Grundfläche gesetzten Ebne und $y = XY$ in der Grundfläche senkrecht auf diese Ebne nimmt. Zieht man nun CU in der Kegeloberfläche durch Z bis an die Grundfläche und nennt $AC = a$, $AU = AD = r$, so ist $YZ = z = \frac{a(r - \sqrt{(x^2 + y^2)})}{r}$, oder $a - z = \pm \frac{a}{r} \sqrt{(x^2 + y^2)}$ die Gleichung für die Kegelfläche.

Sollen hier nicht a und r vorkommen, weil man die Grundfläche in jeder andern Entfernung von der Spitze nehmen kann, so kann man statt ihrer den Neigungswinkel $CAD = \alpha$ der Axe gegen die Grundfläche, und den Winkel $ACD = \beta$, welcher in der durch die Axe senkrecht auf die Grundfläche gesetzten Ebne die Axe mit der Seitenlinie des Kegels macht, einführen. Es ist aber $\frac{a}{r} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta}$, also wenn ich die mit der Axe parallelen Ordinaten $a - z = u$ nenne, $u = \pm \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} \sqrt{(x^2 + y^2)}$.

§. 689. Wollte man statt der schiefen Ordinate $YZ = z$ eine senkrechte ZV ziehen, so würde $YV = z \,.\, Cos\,\alpha$ mit AX parallel seyn, und $AW = x + z \,.\, Cos\,\alpha$, $WV = y$, $VZ = z \,.\, Sin\,\alpha$, in die Gleichung eingeführt, dann aber am besten der Anfangspunkt der Coordinaten nach C verlegt werden.

§. 690. Ist $y = o$, so ist $u = \pm \frac{x \,.\, Sin\,(\alpha + \beta)}{Sin\,\beta}$ die Gleichung für die beiden Seitenlinien CD, CE, indem $MN = \frac{CM \,.\, Sin\,(180^\circ - \alpha - \beta)}{Sin\,\beta}$ und wenn man MN bis an die Verlängerung der CE fortgesetzt MN' nennt, $MN' = \frac{CM \,.\, Sin\,ECM}{Sin\,ECA}$, aber $Sin\,ECM = Sin\,CEA$, und $Sin\,CEA : Sin\,ECA = a : r = Sin\,(\alpha + \beta) : Sin\,\beta$.

§. 691. Giebt man u einen bestimmten Werth, oder sucht man die Durchschnittslinie einer mit EUD parallelen Ebne, so ist für diese $y^2 = \frac{u^2 \,.\, Sin^2\,\beta}{Sin^2\,(\alpha + \beta)} - x^2$, die Gleichung für einen Kreis vom Halbmesser $= \frac{u \,.\, Sin\,\beta}{Sin\,(\alpha + \beta)}$.

§. 692. **Lehrsatz.** Wenn (Fig. 182.) HGE ein gerader oder schiefer Kegel mit kreisförmiger Grundfläche, HGE ein Schnitt durch die Axe GK ist, und es wird eine Ebne FLM mit der einen Seitenlinie GE jenes Dreieckes parallel so gelegt, dass LM senkrecht auf HE ist, so ist die Durchschnittslinie dieser Ebne mit der Kegelfläche eine Parabel, deren zum Durchmesser FD gehöriger Parameter sich zum Abstande FG verhält wie HE^2 zu $GH \,.\, GE$.

Beweis. In der Ebne des Dreiecks HGE ziehe man FD als Durchschnittslinie beider Ebnen und lege durch irgend einen Punkt B derselben eine Ebne AC mit der Grundfläche parallel, deren Durchschnitt mit der Kegelfläche also ein Kreis ist. Diese Ebne schneide die FLM in BZ, und es sey $FB = x$, $BZ = z$. Da z mit LM parallel und AC mit HE parallel ist, so wird auch ABZ ein rechter Winkel (Geom. §. 400.), und z als Ordinate des Kreises durch $z^2 = AB \,.\, BC$ bestimmt, oder da $BC = FN = \frac{FG \,.\, HE}{GH}$ und $AB = \frac{x \,.\, HE}{CE}$ ist, $z^2 = \frac{x \,.\, FG \,.\, HE^2}{GH \,.\, GE}$. Die Curve ist also eine Parabel, deren zu diesem Durchmesser gehöriger Parameter $= \frac{FG \,.\, HE^2}{GH \,.\, GE}$ ist.

§. 693. Wenn der Schnitt HGE durch die Axe des Kegels zugleich senkrecht gegen die Grundfläche, oder GKH der Neigungswinkel der Axe gegen die Grundfläche ist, so ist die auf HE senkrechte Linie LM zugleich auf

FD senkrecht, und dann sind z, x auf einander senkrechte Coordinaten der Parabel, und *FD* die Hauptaxe. In andern Fällen ist allemal *FD* der den Ordinaten *BZ* richtig zugeordnete Durchmesser.

§. 694. Aufgabe. Wenn durch die Axe *GK* des Kegels (Fig. 182.) die Ebne *HGE* senkrecht auf die Grundfläche gesetzt, und nun die schneidende Ebne *FLM* senkrecht auf *HGE*, parallel mit *GE* ist, den Brennpunkt der als Durchschnittslinie entstehenden Parabel zu finden.

Auflösung. Da nun *FD* die Hauptaxe des Schnitts ist, so liegt der Brennpunkt auf *FD*, und man findet ihn, wenn man mit *HE* parallel *FN*, welche die Axe in *P* schneidet, dann aber *PQ* so zieht, dass der Winkel $FPQ = KGE$ sey, dann ist Q, wo die *PQ* in die Axe der Parabel einschneidet, der Brennpunkt derselben.

Es ist nämlich, da die Winkel $PFQ = GEH$, $FPQ = KGE$ ist, das Dreieck $FPQ \backsim EGK$, folglich

$$FQ = \frac{FP \cdot KE}{GE} = \frac{HK \cdot FG \cdot KE}{GH \cdot GE} = \frac{FG \cdot HK^2}{GH \cdot GE},$$ gleich dem Viertel des Parameters, weil $HK = \frac{1}{2} HE$ ist.

§. 695. Der Brennpunkt der Parabel liegt also nicht in der Axe des Kegels; doch könnte diess in einem Falle statt finden, nämlich wenn $FPK = KGE$ ist, das heisst, wenn (Fig. 183.) $GKE = KGE$, oder $EK = EG$ ist.

§. 696. Lehrsatz. Wenn (Fig. 184.) *EIH* ein Schnitt durch die Axe *EK* des Kegels und *LM* eine auf die Verlängerung des Durchmessers *IH* senkrechte Linie ist, so ist der Schnitt, welchen die durch *LM* gelegte diesseits der Spitze in die Kegelfläche einschneidende Ebne *DLM* mit der Kegelfläche bildet, eine Ellipse. Der Parameter dieser Ellipse wird, wenn man durch des Kegels Spitze *E*, *EG* mit *DN* (der Durchschnittslinie unsrer Ebne mit dem Schnitte durch des Kegels Axe) parallel zieht $= \frac{IG \cdot HG \cdot DF}{EG^2}$, und alle unter sich parallele Schnitte sind ähnliche Ellipsen.

Beweis. Nimmt man in *DN* den Punkt *B* willkürlich an und legt durch ihn eine Ebne mit der Grundfläche parallel, so ist auch für diese die Durchschnittslinie mit der Kegelfläche ein Kreis *AZC*, weil wir die Grundfläche als kreisförmig voraussetzen. *BZ*, die Durchschnittslinie der Ebne *DLM* mit dieser Kreisebne ist mit *LM* parallel, also auf *AC* senkrecht und folglich $BZ^2 = z^2 = AB \cdot BC$.

Nenne ich nun $DB = x$, so ist, weil *EG* mit *DB* parallel,

$$AB = \frac{x \cdot IG}{EG} \text{ und } BC = \frac{BF \cdot HG}{EG} = \frac{(DF - x)\, HG}{EG},$$

also $z^2 = \frac{x \cdot GI \cdot GH}{EG^2}(DF - x)$, welches offenbar eine Gleichung für eine Ellipse ist, deren Durchmesser = DF und Parameter = $\frac{GI \cdot GH \cdot DF}{EG^2}$ ist (§. 174.). Da nun hier $\frac{GI \cdot GH}{GE^2}$ unveränderlich bleibt für alle mit GE parallele Schnitte, so ist der Parameter der Ellipse immer der Axe proportional, also die Ellipse ähnlich.

Anmerkung. In §. 174. ist zwar die Gleichung $z^2 = pu - \frac{pu^2}{2a}$ nur auf die Hauptaxe angewandt; aber ganz ähnlich würde sie für jeden Durchmesser ausfallen, wenn man die Abscissen vom Scheitel an rechnete und den zugehörigen Parameter durch die conjugirten Axen ausdrückte.

§. 697. Wenn die Ebne durch die Axe zugleich eine gegen die Grundfläche senkrechte ist, so steht LM und folglich auch BZ senkrecht auf dieser Ebne IEH; dann ist also die Ordinate BZ senkrecht auf die Axe DF der Ellipse, und diese Axe ist die grosse Hauptaxe. In jedem andern Falle ist BZ die zur Axe DF richtig Zugeordnete, indem $BU = BZ$, weil in dem Kreise die Linie UZ senkrecht auf AC ist. Der Winkel, welchen diese Coordinaten mit der zugeordneten Axe der Ellipse machten, nämlich DBZ, würde bestimmt, wenn die Neigung der Ebne EIH und die Neigung der schneidenden Ebne DF bekannt wären.

§. 698. Lehrsatz. Wenn die Ebne EIH durch des Kegels Axe zugleich senkrecht auf die Grundfläche ist, und die schneidende Ebne wieder durch eine auf die verlängerte IH senkrechte Linie LM so gelegt wird, dass sie den Kegel diesseits der Spitze schneidet, so ist die Durchschnittslinie ein Kreis, wenn (Fig. 185.) das Dreieck EDF ähnlich dem EHI ist.

Beweis. In dem hier betrachteten Falle sind (Fig. 184.) die Ordinaten BZ auf die Axe des Schnittes DF senkrecht, DF ist also seine Hauptaxe und der Schnitt wird ein Kreis, wenn der Parameter $= DF$ oder $GI \cdot GH = GE^2$ wird, das heisst, wenn $GI : GE = GE : GH$ ist, oder wenn das Dreieck GIE ähnlich dem GEH ist, und dann ist zugleich EDF dem EHI ähnlich, weil aus $HEG = EIG$ auch folgt $DFE = HIE$. Dieser Schnitt heisst der Gegenschnitt.

§. 699. Wäre der Schnitt durch die Axe nicht senkrecht auf die Grundfläche, so könnte gleichwohl der Schnitt DF so liegen, dass DEF ähnlich dem HEI wäre; dann würden die beiden einander zugeordneten Durchmesser der Ellipse gleich, aber da sie nicht auf einander senkrecht sind, so würde der Schnitt immer noch eine Ellipse seyn.

§. 700. Lehrsatz. Wenn EK die Axe des Kegels IH ein Durchmesser der kreisförmigen Grundfläche (Fig. 186.), LM senkrecht gegen IH in der Ebne der Grundfläche, IEH das Dreieck durch die Axe ist, und es wird durch

LM eine Ebne so gelegt, dass sie die verlängerte IE in F schneidet, so ist der Schnitt eine Hyperbel DLM, Flm, deren Parameter $= \frac{DF \cdot GH \cdot GI}{GE^2}$, wenn EG durch die Spitze E, der Ebne des Schnitts parallel in der Ebne IEH gezogen ist.

Beweis. DN sey die gerade Linie, in welcher unsre Ebne DLM die Ebne des durch die Axe gehenden Dreiecks schneidet; auf ihr sey willkürlich $DB = x$ genommen und durch B eine Ebne AZC der Grundfläche parallel gelegt, welche die Ebne DLM in BZ schneidet. Auch hier ist $BZ^2 = AB \cdot BC$, aber $AB = \frac{x \cdot GH}{GE}$ und $BC = \frac{(DF + x)\, IG}{GE}$, weil GE parallel FB, folglich $BZ^2 = z^2 = \frac{GH \cdot IG \cdot DF}{GE^2}\left(x + \frac{x^2}{DF}\right)$. Hier ist DF der Durchmesser der Hyperbel und $\frac{GH \cdot GI \cdot DF}{GE^2}$ der Parameter, wie §. 174. zeigt, wenn man dort die Abscissen $u = -x$ setzt und das dort Gesagte auf andre conjugirte Axen anwendet.

Alle Hyperbeln, die durch parallele Schnitte hervorgebracht werden, sind einander ähnlich, oder es ist bei ihnen das Verhältniss des Parameters zum Durchmesser ein immer gleiches, da $\frac{GH \cdot GI}{GE^2}$ einerlei Werth erhält, für alle mit GE parallele Schnitte.

§. 701. Wenn $x = -\frac{1}{2} DF$ ist, so wird $z^2 = -\frac{1}{4} \frac{DF^2 \cdot GH \cdot IG}{GE^2}$ und es ist daher in dem Falle, wo Ordinaten BZ senkrecht auf die conjugirte Axe DN sind, der Winkel μ, den die Asymptote mit dieser Hauptaxe macht, durch $\tang \mu = \sqrt{\frac{GH \cdot IG}{GE^2}}$ bestimmt; dagegen erhellt aus §. 251. dass für schiefwinkelige, dem Durchmesser richtig zugeordnete Ordinaten $\sin \mu = \frac{B \cdot \sin(\alpha - \mu)}{A}$ ist, wenn A und B die beiden Linien bedeuten, die wir hier die einander unter dem Winkel $= \alpha$ zugeordneten halben Axen nennen würden, also $\tang \mu = \frac{B \cdot \sin \alpha}{A + B \cdot \cos \alpha}$, oder hier, wo $A = \frac{1}{2} DF$, $B = \frac{1}{2} DF \cdot \sqrt{\frac{GH \cdot GI}{GE^2}}$ ist, $\tang \mu = \frac{\sin \alpha \cdot \sqrt{GH \cdot GI}}{GE + \cos \alpha \cdot \sqrt{GH \cdot GI}}$. Da nun hier $DBZ = 180° - \alpha$ und $\frac{GH \cdot GI}{GE^2}$ ungeändert bleiben für alle parallele Schnitte, so ist der Asymptotenwinkel für alle parallele Schnitte derselbe.

§. 702. Lehrsatz. Der Asymptotenwinkel ist so gross als der Winkel, den ein mit unsern Hyperbeln parallel gelegtes Dreieck durch des Kegels Spitze an seiner Spitze bei E erhält.

Beweis. Legt man eine Ebne EGO durch die Spitze des Kegels mit DLM parallel, so ist $EGO = DBZ = 180° - \alpha$, wenn OG die Einschnittslinie in die Grundfläche ist, und $tang\ GEO = \frac{OG \cdot Sin\ \alpha}{EG + OG \cdot Cos\ \alpha} = tang\ \mu$, weil $OG^2 = IG \cdot GH$ ist.

§. 703. Dass der Asymptotenwinkel durch DN oder EG nur dann halbirt wird, wenn $\alpha = 90°$, ist bekannt; zugleich aber ist in jedem andern Falle einleuchtend, dass unsre Rechnungen für beide Theile des Asymptotenwinkels auf gleiche Weise gelten.

§. 704. Bemerkung. Wir haben bisher immer angenommen, LM sey senkrecht gegen den Kreisdurchmesser, der die Durchschnittslinie unsers Axenschnittes bildet; aber wäre das auch nicht der Fall, so ist dennoch der durch LM gelegte Schnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel. In Fig. 184. ist nämlich immer BZ mit LM parallel, wäre nun $ABZ = \beta$, so ist nicht mehr $z^2 = AB \cdot BC$, sondern offenbar $z^2 \cdot Sin^2 \beta = (AB - z \cdot Cos\ \beta) \cdot (BC + z \cdot Cos\ \beta)$, und da für AB, BC, die vorhin gefundenen Werthe gelten, so ist noch immer die Gleichung vom zweiten Grade, also in allen Fällen der Schnitt eine Linie der zweiten Ordnung, und die ganze Betrachtung liesse sich auf die vorige zurückbringen, wenn man denjenigen Schnitt durch die Axe suchte, welcher die Grundfläche in einer auf LM senkrechten Linie schnitte.

§. 705. Man hätte auch die Gleichung für alle Schnitte einer Ebne mit der Kegelfläche so ableiten können, dass man aus der Gleichung für die Kegelfläche $(a - z)^2 = \frac{Sin^2 (\alpha + \beta)}{Sin^2 \beta} (x^2 + y^2)$ (in §. 688.), eine andre bestimmte, die sich auf Coordinaten in einer andern Ebne und senkrecht gegen sie bezöge. Es sey (Fig. 187.) ein Punkt Z der Kegeloberfläche durch Coordinaten $AX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ bestimmt, und CAD sey die durch die Axe AC senkrecht auf die Grundfläche gesetzte Ebne, y sey auf diese Ebne CAD senkrecht, x dagegen auf AD genommen, z mit CA parallel. Legt man nun eine andre Ebne $USVP$ senhrecht auf CAD und gegen die Grundfläche unter dem Winkel $QPA = \zeta$ geneigt, so lässt sich leicht die Lage des Punktes Z in Beziehung auf diese bestimmen.

Es sey ZU senkrecht auf die Ebne CAD, so ist $UZ = XY = y$, und der Punkt U wird durch die Coordinaten $AX = x$, $XU = z$, die den Winkel $= CAD = \alpha$ mit einander machen (weil Z mit des Kegels Axe parallel ist), bestimmt.

Da nun die Ebne $QUSP$ senkrecht auf ACD und gegen die Grundfläche

unter dem Winkel $VPA = \zeta$ geneigt, angenommen, so ist ihr Einschnitt PS in die Grundfläche parallel mit UZ, und des Punktes U senkrechter Abstand von PQ ist zugleich der senkrechte Abstand des Punktes Z von dieser schneidenden Ebne. Es sey UV senkrecht auf PQ, ferner $AP = f$, $PV = v$, $VU = w$, so ist (Fig. 188.) $PX = f - x = \frac{v \cdot Sin\,(\alpha + \zeta)}{Sin\,\alpha} + \frac{w \cdot Cos\,(\alpha + \zeta)}{Sin\,\alpha}$;

$$XU = z = \frac{v \cdot Sin\,\zeta + w \cdot Cos\,\zeta}{Sin\,\alpha}.$$

Die Gleichung $(a - z)^2 = \frac{Sin^2\,(\alpha + \beta)}{Sin^2\,\beta}\,(x^2 + y^2)$ geht also über in

$$\left(a - \frac{v \cdot Sin\,\zeta + w \cdot Cos\,\zeta}{Sin\,\alpha}\right)^2 = \frac{Sin^2\,(\alpha + \beta)}{Sin^2\,\beta}\left(y^2 + \left(f - \frac{v \cdot Sin\,(\alpha + \zeta) + w \cdot Cos\,(\alpha + \zeta)}{Sin\,\alpha}\right)^2\right);$$

daraus würde sich der Werth von w, das ist der senkrechte Abstand eines jeden Punktes der Kegelfläche von der schneidenden Ebne entwickeln lassen. Verlangt man aber die Gleichung für den Schnitt selbst, so muss man $w = o$ setzen und dann ist $(a \cdot Sin\,\alpha - v \cdot Sin\,\zeta)^2 = \frac{Sin^2\,(\alpha + \beta)}{Sin^2\,\beta}\,(y^2 \cdot Sin^2\,\alpha + (f \cdot Sin\,\alpha - v \cdot Sin\,(\alpha + \zeta))^2)$ eine Gleichung zwischen v und y, die vom zweiten Grade ist. Betrachtet man sie genauer, so findet man, dass der Kegelschnitt eine Parabel ist, wenn die Ebne entweder mit DC oder mit CE parallel ist, dass sie eine Ellipse wird, wenn VPA kleiner als CDE oder grösser als $180° - CED$, in den übrigen Fällen eine Hyperbel. Eben die Betrachtung lässt sich anstellen, wenn auch das Dreieck durch die Axe nicht senkrecht auf die Grundfläche ist.

§. 706. Bemerkung. Mit diesen Lehren von den Kegelschnitten steht auch die ganze Theorie der Sonnen-Uhren in Beziehung.

Stellt nämlich (Fig. 189.) A die Spitze der schattenwerfenden geraden Linie vor, so geht der Schatten von A oder die Linie AB während des Tages durch eine Kegelfläche fort, deren Spitze A ist. Denn die Sonne bewegt sich, wenn AC die Richtung nach dem Himmelspole ist, scheinbar durch einen auf AC senkrechten Kreis DE, und die Verlängerung ihrer durch A gehenden Strahlen bildet ja den Schatten von A, der also von AB nach Ab und so weiter fortrückt. Um hier den Weg zu bestimmen, welchen der Schatten des Punktes A auf einer Ebne $GHIK$ von gegebner Lage durchläuft, hätte man also nur die Durchschnittslinie der Oberfläche jenes geraden Kegels mit der Ebne $GHIK$ zu suchen. Doch nicht diese eigentlich, nicht den Weg, welchen der Schatten des Punktes A durchläuft, will man wissen, sondern die Richtung, welche der Schatten der geraden Linie AL, deren Spitze A ist, am Ende jeder Stunde erreicht. Zu diesem Zwecke würde man, wenn zum Beispiel DAE die Ebne des durch A gelegten Meridianes ist, die in BM die Ebne der Sonnen-Uhr schneidet, den Winkel $ECN = 15$ Graden auf der Grundfläche des Kegels nehmen,

durch NCA eine Ebne legen, ihre Einschnittslinie PQ bestimmen und nun M als den Punkt, wo um 12 Uhr, Q als den Punkt, wo um 1 Uhr der Schatten hinfällt, bezeichnen (denn 15 Grade durchläuft die Sonne in der Stunde). Nach diesen Punkten M, Q würde man von dem Fusspunkte L der schattenwerfenden geraden Linie AL die Stundenlinien ziehen. — Aber da der Kegel wegen der ungleichen Declination der Sonne täglich ein andrer ist, so würden auch diese Stundenlinien täglich andre seyn, wenn man die Linie LA ganz willkürlich aufstellte. Man giebt ihr daher die mit der Welt-Axe parallele Richtung AP, weil dann jede Stundenlinie dieselbe bleibt, wenn der Winkel ECN eine bestimmte Grösse behält, und es dabei auf die Curve, in welcher der Endpunkt des Schattens fortgeht, nicht ankömmt. Dass hier aus der bekannten Lage der Ebne $GHIK$ die Neigung der Ebne APM und der Ebne APQ gegen sie bekannt ist, und daraus und aus der Neigung beider Ebnen gegen einander der Winkel MPQ und folglich die Richtung aller Stundenlinien gefunden wird, lässt sich nun wohl übersehen. Hier würde uns diese Untersuchung zu lange aufhalten.

Fünfter Abschnitt.

Von den Flächen der zweiten Ordnung im Allgemeinen.

§. 707. **Bemerkung.** Die allgemeinste Gleichung für Flächen der zweiten Ordnung

$$z^2 + lzy + mzx + ny^2 + pyx + qx^2 + ax + by + cz + f^2 = o,$$

in welcher l, m, n, p, q gegebne Zahlen, a, b, c, f gegebne Linien bedeuten, lässt sich dadurch vereinfachen, dass man die Richtung der Coordinaten verändert.

Es sey nämlich (Fig. 190.) der Punkt Z durck die Coordinaten $AX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ bestimmt, nun aber AU unter dem Winkel $UAX = \alpha$ in der Ebne AXY gezogen, und YU senkrecht auf AU, $AU = u$, $UY = v$, so ist

$$x = u \,.\, Cos\,\alpha + v \,.\, Sin\,\alpha \text{ und } y = u \,.\, Sin\,\alpha - v \,.\, Cos\,\alpha.$$

Durch AU sey die Ebne AUV unter dem Winkel $VUY = \beta$ gegen AXY geneigt und in der Ebne des Neigungswinkels ZV auf UV senkrecht gezogen, so ist, wenn $UV = s$, $VZ = t$ heisst,

$$v = s \,.\, Cos\,\beta + t \,.\, Sin\,\beta; \quad z = s \,.\, Sin\,\beta - t \,.\, Cos\,\beta,$$

also $x = u \,.\, Cos\,\alpha + s \,.\, Sin\,\alpha \,.\, Cos\,\beta + t \,.\, Sin\,\alpha \,.\, Sin\,\beta;$

$$y = u \,.\, Sin\,\alpha - s \,.\, Cos\,\beta \,.\, Cos\,\alpha - t \,.\, Sin\,\beta \,.\, Cos\,\alpha;$$

$$z = s \,.\, Sin\,\beta - t \,.\, Cos\,\beta.$$

Endlich sey in der neuen Abscissen-Ebne AUV die neue Abscissenlinie AS und auf sie senkrecht SV gezogen; es sey $SAU = \gamma$, $AS = X$,

$SV = Y$, $VZ = t = Z$, so wird $AU = u = X . Cos\,\gamma + Y . Sin\,\gamma$;
$$UV = s = X . Sin\,\gamma - Y . Cos\,\gamma,$$
$$VZ = t = Z,$$
also $x = X . Cos\,\alpha . Cos\,\gamma + Y . Cos\,\alpha . Sin\,\gamma$
$$+ X . Sin\,\alpha . Cos\,\beta . Sin\,\gamma - Y . Sin\,\alpha . Cos\,\beta . Cos\,\gamma + Z . Sin\,\alpha . Sin\,\beta;$$
$$y = X . Sin\,\alpha . Cos\,\gamma + Y . Sin\,\alpha . Sin\,\gamma$$
$$- X . Cos\,\alpha . Cos\,\beta . Sin\,\gamma + Y . Cos\,\alpha . Cos\,\beta . Cos\,\gamma - Z . Sin\,\beta . Cos\,\alpha;$$
$$z = X . Sin\,\gamma . Sin\,\beta - Y . Cos\,\gamma . Sin\,\beta - Z . Cos\,\beta.$$
Wenn man diese Werthe in die allgemeine Gleichung für die Flächen der zweiten Ordnung setzt, und dann die Coefficienten der Glieder, welche XY, XZ, YZ enthalten, $= o$ setzt, so erhält man drei Gleichungen zu Bestimmung der Werthe von α, β, γ, so dass diese Winkel die gegebnen Grössen l, m, n, p, q, a, b, c, f angegeben werden.

§. 708. Diese Ueberlegung zeigt, dass sich die Gleichung für alle Flächen der zweiten Ordnung allemal so darstellen lässt, dass sie in der Gleichung
$$LZ^2 + MY^2 + NX^2 + AZ + BY + CX + D^2 = o$$
enthalten ist, und hier sind Z, Y, X auf einander senkrechte Coordinaten, die von demselben Anfangspunkte A (Fig. 190.) ausgehen, von welchem die x, y, z ausgingen, deren Richtung gegen diese zuerst angenommene aber durch die gegebne Grösse bestimmt ist.

§. 709. Nach dieser Vereinfachung der für alle Flächen der zweiten Ordnung passenden Gleichung lassen sich nun folgende Hauptfälle, die in ihr enthalten sind, unterscheiden, und es wird sich zeigen, dass jeder eine eigne krumme Fläche angiebt.

Wenn keine der Grössen L, M, N verschwindet, so lassen sich durch Verlegung des Anfangspunktes der Coordinaten die Glieder AZ, BY, CX ganz wegschaffen, und die Gleichung $LZ^2 + NY^2 + MX^2 + D^2 = o$ enthält drei Hauptfälle, je nachdem alle Grössen L, M, N, positiv, oder eine negativ und zwei positiv, oder eine positiv und zwei negativ angenommen werden. Ist dagegen eine der Grössen L, M, N, $= o$, so lässt sich die Gleichung nur auf die Form $LZ^2 + MY^2 + CX = o$ zurückführen, und diese Gleichung enthält drei Fälle, je nachdem L und M beide positiv sind, oder eine derselben negativ, oder eine $= o$ ist.

1. Flächen, die durch die Gleichung $lx^2 + my^2 + nz^2 = f^2$ dargestellt werden.

§. 710. **Lehrsatz.** Die drei durch den Anfangspunkt der Coordinaten mit den Coordinaten parallel gelegten Ebnen bilden mit der krummen Fläche im ersten Falle elliptische Durchschnitte, wenn l, m, n positive Grössen sind; im zweiten Falle, wenn eine der Grössen l, m, n negativ ist, sind zwei dieser

Schnitte hyperbolisch, einer elliptisch; im dritten Falle sind zwei dieser Schnitte hyperbolisch, einer hingegen ist unmöglich, oder trifft die krumme Fläche gar nicht.

Beweis. Erster Fall. (Fig. 191.) Wenn C der Anfangspunkt ist, die Abscissen x auf AC, die Ordinaten y mit CF parallel, die Ordinaten z mit CE parallel genommen werden, so erhält man für $z = o$ aus der Gleichung $lx^2 + my^2 + nz^2 = f^2$,

die Gleichung für den Schnitt $AGBF$, $y^2 = \frac{f^2}{m} - \frac{l}{m} x^2$;

$y = o$ giebt für den Schnitt $BEAD$, $z^2 = \frac{f^2}{n} - \frac{l}{n} x^2$;

$x = o$ giebt für den Schnitt $EFDG$, $z^2 = \frac{f^2}{n} - \frac{m}{n} y^2$;

Gleichungen für drei Ellipsen, deren halbe Hauptaxen durch folgende Werthe angegeben sind, $CA^2 = \frac{f^2}{l}$; $CF^2 = \frac{f^2}{m}$; $CE^2 = \frac{f^2}{n}$.

Zweiter Fall. Es sey (Fig. 192.) n negativ, so giebt die Gleichung $lx^2 + my^2 - nz^2 = f^2$, für $z = o$, das ist für den Schnitt LKM, $y^2 = \frac{f^2}{m} - \frac{lx^2}{m}$; der auf z oder HI senkrechte Schnitt ist also eine Ellipse. Dagegen für $y = o$ erhalten wir $z^2 = \frac{l}{n} x^2 - \frac{f^2}{n}$, der Schnitt $NOQR$ ist eine Hyperbel; endlich für $x = o$ wird $z^2 = \frac{my^2}{n} - \frac{f^2}{n}$, der auf CD senkrechte Schnitt $STUV$ ist gleichfalls eine Hyperbel. Die mit HI parallele Axe ist unmöglich, indem sie im zweiten und dritten Schnitte durch $z^2 = \frac{-f^2}{n}$ angegeben wird, die möglichen halben Axen sind, die mit x parallele $= \sqrt{\frac{f^2}{l}}$, die mit y parallele $= \sqrt{\frac{f^2}{m}}$.

Dritter Fall. Wenn zwei Coefficienten negativ sind, zum Beispiel l und m, so ist für den Schnitt durch x und y die Gleichung immer unmöglich

$$-my^2 = f^2 + lx^2,$$

die Ebne RS (Fig. 193.) trifft also nirgends die Oberfläche des Körpers; die beiden gegen sie senkrechten Ebnen dagegen sind Hyperbeln, indem sie durch die Gleichungen $z^2 = \frac{f^2}{n} + \frac{l}{n} x^2$,

und $z^2 = \frac{f^2}{n} + \frac{m}{n} y^2$

ausgedrückt werden. Die Hyperbeln haben die mögliche halbe Axe $CB = \sqrt{\frac{f^2}{n}}$.

§. 711. Die erste dieser Flächen hat also drei elliptische Hauptschnitte, deren drei auf einander senkrechte Axen zugleich als die drei Hauptaxen der krummen Fläche zu betrachten sind. Die zweite Fläche hat einen elliptischen Hauptschnitt, dessen beide Hauptaxen zugleich die beiden möglichen Hauptaxen der krummen Fläche geben; die dritte Hauptaxe HI ist unbegrenzt (Fig. 192.), indem sie die unmögliche Axe beider hyperbolischen Hauptschnitte darstellt. Die dritte Fläche hat zwei hyperbolische Hauptschnitte, deren mögliche Axe die einzige eigentliche Axe oder begrenzte Axe der Fläche ist, die gegen sie senkrechten Linien in der Ebne RS treffen die krumme Fläche gar nicht.

§. 712. Erklärung. Wir wollen die erste Fläche das Ellipsoid oder das elliptische Ellipsoid, die zweite das hyperbolische Ellipsoid, die dritte das elliptische Hyperboloid nennen. Denn die erste bietet überall die elliptische Form dar und ist eine rundum in sich zurückgehende Fläche; die zweite bietet freilich eine hyperbolische Form dar, ist aber doch eine zusammenhängende Fläche, statt dass die dritte Fläche, so wie die Hyperbel selbst, aus zwei ganz von einander getrennten Stücken besteht.

§. 713. Lehrsatz. Wenn im elliptischen Ellipsoid Ebnen mit den Hauptschnitten parallel gelegt werden, so geben sie Durchschnittslinien, welche Ellipsen und zugleich dem elliptischen Hauptschnitte, welchem sie parallel liegen, ähnlich sind.

Beweis. Setzt man in der Gleichung $lx^2 + my^2 + nz^2 = f^2$, $z = a$, so erhält man einen mit BGA in der Entfernung $= a$ parallelen Schnitt, für welchen $y^2 = \frac{f^2 - na^2}{m} - \frac{l}{m}x^2$. Die beiden halben Hauptaxen dieses Schnittes sind $= \sqrt{\frac{f^2 - na^2}{m}}$

und $= \sqrt{\frac{f^2 - na^2}{l}}$,

sie verhalten sich also zu einander wie $\sqrt{l} : \sqrt{m}$, und eben das Verhältniss haben die Hauptaxen CF, CA (Fig. 191.) des Hauptschnittes, dem jener parallel ist.

§. 714. War also BGA ein Kreis, welches geschieht, wenn $l = m$ ist, so sind alle damit parallele Schnitte auch Kreise, der Körper ist ein um die Axe ED runder Körper, ein Sphäroid. Wäre $l = m = n$, so würden alle Schnitte Kreise, der von der krummen Fläche eingeschlossene Körper eine Kugel.

§. 715. Lehrsatz. Die Schnitte der zweiten Fläche, welche durch Ebnen, den Hauptschnitten parallel, gebildet werden, sind denjenigen Hauptschnitten, zu welchen sie parallel sind, ähnlich.

Beweis. Die Gleichung $lx^2 + my^2 - nz^2 = f^2$ giebt, wenn man $z = a$ setzt, $y^2 = \frac{f^2 + na^2}{m} - \frac{l}{m} x^2$, also eine Ellipse, deren halbe Hauptaxen $\sqrt{\frac{f^2 + na^2}{l}}$ und $\sqrt{\frac{f^2 + na^2}{m}}$ sich wie die Hauptaxen des ihnen parallelen Hauptschnittes (§. 710. Zweiter Fall) erhalten.

Wird dagegen $y = b$ gesetzt, so ist die Gleichung für den Schnitt, welcher mit x, z parallel ist, $z^2 = \frac{ml^2 - f^2}{n} + \frac{l}{n} x^2$; dieser ist also eine Hyperbel, deren halber Asymptotenwinkel $= \mu$ durch $tang^2 \mu = \frac{l}{n}$ angegeben wird, und diess ist zugleich der Winkel, welchen die Asymptote des Hauptschnitts mit LD (Fig. 192.) macht. In dieser Hyperbel ist die mit z parallele Axe unmöglich, solange $b^2 < \frac{f^2}{m}$, das ist b kleiner als die auf LD senkrechte Axe des Hauptschnittes LKM ist; dagegen ist die mit x parallele Axe unmöglich, oder die beiden Theile der Hyperbel liegen oberhalb und unterhalb der Ebne LKD, wenn $b^2 > \frac{f^2}{m}$ ist. Ist aber $b^2 = \frac{f^2}{m}$, oder berührt die Ebne den Hauptschnitt LKM im Endpunkte der auf LD senkrechten Axe, so ist die Durchschnittslinie durch $z^2 = \frac{l}{n} x^2$ bestimmt, oder besteht aus zwei geraden Linien, die unter dem Winkel $= \mu$ gegen x geneigt sind. Aehnliche Folgerungen würden für eine mit SCU parallele Ebne gelten.

§. 716. Lehrsatz. Die Schnitte der Ebnen, die mit einem der Hauptschnitte parallel das elliptische Hyperboloid schneiden, sind unter sich ähnliche Ellipsen, wenn sie dem unmöglichen Hauptschnitte parallel, unter sich ähnliche Hyperbeln, wenn sie den hyperbolischen Hauptschnitten parallel sind (Fig. 193.).

Beweis. Die Gleichung $nz^2 - my^2 - lx^2 = f^2$ giebt, wenn $z = a$, für den mit x, y parallelen Schnitt $y^2 = \frac{na^2 - f^2}{m} - \frac{l}{m} x^2$, also ist der Schnitt elliptisch, sobald $a^2 > \frac{f^2}{n}$, $a > CB$ ist; für kleinere Werthe ist er unmöglich, dagegen für $y = b$ ist $z^2 = \frac{f^2 + mb^2}{n} + \frac{l}{n} x^2$, er bestimmt also eine

Hyperbel, deren mit z parallele Axe möglich ist $= \sqrt{\frac{f^2 + mb^2}{n}}$; dass die unter einander parallelen Schnitte ähnlich sind, erhellt leicht. Die elliptischen Schnitte werden Kreise, wenn $l = m$, dann ist der Körper ein runder Körper, der das hyperbolische Conoid heisst.

§. 717. Lehrsatz. Die Fläche des hyperbolischen Ellipsoids, so wie des elliptischen Hyperboloids hat die Oberfläche eines elliptischen Kegels zur asymptotischen Fläche, an welche sie sich immer mehr anschliesst, je weiter man sich vom Mittelpunkte C entfernt.

Beweis. Die Gleichung $lx^2 + my^2 - nz^2 = f^2$ stimmt, je grösser x, y, z werden, desto näher mit $nz^2 = lx^2 + my^2$ überein; diese Gleichung aber gehört einem Kegel, dessen mit LKM (Fig. 192.) parallele Schnitte Ellipsen sind. An diese Kegelfläche, deren Spitze in C liegt, und deren Schnitte auf HC senkrecht, Ellipsen und dem Hauptschnitte LKM ähnlich sind (indem ihre Hauptaxen durch $\sqrt{\frac{na^2}{m}}$ und $\sqrt{\frac{na^2}{l}}$ ausgedrückt werden), schliesst sich also die zweite Fläche desto näher an, je grösser x, y, z werden. In Fig. 192. zeigt $truo$ einen Querschnitt dieses Kegels und Ct, Cu auf den Asymptoten der Hyperbel ST, VU und Cr, Co sind Seitenlinien dieses Kegels. Aehnliche Betrachtungen gelten für die dritte Fläche.

§. 718. Aufgabe. Eine Ebne $HIKL$ (Fig. 191.) steht auf der durch die Axen AB, FG gelegten Ebne senkrecht, ihr Durchschnitt LI mit dieser Ebne ist gegen AB unter dem Winkel $= \eta$ geneigt; man sucht die Figur des Schnittes bei Flächen der ersten Art.

Auflösung. Nehme ich hier Abscissen $= t$ auf CB und Ordinaten $= u$ mit LI parallel, so ist $x = t - u \,.\, Cos\,\eta$, $y = u \,.\, Sin\,\eta$, z hingegen bedeutet noch immer die auf BGA senkrechte Ordinate. Die drei Hauptaxen, welche wir $= \frac{f}{\sqrt{l}}$ mit x parallel, $= \frac{f}{\sqrt{m}}$ mit y parallel, $= \frac{f}{\sqrt{n}}$ mit z parallel fanden, mögen $= a$, $= b$, $= c$ heissen, so ist unsre Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, und diese wird jetzt

$$\frac{t^2 - 2tu \,.\, Cos\,\eta + u^2 \,.\, Cos^2\,\eta}{a^2} + \frac{u^2 \,.\, Sin^2\,\eta}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$ woraus eine Gleichung für irgend einen Schnitt, der mit LI parallel senkrecht auf $BGAF$ gesetzt ist, folgt, wenn man t einen bestimmten Werth giebt.

Um diese Gleichung so zu verändern, dass die Ordinate u nur noch in der zweiten Potenz vorkomme, ziehe ich die den Sehnen IL richtig zugeordnete Axe Cg und nenne $CN = s = \frac{t \,.\, Sin\,\eta \,.\, \sqrt{(a^4 \,.\, Sin^2\,\eta + b^4 \,.\, Cos^2\,\eta)}}{a^2 \,.\, Sin^2\,\eta + b^2 \,.\, Cos^2\,\eta}$ und die

Ordinate auf $LN = r = u - \frac{b^2 t . Cos\,\eta}{a^2 . Sin^2 \eta + b^2 . Cos^2 \eta}$; dann wird

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 . Sin^2 \eta + b^2 . Cos^2 \eta} - \frac{a^2 b^2 s^2}{a^4 . Sin^2 \eta + b^4 . Cos^2 \eta} - \frac{a^2 b^2 z^2}{c^2 (a^2 . Sin^2 \eta + b^2 . Cos^2 \eta)};$$

und wenn man s als unveränderlich ansieht, giebt diese Gleichung den mit LI parallelen Schnitt. Für $s = o$ wäre des Schnittes mit LN parallele halbe Axe $= \frac{a\,b}{\sqrt{(a^2 . Sin^2 \eta + b^2 . Cos^2 \eta)}} = A$ und die mit z parallele halbe Axe $= C = c$, für jeden andern Werth von s aber die mit LN oder r parallele halbe Axe

$$= A . \sqrt{\left\{1 - \frac{s^2 (a^2 . Sin^2 \eta + b^2 . Cos^2 \eta)}{a^4 . Sin^2 \eta + b^4 . Cos^2 \eta}\right\}},$$

die mit z parallele halbe Axe $= C . \sqrt{\left\{1 - \frac{s^2 (a^2 . Sin^2 \eta + b^2 . Cos^2 \eta)}{a^4 . Sin^2 \eta + b^4 . Cos^2 \eta}\right\}}$.

Es sind also alle so gelegte Schnitte ähnliche Ellipsen, weil ihre Axen ein unveränderliches Verhältniss für jeden Werth von s behalten.

§. 719. Aufgabe. Eine Gleichung für den Schnitt einer gegen alle Hauptaxen schief geneigten Ebne $QRST$ mit der ersten Fläche zu finden (Fig. 191.).

Auflösung. CP sey in einem der Hauptschnitte die der Sehne TR zugeordnete Axe, und TR die Durchschnittslinie unsrer Ebne mit der Ebne des Hauptschnittes. Es sey nun durch CP eine Ebne senkrecht auf die Ebne BGA gesetzt, und diese schneide die Ebne $QRST$ in QV, und QVC sey $= \zeta$, welches also nicht der Neigungswinkel der Ebnen gegen einander ist, sondern ein Winkel mit dessen Ebne parallel die s und z (§. 718.) liegen.

Unsre vorige Gleichung

$$r^2 = a^2 b^2 \left\{\frac{c^2 - z^2}{c^2 (a^2 . Sin^2 \eta + b^2 . Cos^2 \eta)} - \frac{s^2}{a^4 . Sin^2 \eta + b^4 . Cos^2 \eta}\right\}$$ galt für

die Abscisse $CV = s$, eine Ordinate $= r$ auf VR und eine Ordinate $= z$ senkrecht gegen diese Ebne; nenne ich also jetzt in dem Schnitte die auf VQ von V an gerechneten Abscissen $= q$, die mit VR parallelen Ordinaten, wie bisher $= r$, und $CV = k$, so ist $s = k - q . Cos\,\zeta$, und $z = q . Sin\,\zeta + p$, wenn ich unter p das Stück von z verstehe, welches oberhalb unsrer Ebne liegt. Für den Schnitt selbst ist $p = o$.

Unsre Gleichung, welche alle Punkte der krummen Fläche richtig angab, würde nun werden

$$r^2 = a^2 b^2 \left\{\frac{c^2 - (q . Sin\,\zeta + p)^2}{c^2 (a^2 . Sin^2 \eta + b^2 . Cos^2 \eta)} - \frac{(k - q . Cos\,\zeta)^2}{a^4 . Sin^2 \eta + b^4 . Cos^2 \eta}\right\},$$

also für $p = o$, die Gleichung zwischen q und r,

$$r^2 = a^2 b^2 \left\{ \frac{c^2 - q^2 . Sin^2 \zeta}{c^2 (a^2 . Sin^2 \eta + b^2 . Cos^2 \eta)} - \frac{k^2 - 2kq . Cos \zeta + q^2 . Cos^2 \zeta}{a^4 . Sin^2 \eta + b^4 . Cos^2 \eta} \right\},$$

welche bequemer ausgedrückt wird, wenn ich

$$q = w + \frac{c^2 k . Cos \zeta (a^2 . Sin^2 \eta + b^2 . Cos^2 \eta)}{c^2 . Cos^2 \zeta (a^2 . Sin^2 \eta + b^2 . Cos^2 \eta) + Sin^2 \zeta (a^4 . Sin^2 \eta + b^4 . Cos^2 \eta)}$$

setze, indem sie dann, wenn ich $\alpha^4 = a^4 . Sin^2 \eta + b^4 . Cos^2 \eta$

$\beta^2 = a^2 . Sin^2 \eta + b^2 . Cos^2 \eta$ nenne, in

$$w^2 = \frac{\alpha^4 c^2 (a^2 b^2 - \beta^2 r^2)}{a^2 b^2 (\beta^2 c^2 . Cos^2 \zeta + \alpha^4 . Sin^2 \zeta^2)} - \frac{\alpha^4 \beta^2 c^2 k^2 . Sin^2 \zeta}{(\beta^2 c^2 . Cos^2 \zeta + \alpha^4 . Sin^2 \zeta)^2}$$

übergeht.

§. 720. Lehrsatz. Alle parallele Schnitte des elliptischen Ellipsoids sind ähnliche Ellipsen.

Beweis. Die eben gefundene Gleichung ist die allgemeine für alle Schnitte, sie mögen was immer für eine Lage gegen die Hauptaxen haben. Ist $k = o$, so gilt sie für Schnitte durch den Mittelpunkt, deren einander zugeordnete halbe Axen nun sind $A' = \sqrt{\frac{\alpha^4 c^2}{\beta^2 c^2 . Cos^2 \zeta + \alpha^4 . Sin^2 \zeta}}$,

und $B' = \sqrt{\frac{a^2 b^2}{\beta^2}}$;

in jedem andern Falle aber wird, für irgend einen Werth von k,

die mit w parallele Axe $= A' . \sqrt{\left\{1 - \frac{\beta^2 k^2 . Sin^2 \zeta}{\beta^2 c^2 . Cos^2 \zeta + \alpha^4 . Sin^2 \zeta}\right\}}$,

die mit r parallele Axe $= B' . \sqrt{\left\{1 - \frac{\beta^2 k^2 . Sin^2 \zeta}{\beta^2 c^2 . Cos^2 \zeta + \alpha^4 . Sin^2 \zeta}\right\}}$,

welche einerlei Verhältniss zu einander behalten, so lange die Schnitte parallel bleiben.

§. 721. Lehrsatz. Wenn man vom Mittelpunkte C des elliptischen Ellipsoids eine gerade Linie CY nach dem Mittelpunkte irgend eines Schnittes zieht, so trifft diese die Mittelpunkte aller parallelen Schnitte, und wenn man sie bis an die Oberfläche des Ellipsoids verlängert und sie nun die diesen Schnitten conjugirte halbe Axe nennt $= C'$, so ist allemal $A'^2 + B'^2 + C'^2 = a^2 + b^2 + c^2$, das ist, wenn man die Quadrate der einander zugeordneten halben Axen des Schnittes, und das Quadrat der dem Schnitte zugeordneten halben Axe zusammen nimmt, so erhält man eine immer gleiche Summe.

Beweis. Nach §. 719., wo $q = w + \frac{c^2 k \beta^2 . Cos \zeta}{\beta^2 c^2 . Cos^2 \zeta + \alpha^4 . Sin^2 \zeta}$ war,

ist $VY = \frac{c^2 k \beta^2 . Cos \zeta}{\beta^2 c^2 . Cos^2 \zeta + \alpha^4 . Sin^2 \zeta}$, die Entfernung des Mittelpunktes von V; diese ist der Linie $k = CV$ proportional, wenn η und ζ einerlei Werth be-

halten, also liegen die Mittelpunkte aller mit $QRST$ parallelen Schnitte auf der geraden Linie CY. Die beiden Axen dieser Schnitte würden verschwinden, die Ebne also zur Berührung gelangen, wenn $k^2 = \frac{\beta^2 c^2 . Cos^2 \zeta + \alpha^4 . Sin^2 \zeta}{\beta^2 . Sin^2 \zeta}$ ist; also da CY allemal $= \sqrt{\{k^2 + VY^2 - 2k . VY . Cos \zeta\}}$,

oder $CY = \frac{k . Sin \zeta . \sqrt{\{\beta^4 c^4 . Cos^2 \zeta + \alpha^8 . Sin^2 \zeta\}}}{\beta^2 c^2 . Cos^2 \zeta + \alpha^4 . Sin^2 \zeta}$ ist, so geschieht die Berührung, wenn $CY = C' = \frac{1}{\beta} \sqrt{\left\{\frac{\beta^4 c^4 . Cos^2 \zeta + \alpha^8 . Sin^2 \zeta}{\beta^2 c^2 . Cos^2 \zeta + \alpha^4 . Sin^2 \zeta}\right\}}$ ist.

Nimmt man die hier und im vorigen §. gefundenen Werthe für die Quadrate der drei einander zugeordneten halben Axen, so ist

$$B'^2 + A'^2 + C'^2 = \frac{a^2 b^2}{\beta^2} + \frac{\alpha^4 c^2 \beta^2 + \beta^4 c^4 . Cos^2 \zeta + \alpha^8 . Sin^2 \zeta}{\beta^2 (\beta^2 c^2 . Cos^2 \zeta + \alpha^4 . Sin^2 \zeta)},$$

oder $B'^2 + A'^2 + C'^2 = \frac{a^2 b^2 + \beta^2 c^2 + \alpha^4}{\beta^2}$,

weil $\frac{\alpha^4 c^2 \beta^2 + \beta^4 c^4 . Cos^2 \zeta + \alpha^8 . Sin^2 \zeta}{\beta^2 c^2 . Cos^2 \zeta + \alpha^4 . Sin^2 \zeta} = \frac{(\alpha^4 . Sin^2 \zeta + \beta^2 c^2 . Cos^2 \zeta)(\alpha^4 + \beta^2 c^2)}{\alpha^4 . Sin^2 \zeta + \beta^2 c^2 . Cos^2 \zeta}$

ist. Daraus aber folgt, weil

$$\frac{a^2 b^2 + \alpha^4}{\beta^2} = \frac{a^4 . Sin^2 \eta + b^4 . Cos^2 \eta + a^2 b^2 (Sin^2 \eta + Cos^2 \eta)}{a^2 . Sin^2 \eta + b^2 . Cos^2 \eta} = a^2 + b^2,$$

ist, $A'^2 + B'^2 + C'^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Diese Eigenschaft ist der Eigenschaft der Ellipse (§. 188.) ganz entsprechend.

§. 722. Es lässt sich auch leicht zeigen, dass die allgemeine Gleichung für jeden Punkt der Oberfläche (am Ende des §. 719.), wenn man statt k die Abscissen $= v$ auf CY nimmt, dann w von Y an gerechnet auf YQ, r aber mit VR parallel; jene Gleichung giebt $\frac{w^2}{A'^2} + \frac{r^2}{B'^2} + \frac{v^2}{C'^2} = 1$.

Die Winkel, unter welchen die conjugirten Axen gegen einander geneigt sind, lassen sich nun auch leicht finden.

§. 723. Es ist allemal möglich, die Winkel so zu nehmen, dass zwei der einander conjugirten Axen gleich und auf einander senkrecht werden. Wenn die mit z parallele Hauptaxe $= c$ des elliptischen Ellipsoids grösser als a und kleiner als b ist, so giebt es ja gewiss einen halben Durchmesser des Hauptschnittes AGB, der $= c$ ist, und wenn man η den Werth giebt, welcher diesem Durchmesser entspricht, so wird der auf den Hauptschnitt senkrechte Querschnitt ein Kreis. Alle hiermit parallele Querschnitte sind dann auch Kreise, und folglich unterscheidet sich irgend ein Ellipsoid nur dadurch vom Sphäroid, dass bei jenem die zugeordnete Axe schief geneigt gegen die kreisförmigen Schnitte, bei diesem dagegen darauf senkrecht ist.

§. 724. Andre Fragen, die sich hieran anknüpfen, zum Beispiel, ob alle drei einander zugeordnete Axen A', B', C', einander gleich werden können, und welche Lage diese gleichen Axen haben werden; welche andre merkwürdige Bestimmungen sich für diese gleichen Axen ergeben mögen u. s. w. muss ich hier übergehen.

§. 725. Aufgabe. Eine Gleichung für alle Durchschnittslinien zu finden, welche durch Ebnen, senkrecht auf den elliptischen Hauptschnitt des hyperbolischen Ellipsoids (Fig. 192.) gebildet worden.

Auflösung. Da hier (§. 715. Fig. 192.) $f^2 = lx^2 + my^2 - nz^2$ oder $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ war, wenn ich $\frac{f^2}{l} = a^2$, $\frac{f^2}{m} = b^2$, $\frac{f^2}{n} = c^2$ nenne, so wird, wenn KM unter dem Winkel $= \eta$ gegen LD geneigt ist, und t auf CD, u mit KM parallel genommen wird,

$$\frac{t^2 - 2tu \,.\, Cos\,\eta + u^2 \,.\, Cos^2\,\eta}{a^2} + \frac{u^2 \,.\, Sin^2\,\eta}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$ die Gleichung für die zweite unsrer Flächen, oder wenn ich (vergl. §. 718.)

$$s = \frac{t \,.\, Sin\,\eta \,.\, \sqrt{(a^4 \,.\, Sin^2\,\eta + b^4 \,.\, Cos^2\,\eta)}}{a^2 \,.\, Sin^2\,\eta + b^2 \,.\, Cos^2\,\eta}$$ und

$$r = u - \frac{b^2\, t \,.\, Cos\,\eta}{a^2 \,.\, Sin^2\,\eta + b^2 \,.\, Cos^2\,\eta}$$ setze,

$$r^2 = \frac{a^2\, b^2}{a^2 . Sin^2\,\eta + b^2 . Cos^2\,\eta} - \frac{a^2\, b^2\, s^2}{a^4 . Sin^2\,\eta + b^4 . Cos^2\,\eta} + \frac{a^2\, b^2\, z^2}{c^2(a^2 . Sin^2\,\eta + b^2 . Cos^2\,\eta)}.$$

Diese Gleichung gilt für irgend einen auf LKM senkrechten Durchschnitt, wenn s einen unveränderlichen Werth erhält, und es erhellt sogleich, dass der Schnitt eine Hyperbel ist.

§. 726. Lehrsatz. Die eben betrachteten auf den elliptischen Hauptschnitt senkrechten Schnitte sind Hyperbeln mit einer in der Ebne LKM liegenden möglichen Axe, so lange s kleiner als $\sqrt{\frac{a^4 . Sin^2\,\eta + b^4 . Cos^2\,\eta}{a^2 . Sin^2\,\eta + b^2 . Cos^2\,\eta}}$, oder s kleiner als der den Sehnen KM zugeordnete halbe Durchmesser CP ist; sie werden gerade Linien, wenn $s = \sqrt{\frac{a^4 . Sin^2\,\eta + b^4 . Cos^2\,\eta}{a^2 . Sin^2\,\eta + b^2 . Cos^2\,\eta}}$, und Hyperbeln mit einer auf LKM senkrechten möglichen Axe, wenn s grösser als $\sqrt{\frac{a^4 . Sin^2\,\eta + b^4 . Cos^2\,\eta}{a^2 . Sin^2\,\eta + b^2 . Cos^2\,\eta}}$ ist. Der Beweis erhellt aus dem Vorigen (vergleiche §. 186.).

§. 727. Lehrsatz. Schnitte, die auf dem hyperbolischen Hauptschnitte NGO des hyperbolischen Ellipsoids senkrecht stehen, sind Ellipsen, wenn der Winkel, welchen die Hauptaxe CD mit der Einschnittslinie fF unsrer

Ebne macht, kleiner als ACD, sie sind Parabeln, wenn dieser Winkel $= ACD$, und Hyperbeln, wenn er grösser als ACD, als der halbe Asymptotenwinkel ist (Fig. 192).

Beweis. Es sey $CD = x$, $DF = z$, die auf diese Ebne senkrechte Ordinate $= y$, $Cf = t$, $fF = u$, $FfD = \eta$, so wird aus $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = o$, nun $\frac{t^2 + 2tu . Cos\,\eta + u^2 . Cos^2\,\eta}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{u^2 . Sin^2\,\eta}{c^2} = 1$, oder wenn hier

$$s = \frac{t . Sin\,\eta . \sqrt{(a^4 . Sin^2\,\eta + c^4 . Cos^2\,\eta)}}{a^2 . Sin^2\,\eta - c^2 . Cos^2\,\eta} = Cg,$$

und $r = u - \frac{c^2\,t . Cos^2\,\eta}{a^2 . Sin^2\,\eta - c^2 . Cos^2\,\eta} = gF$ ist,

$$r^2 = \frac{a^2\,c^2\,s^2}{a^4 . Sin^2\,\eta + c^4 . Cos^2\,\eta} + \frac{a^2\,c^2\,(y^2 - b^2)}{b^2\,(a^2 . Sin^2\,\eta - c^2 . Cos^2\,\eta)}.$$

Wenn hier $a . Sin\,\eta > c . Cos\,\eta$ oder $\eta > ACD$ ist, so ist der Coefficient von y^2 positiv, also der Schnitt allemal eine Hyperbel, deren mögliche Axe entweder mit y parallel, oder mit r parallel ist, je nachdem $s^2 < \frac{a^4 . Sin^2\,\eta + c^2 . Cos^2\,\eta}{a^2 . Sin^2\,\eta - c^2 . Cos^2\,\eta}$, oder grösser als $\frac{a^4 . Sin^2\,\eta + c^4 . Cos^2\,\eta}{a^2 . Sin^2\,\eta - c^2 . Cos^2\,\eta}$ ist, das heisst, wenn Ch die der fN richtig zugeordnete halbe Axe ist, je nachdem $Cg < Ch$ oder $> Ch$ ist. Für $Cg = Ch$ wird der Schnitt geradlinig, und dann berührt die Ebne die Hyperbel in h (§. 214.).

Wird η oder FfD kleiner als ACD, so ist der Schnitt allemal eine Ellipse.

Für $\eta = ACD$ oder $a . Sin\,\eta = c . Cos\,\eta$, wird die Gleichung $\frac{t^2 + 2tu . Cos\,\eta + u^2 . Cos^2\,\eta}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{u^2 . Sin^2\,\eta}{c^2} = 1$ in $b^2\,t^2 + 2b^2\,tu . Cos\,\eta = a^2\,b^2 - a^2\,y^2$ übergehn, also ist der durch y und u gelegte Schnitt eine Parabel.

Um diese besser kennen zu lernen, sey $CE = p$ auf der Asymptote, $EF = q$ parallel mit der andern Asymptote genommen, dann ist $CD = x$ $= (p + q)\,Cos\,\eta$, $DF = z = (p - q)\,Sin\,\eta$ oder $x = (p + q)\,\frac{a}{\sqrt{(a^2 + c^2)}}$, $z = (p - q)\,\frac{c}{\sqrt{(a^2 + c^2)}}$ und die erste Gleichung für unsre Fläche $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ giebt $\frac{(p + q)^2}{a^2 + c^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{(p - q)^2}{a^2 + c^2} = 1$, oder

$$\frac{4pq}{a^2 + c^2} = \frac{b^2 - y^2}{b^2}.$$

Für jeden Schnitt also, der in der bestimmten Entfernung $= q$ von der Asymptote gelegt ist, wird $y^2 = b^2 - \frac{4 b^2 q \cdot p}{a^2 + c^2}$.

Diese Gleichung zeigt, dass für positive q nothwendig $p < \frac{a^2 + c^2}{4 q}$ ist, oder dass erst da, wo die durch F mit der Asymptote CA parallel gezogne Linie in die Hyperbel eintrifft, die Parabel anfängt und sich dann gegen die negativen p hin fort erstreckt. Denn senkrecht neben F findet sich kein Punkt der krummen Fläche. Für negative q erstrecken die Parabeln sich neben den positiven p fort.

Wenn $q = o$, wird $y = \pm b$; das heisst, eine Ebne, die durch die Asymptote selbst senkrecht auf die Ebne ACO gesetzt ist, schneidet die krumme Fläche in zwei Parallellinien.

§. 727*. Wenn Ch vom Mittelpunkte bis an den Umfang der Hyperbel gezogen und durch h eine Ebne senkrecht auf ACO so gesetzt ist, dass sie die Hyperbel in h berührt, so bildet diese Ebne einen geradlinigen Schnitt mit unsrer krummen Fläche. Man könnte daher durch eine gerade Linie die ganze krumme Fläche beschreiben, wenn man in einer die Hyperbel berührenden auf ACO senkrechten Ebne einer geraden Linie die, vermöge unsrer Gleichung erforderliche Richtung gäbe, und während die Ebne mit ihrer Berührung von Punkt zu Punkt der Hyperbel fortrückte, auch die Linie ihre Richtung immer gehörig ändern liesse *). Eine ganz ähnliche Betrachtung fände bei §. 726. statt.

§. 728. **Bemerkung.** Wäre in Fig. 192. der Schnitt NGO nicht durch die Hauptaxe, sondern durch irgend eine conjugirte Axe des elliptischen Hauptschnitts gelegt, so würde auch da, wenn man die krumme Fläche durch Ebnen auf NGO senkrecht schnitte, die Durchschnittslinie eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel werden, je nachdem entweder der Winkel, welchen die Axe CD mit der gegen NGO senkrechten Ebne einschliesst, kleiner, gleich oder grösser als ACD ist.

Den Beweis hierfür, so wie mehrere andere merkwürdige Sätze muss ich hier übergehen.

§. 729. **Bemerkung.** Da die Betrachtung der Schnitte des elliptischen Hyperboloids oder unsrer dritten Fläche genau eben so geführt würde, so übergehe ich auch diese. Auch bei ihr giebt es, wenn Ebnen parallel mit einer Asymptote gelegt werden, parabolische Schnitte, in andern Fällen sind sie hyperbolisch oder elliptisch, und Ebnen, den elliptischen Schnitten parallel,

*) *Monge et Hachette application de l'analyse à la géometrie. Prem. Part. p.* 35.

schneiden gar nicht, oder geben unmögliche Schnitte, wenn sie dem Mittelpunkte zu nahe rücken *).

§. 730. Dass die Kegelfläche mit unter die dritte Art von Flächen gehört, wenn in der Gleichung $lx^2 + my^2 - nz^2 = f^2$, $f = o$ ist, lässt sich leicht übersehen, auch habe ich schon erwähnt, dass sie zugleich die asymptotische Fläche für das hyperbolische Ellipsoid, oder das elliptische Hyperboloid ist.

2. Flächen, die durch die Gleichung $lx^2 + my^2 + nz^2 + ax + by + cz = f^2$ dargestellt werden, wenn eine oder mehrere der Grössen $l, m, n, = o$ sind.

§. 731. Bemerkung. Wenn $l = o$ ist, so lässt es sich zwar durch eine Veränderung des Anfangspunktes der Coordinaten wohl erhalten, dass die mit y und z parallelen Ordinaten v und w nur noch zur zweiten Potenz erhoben vorkommen, aber das Glied ax lässt sich nun nicht wegschaffen. Hätte man nämlich $v = y + \frac{1}{2}\frac{b}{m}$, $w = z + \frac{1}{2}\frac{c}{n}$, so würde

$mv^2 + nw^2 + ax = \frac{1}{4}\left(\frac{b^2}{m} + \frac{c^2}{n}\right) + f^2$, wo sich aber nun, indem man $x = u + \frac{1}{4}\frac{b^2}{am} + \frac{1}{4}\frac{c^2}{an} + \frac{f^2}{a}$ setzt, das unveränderliche Glied wegschaffen und die Gleichung auf die Form $mv^2 + nw^2 + au = o$ bringen lässt.

Auch diese Gleichung enthält drei Hauptfälle oder drei von einander verschiedene krumme Flächen, die vierte nämlich, wo die Coefficienten von v^2 und w^2 beide positiv sind, die fünfte, wo einer von beiden $= o$ ist.

§. 732. Lehrsatz. Die zwei Hauptschnitte der vierten, durch $mv^2 + nw^2 = au$ dargestellten Fläche, welche durch v und u, und durch w und u gehen, sind Parabeln, deren Hauptaxe den Ordinaten u parallel liegt. Die dritte durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegte, mit v, w parallele Ebne berührt jene beiden Parabeln im Scheitel und berührt die krumme Fläche, ohne sie zu schneiden (Fig. 194.).

Beweis. Für $v = o$ ist $w^2 = \frac{a}{n}u$ die Gleichung für den einen Hauptschnitt IAK; für $w = o$ ist $v^2 = \frac{a}{m}u$ die Gleichung für den Hauptschnitt BAC.

*) Ich habe diese Sätze vollständig abgehandelt in einer Abhandlung, die sich in Hindenburgs Archiv für reine und angewandte Mathematik, zehntes Heft, findet.

Die dritte Ebne DE schneidet gar nicht, denn für $u = o$ muss auch $v = w = o$ seyn, weil sonst $mv^2 + nw^2 = o$ unmöglich wäre. Sie berührt also in A.

Die beiden Hauptschnitte sind Parabeln, deren Hauptaxe AG ist; der Parameter der einen ist $\frac{a}{n}$, der andere $\frac{a}{m}$.

§. 733. Lehrsatz. Wenn man durch den Anfangspunkt der Coordinaten die drei auf einander senkrechten Ebnen legt, so bildet bei der fünften Fläche, deren Gleichung $mv^2 - nw^2 = au$ ist, die mit v und u sowohl, als die mit w und u parallel gelegte Ebne einen parabolischen Schnitt; die mit w, v parallele Ebne bildet einen geradlinigen Durchschnitt.

Beweis. Wenn (Fig. 195.) C der Anfangspunkt der Coordinaten ist, und von C an auf CB die positiven u gerechnet werden, die v mit HI parallel, die w auf BC und CI senkrecht sind, so erhält man für $w = o$ die Gleichung $v^2 = \frac{au}{m}$, als für den Schnitt KCO geltend, der folglich eine über den positiven u gezeichnete Parabel ist; für $v = o$ hingegen erhält man $w^2 = -\frac{au}{n}$, als Gleichung für den Schnitt PCQ, der also gleichfalls eine Parabel ist, aber so liegt, dass nur für negative u Punkte der Durchschnittslinie vorkommen.

Setze ich dagegen $u = o$, so ist $w^2 = \frac{mv^2}{n}$ die Gleichung für den Schnitt $DCFGCE$, die also aus zwei, durch die Gleichung $w = \pm v \,.\, \sqrt{\frac{m}{n}}$ bestimmten, geraden Linien besteht.

§. 734. Die vierte Fläche erhält am schicklichsten den Namen elliptisches Paraboloid; die fünfte den Namen hyperbolisches Paraboloid. Die sechste Fläche ist der parabolische Cylinder.

§. 735. Lehrsatz. Bei dem elliptischen Paraboloid (der vierten Fläche) sind alle mit u, v parallelen Schnitte, zugleich auch alle mit u, w parallelen Schnitte Parabeln, dagegen alle mit v, w parallelen Schnitte Ellipsen, wenn u positiv, aber unmöglich, wenn u negativ ist (Fig. 194.).

Beweis. Für $w = b$ erhalten wir die mit BAC in der Entfernung $= b$ parallelen Schnitte durch die Gleichung $v^2 = \frac{au - nb^2}{m}$ ausgedrückt. Diese sind also Parabeln, deren Hauptaxe mit AG parallel ist, und deren Scheitel da liegt, wo $u = \frac{n \,.\, b^2}{a}$ ist. Etwas ganz ähnliches gilt für die mit KAI parallelen Schnitte.

Wenn hingegen $u = c$ ist, so giebt die Gleichung $mv^2 + nw^2 = au$ nun $w^2 = \frac{ac}{n} - \frac{mv^2}{n}$, und Schnitte, wie BRC, sind also Ellipsen, deren mit v parallele Hauptaxe $BC = 2\sqrt{\frac{ac}{m}}$, die auf BC senkrechte Hauptaxe $= 2\sqrt{\frac{ac}{n}}$ ist. Diese Ellipsen sind also unter sich ähnlich, da ihre Hauptaxen ein immer gleiches Verhältniss haben.

§. 736. Wenn $m = n$ ist, so werden die Ellipsen Kreise, und das Paraboloid ist zugleich ein runder Körper, den man das parabolische Conoid nennt.

737. Lehrsatz. Die den Hauptschnitten parallelen Schnitte des hyperbolischen Paraboloids (Fig. 195.), sind Parabeln, wenn sie einem der beiden parabolischen Hauptschnitte parallel, Hyperbeln dagegen, wenn sie dem geradlinigen Hauptschnitte parallel sind.

Beweis. Nehme ich auf CI, $CV = v = b$, so ist für die mit PCQ parallel gelegten Schnitten MOX,

$$w^2 = \frac{mb^2}{n} - \frac{au}{n}.$$

Diese Schnitte sind also immer Parabeln, deren Scheitel da liegt, wo $u = \frac{mb^2}{a}$ ist, das heisst, für alle Parabeln liegen die Scheitel neben CB oder neben den positiven u. Hätte ich dagegen $w = c$ gesetzt, um die Gleichung für Schnitte mit KCO parallel zu erhalten, so wäre für diese $v^2 = \frac{nc^2 + au}{m}$, diese Schnitte sind also ebenfalls Parabeln, deren Scheitel allemal neben einem unterhalb C liegenden Punkte, wo $u = -\frac{nc^2}{a}$ ist, liegt. Jene Parabeln OWX erstrecken sich von ihrem Scheitel gegen die negativen u hin, indem für grössere positive u, w unmöglich wird, sie erstrecken sich also in der Figur hinabwärts; diese Parabeln dagegen, welche mit KCO parallel liegen, haben ihren Scheitel tiefer als C und erstrecken sich hinaufwärts, so dass etwa eine durch SQU gehende Parabel einen solchen Schnitt, dessen Scheitel in Q läge, darstellen könnte.

Um endlich die mit FGE parallelen Schnitte zu erhalten, setze ich $u = k$,

$$\text{also } w^2 = \frac{mv^2 - ak}{n},$$

eine Gleichung für Hyperbeln, deren mögliche halbe Axe $= \sqrt{\frac{ak}{m}}$, wenn k po-

sitiv ist, mit v parallel, die unmögliche Axe, mit w parallel, durch $=\sqrt{\frac{-ak}{m}}$ dargestellt ist. Der halbe Asymptotenwinkel $=\mu$ wird also für alle diese Hyperbeln durch $tang^2\,\mu = \frac{m}{n}$ angegeben und ist für alle gleich und eben so gross als DCH (§. 733.). Die mögliche Axe ist nur so lange mit v parallel, als k positiv ist, das ist, Schnitte wie TOU, RKS haben mit HI parallel ihre mögliche Axe; dagegen Schnitte wie QX, PWZ, die tiefer liegen als C, haben die mögliche Axe senkrecht auf HI, und für sie ist der Winkel, welchen die Asymptoten mit der unmöglichen Axe machen, eben so gross, als er vorhin zwischen den Asymptoten und der möglichen Axe war.

§. 738. Diese Betrachtungen geben schon von der Fläche des hyperbolischen Paraboloids eine deutliche Vorstellung. Oberhalb C erweitert sich nämlich immer mehr der Raum zwischen den Scheiteln K, O der Hyperbeln und noch weiter geöffnet ist der Raum zwischen S, U, wo eine von Q herauf kommende, mit KCO parallele Parabel schneidet. Und eben das, was oberhalb C gilt in Beziehung auf die mit KCO parallele Ebne, gilt genau eben so unterhalb C in Beziehung auf die gegen KCO senkrechte Ebne.

§. 739. Lehrsatz. Die Schnitte der sechsten Fläche, deren Gleichung $w^2 = au$ ist, sind Parabeln, wenn die Ebne mit w, u parallel, aber zwei gerade Linien, wenn die Ebne auf u senkrecht ist.

Beweis. Welchen Werth auch v erreiche, immer bleibt $w^2 = au$ die Gleichung für die parallelen Schnitte des parabolischen Cylinders; dagegen für $u = b$, erhält man $w = \pm\sqrt{ab}$, als Gleichung für zwei Parallellinien, AB, CD (Fig. 196.), und für $w = c$ erhält man $u = \frac{c^2}{a}$ als Gleichung für eine einzige gerade Linie, weil zum Beispiel die Ebne $EFGH$ nur in FG die krumme Fläche schneidet.

§. 740. Bemerkung. Wenn man in der Gleichung für Flächen der vierten und fünften Art den Anfangspunkt der u verändert oder $u = \frac{b^2}{a} + t$ setzt, so erhält die Gleichung die Form $mv^2 \pm nw^2 = b^2 + at$, und wenn man hier $a = o$ setzt, so hat man die Gleichungen für den elliptischen und für den hyperbolischen geraden Cylinder. Die Fläche nämlich, die durch $mv^2 + nw^2 = b^2$ ausgedrückt wird, hat mit v, w parallel lauter gleiche elliptische Querschnitte, senkrecht auf v oder senkrecht auf w bestehen die Schnitte aus zwei Parallellinien; diese Fläche ist die elliptische Cylinderfläche. Die hyperbolische Cylinderfläche, für welche $mv^2 - nw^2 = b^2$ ist, hat mit v, w parallel hyperbolische Querschnitte. Wäre in der letzten Gleichung zugleich $b = o$, so ist $mv^2 = nw^2$ die Gleichung für zwei Ebnen, die sich in der durch den Anfangs-

punkt gehenden, auf v, w senkrechten Linie durchschneiden. Wenn dagegen $n = o$ ist, so passt die Gleichung $v^2 = \frac{b^2}{m}$ für zwei parallele Ebnen, deren Abstand von der durch u, w gelegten Ebne überall durch $v = \pm \sqrt{\frac{b^2}{m}}$ ausgedrückt wird, ohne dass es dabei auf die Werthe von u, w ankömmt.

§. 741. **Lehrsatz.** Alle Schnitte, welche mit der Axe AG der parabolischen Hauptschnitte (Fig. 194.) des elliptischen Paraboloids, oder mit AB (Fig. 195.) des hyperbolischen Paraboloids parallel sind, geben Parabeln, und zwar gleiche Parabeln, wenn sie unter einander parallel sind.

Beweis. Die mit AG parallele, auf die Ebne DE senkrechte Ebne (Fig. 194.) schneide DE in HV, so dass $EVH = \eta$, so wird, wenn man $AV = t$, $VH = s$ nennt, $v = t - s \,.\, Cos\, \eta$ und $w = s \,.\, Sin\, \eta$.

Die Gleichung $mv^2 + nw^2 = au$ geht also über in

$$mt^2 - 2mts \,.\, Cos\, \eta + s^2 (m \,.\, Cos^2 \eta + n \,.\, Sin^2 \eta) = au, \text{ woraus}$$

$$s = \frac{mt \,.\, Cos\, \eta}{m \,.\, Cos^2 \eta + n \,.\, Sin^2 \eta} \pm \sqrt{\left\{\frac{au}{m \,.\, Cos^2 \eta + n \,.\, Sin^2 \eta} - \frac{nmt^2 \,.\, Sin^2 \eta}{(m \,.\, Cos^2 \eta + n \,.\, Sin^2 \eta)^2}\right\}}$$

folgt. Es sey $q = s - \frac{mt \,.\, Cos\, \eta}{m \,.\, Cos^2 \eta + n \,.\, Sin^2 \eta}$, und zugleich

$p = t \,.\, Sin\, \eta \,.\, \frac{\sqrt{(n^2 \,.\, Sin^2 \eta + m^2 \,.\, Cos^2 \eta)}}{n \,.\, Sin^2 \eta + m \,.\, Cos^2 \eta}$, so wird für diese Coordinaten, welche den einander zugeordneten Durchmessern der Ellipse BRC parallel sind,

$$q^2 = \frac{ua}{n \,.\, Sin^2 \eta + m \,.\, Cos^2 \eta} - \frac{nmp^2}{m^2 \,.\, Cos^2 \eta + n^2 \,.\, Sin^2 \eta}.$$

Wird also hier eine Ebne, wie GHF, so gelegt, dass sie mit u parallel ist, und ist p der Abstand auf der zu Ff zugeordneten Axe der Ellipse, so wird der Schnitt eine Parabel, deren Scheitel da liegt, wo

$u = \frac{mnp^2}{a} \frac{(m \,.\, Cos^2 \eta + n \,.\, Sin^2 \eta)}{m^2 \,.\, Cos^2 \eta + n^2 \,.\, Sin^2 \eta}$ ist, und deren Parameter

$= \frac{a}{n \,.\, Sin^2 \eta + m \,.\, Cos^2 \eta}$. Dieser Parameter bleibt ungeändert, die Parabeln also völlig einander gleich, wenn mehrere Schnitte unter einander parallel sind.

§. 742. So weit gelten die Schlüsse so gut für das elliptische, als für das hyperbolische Paraboloid, nur dass man bei dem letztern n negativ setzen muss; für die eine und die andre dieser Flächen ist nun noch Folgendes insbesondere zu bemerken. Beim elliptischen Paraboloid liegt der Scheitel unsers parabolischen Schnitts immer höher hinauf, je grösser p, je grösser der Abstand von der Axe AG ist. Bei dem hyperbolischen Paraboloid wird, weil n negativ ist,

die Lage des Scheitels durch $u = \frac{-mnp^2}{a} \frac{(m \cdot Cos^2 \eta - n \cdot Sin^2 \eta)}{m^2 \cdot Cos^2 \eta + n^2 \cdot Sin^2 \eta}$ bestimmt, und der Scheitel liegt also unterhalb C (Fig. 195.), so lange $tang^2 \eta < \frac{m}{n}$ ist, oder $\eta < \mu$. Für solche Ebnen, deren Einschnitt in die Ebne GCI, mit CI einen kleineren Winkel als GCI macht, liegen die Scheitel unterhalb C, die Parabeln gehen aber mit ihren beiden Aesten aufwärts, weil für ein grösseres negatives u, als die Lage des Scheitels bestimmt, q unmöglich würde. Dagegen, wenn $\eta > \mu$ ist, oder die Durchschnittslinie unsrer Ebne mit der Ebne GCE unter einem Winkel $= \eta$ grösser als GCI gegen CI geneigt ist, so wird die Lage des Scheitels durch den positiven Werth $u = \frac{mnp^2}{a} \frac{(n \cdot Sin^2 \eta - m \cdot Cos^2 \eta)}{n^2 \cdot Sin^2 \eta + m^2 \cdot Cos^2 \eta}$ bestimmt, aber $q^2 = \frac{-au}{n \cdot Sin^2 \eta - m \cdot Cos^2 \eta} + \frac{nmp^2}{(m^2 \cdot Cos^2 \eta + n^2 \cdot Sin^2 \eta)}$ wird unmöglich für grössere positive u, und die Parabeln erstrecken also ihre Aeste herabwärts.

Wenn endlich $n \cdot Sin^2 \eta = m \cdot Cos^2 \eta$ oder $\eta = \mu$, das ist, wenn die Ebne mit DE oder GF parallel wäre, so hätten wir gleich anfangs (in §. 741.) $mt^2 - 2mts \cdot Cos \eta = au$, also für ein bestimmtes $t = b$,

$s = \frac{mb^2 - au}{2mb \cdot Cos \eta}$ gehabt. Diese Schnitte sind also gerade Linien, welche die Ebne HIB da schneiden, wo $u = \frac{mb^2}{a}$, das ist in einem Punkte der Parabel KCO. Dagegen, wenn man $u = o$ setzt, erhält man $s = \frac{b}{2 \, Cos \eta}$ als Ordinate des Punktes, wo die gerade Linie in die Ebne $DFEG$ einschneidet. Aber wenn $CV = b$ und Vv mit CG parallel gezogen ist, bis sie CE in v schneidet, so ist, weil $ECv = vVC = \eta$ war, $Vv = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{b}{Cos \eta}$; unsre gerade Linie trifft die Ebne $DFEG$ also in einem Punkte des geradlinigen Hauptschnittes, und der geraden Linie Neigung $= \lambda$ gegen die Ebne des Hauptschnitts würde durch $tang \lambda = \frac{2mb \cdot Cos \eta}{a}$, oder weil hier $Cos \eta = \sqrt{\frac{n}{m+n}}$ ist, durch $tang \lambda = \frac{2mb}{a} \sqrt{\frac{n}{m+n}}$ ausgedrückt. Der Neigungswinkel ist also verschieden, je nachdem b kleiner oder grösser ist. Wenn $b = CV = o$, so fällt unsere gerade Linie mit CG zusammen; wenn b wächst, so rückt der Durchschnittspunkt unserer geraden Linie mit der CE immer weiter auf dieser hinaus, und ihre Neigung gegen die Ebne GCE wird immer grösser; man

könnte daher die ganze krumme Fläche durch eine auf CE fortrückende gerade Linie, welcher man in den mit CG parallel und auf GCE senkrechten Ebnen jedesmal die richtige Neigung gäbe, die ganze krumme Fläche beschreiben.

§. 743. Die schiefen Schnitte will ich nicht umständlich durchgehen. Sie werden, wie Fig. 194. FTf, bei dem elliptischen Paraboloid allemal Ellipsen, und wenn man mehrere parallele Schnitte betrachtet, so liegen ihre Mittelpunkte sämmtlich in einer mit AG parallelen geraden Linie. Bei dem hyperbolischen Paraboloid werden die Schnitte Hyperbeln oder gerade Linien. Bei dem parabolischen Cylinder werden auch die schiefen Schnitte Parabeln.

Sechster Abschnitt.

Bestimmung der Berührungsebnen für krumme Flächen.

§. 744. **Bemerkung.** Wenn irgend eine krumme Fläche durch eine Gleichung so bestimmt wird, dass die Ordinate $YZ = z$ (Fig. 497.) irgend eines Punktes in ihr durch die Coordinaten $AX = x$, $XY = y$ angegeben wird, so wird z nach und nach andre Werthe erhalten, indem man x und y ändert. Um hier auf eine bequeme Weise die Lage einer Ebne zu bestimmen, welche die krumme Fläche in drei gegebnen Punkten schneidet, und daran die Bestimmung der Berührungsebne anzuknüpfen, wollen wir uns einen zweiten Punkt der krummen Fläche denken, der durch $AV = x + \Delta x$, $VU = XY = y$ und $US = z + \Delta z$, und einen dritten, der durch $AX = x$, $XR = y + \Delta y$ und $RQ = z + \delta z$ bestimmt wird. Der zweite Punkt liegt also in einer durch den ersten Punkt parallel mit AV gelegten Ebne, weil für beide y einerlei bleibt; der dritte Punkt liegt in einer durch den ersten Punkt mit y parallel gelegten Ebne, weil für ihn x denselben Werth wie für den ersten Punkt behält. Da im Allgemeinen z eine Aenderung leidet, wenn x sich ändert und y einerlei bleibt, und eben so für einen andern Werth von y ein geänderter Werth von z eintritt, obgleich x dasselbe bleibt; jene Aenderungen aber von diesen ganz verschieden seyn können, so habe ich jene mit $\Delta z = WS$, wenn ZW mit YU und XV parallel ist, diese dagegen mit $\delta z = TQ$, wenn ZT mit YR parallel ist, bezeichnet.

§. 745. **Aufgabe.** Die Gleichung für eine Ebne zu finden, welche durch die eben betrachteten drei Punkte geht.

Auflösung. Es sey allgemein $Au + Bv + Cw = D$ die Gleichung für irgend einen Punkt der Ebne, und u sey mit x, v sey mit y, w sey mit z parallel. Da nun unsre Ebne zuerst durch den Punkt gehen soll, dessen Coordinaten x, y, z sind, so ist ja für diesen Punkt $u = x$, $v = y$, $w = z$, und

es muss neben der allgemeinen für jeden Punkt unsrer Ebne geltende Gleichung

$$Au + Bv + Cw = D,$$

auch noch die bestimmte $Ax + By + Cz = D$, statt finden; also muss $A(u-x) + B(v-y) + C(w-z) = o$ seyn. Dieses ist eine Gleichung für alle Ebnen, die durch jenen Punkt gehen. Sie lässt sich auf

$$\frac{A}{C}(u-x) + \frac{B}{C}(v-y) + (w-z) = o$$

zurückführen. Aber unsre Ebne soll auch durch den Punkt gehen, für welchen $u = x + \Delta x$, $v = y$ und $w = z + \Delta z$ ist, und endlich durch den Punkt, für welchen $u = x$, $v = y + \Delta y$, $w = z + \delta z$ ist. Ausser der Gleichung $Ax + By + Cz = D$, erhalten wir also noch folgende

$$A(x + \Delta x) + By + C(z + \Delta z) = D,$$

und $Ax + B(y + \Delta y) + C(z + \delta z) = D$,

die von einander subtrahirt geben $A \Delta x + C \Delta z = o$,

und $B \Delta y + C \delta z = o$,

so dass $\frac{A}{C} = -\frac{\Delta z}{\Delta x}$ und $\frac{B}{C} = -\frac{\delta z}{\Delta y}$ wird.

Die Gleichung für die gesuchte Ebne ist also

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}(u-x) + \frac{\delta z}{\Delta y}(v-y) = w - z.$$

§. 746. Diese Gleichung wird aus dem, was im dritten Abschnitt gelehrt worden, völlig verständlich seyn. Dort nämlich ist gezeigt, dass die Gleichung $Au + Bv + w = D$ alle Ebnen umfasst, dass aber eine bestimmte Ebne durch sie ausgedrückt wird, wenn man für A, B und D bestimmte Werthe setzt. Solche bestimmte Werthe aber sind es, die man für x, y, z erhält, wenn sie auf einen gegebnen Punkt der krummen Fläche gehen, und die man für $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ erhält, wenn man vom ersten zum zweiten gegebnen Punkte, für $\frac{\delta z}{\Delta y}$, wenn man vom ersten zum dritten gegebnen Punkte fortgeht.

§. 747. Wenn wir wieder (wie in §. 366. 374.) die Grössen Δz und δz in Reihen entwickelt uns vorstellen, so erhellt, dass Δz, weil es bloss aus der Aenderung von x hervorging, durch eine Reihe dargestellt wird, die nach den Potenzen von Δx fortgeht, und dass eben so δz durch eine Reihe ausgedrückt wird, die bloss Potenzen von Δy enthält. Setzen wir also auch hier wieder da, wo nur das erste Glied dieser Differenzreihen angewandt wird, dx, dy, dz und unterscheiden $\overset{x}{d}z$ und $\overset{y}{d}z$, um durch das erste die von x abhängigen, durch das andre die von y abhängigen Aenderungen anzugeben, so lässt sich nun leicht folgender Lehrsatz übersehen.

§. 748. **Lehrsatz.** Wenn eine Gleichung zwischen x, y, z zur Be-

stimmung einer krummen Fläche gegeben ist, so ist die Lage der Berührungsebne durch die Gleichung

$$\frac{\overset{x}{dz}}{dx}(u-x) + \frac{\overset{y}{dz}}{dy}(v-y) = w - z,$$ bestimmt, wenn u, v, w die Coordinaten für irgend einen Punkt der Ebne bedeuten.

Beweis. Da die Berührungsebne die Grenze ist, an welche sich eine schneidende Ebne desto näher anschliesst, je näher die drei Punkte, durch welche diese gehen soll, an einander rücken, so finden ganz genau dieselben Schlüsse, wie §. 371. statt, und diese zeigen, dass die angegebne Gleichung für die Berührungsebne passt.

§. 749. Lehrsatz. Die Durchschnittslinie der Berührungsebne mit der Abscissenebne, in welcher die x, y und u, v liegen, macht mit dem x oder u den Winkel $= \eta$, welcher durch $\tan \eta = -\frac{\overset{x}{dz}}{dx} \cdot \frac{dy}{\overset{y}{dz}}$ bestimmt ist; und der Neigungswinkel $= \zeta$ der Berührungsebne gegen die Abscissenebne wird durch $\tan \zeta = -\sqrt{\left\{\left(\frac{\overset{x}{dz}}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\overset{y}{dz}}{dy}\right)^2\right\}}$ angegeben.

Beweis. Wenn ich kurz $\frac{\overset{x}{dz}}{dx} = p$ und $\frac{\overset{y}{dz}}{dy} = q$ nenne, so wird $w = o$, wenn $v = \frac{px + qy - z}{q} - \frac{p}{q}u$ ist. Das heisst, wenn $AX = u$, $XY = v$, $YZ = w$ ist (Fig. 199.) für irgend einen Punkt der Ebne $BCDE$, so ist die Durchschnittslinie durch die eben angegebene Gleichung bestimmt, also $AF = \frac{px + qy - z}{p}$, $AG = \frac{px + qy - z}{q}$, und da wir u, v auf einander senkrecht annehmen, $\tan GFH = -\frac{p}{q} = \tan \eta$. Es sey $AF = \frac{px + qy - z}{p} = f$, und der Punkt Y durch Coordinaten auf einander senkrecht $FR = s$, $RY = t$ bestimmt, so wie ja

$$u - f = s \,.\, \cos GFH + t \,.\, \sin GFH,$$
$$v = s \,.\, \sin GFH - t \,.\, \cos GFH;$$

und $w = -pf + pu + qv$, wird nun, weil $\sin GFH = \frac{-p}{\sqrt{(p^2 + q^2)}}$, $\cos GFH = \frac{q}{\sqrt{(p^2 + q^2)}}$, geben

$$w = -pf + pf + \frac{pqs - p^2t - pqs - q^2t}{\sqrt{p^2 + q^2)}} = -t\sqrt{(q^2 + q^2)}.$$ Da nun RYZ die Ebne des Neigungswinkels ζ, und $YZ = w$, senkrecht auf $RY = t$ ist, so wird $tang\ \zeta = -\sqrt{(p^2 + q^2)}$.

§. 750. Bemerkung. Wenn wir auch hier unter der Normallinie für den durch x, y, z bestimmten Punkt der krummen Fläche diejenige Linie verstehen, die durch eben diesen Punkt senkrecht auf die Berührungsebne gezogen ist, so erhellt, dass ihre Projection auf die Abscissenebne einen rechten Winkel mit der Durchschnittslinie der Berührungsebne und Abscissenebne macht, und dass der Normallinie Neigungswinkel gegen die Abscissenebne $= 90° - \zeta$ ist. Stellt nämlich Z (Fig. 199.) den Punkt vor, wo ZQ senkrecht auf $BCDE$ gezogen ist, so liegt sie in der Ebne des Neigungswinkels und ihre Neigung ZQR ist $= 90° - ZRQ = 90° - \zeta$, und ihre Projection YQ ist senkrecht auf BC.

§. 751. Lehrsatz. Wenn die vorigen Bezeichnungen beibehalten werden, so wird die Normallinie für jeden durch x, y, z bestimmten Punkt einer krummen Fläche durch die Gleichungen $u - x = -(w - z).p$; und $v - y = -(w - z).q$ ausgedrückt.

Beweis. Wenn man hier $(w - z)$ eliminirt, so ist $u - x = \frac{p}{q}(v - y)$; und dadurch ist für eben die durch jene zwei Gleichungen dargestellte gerade Linie die Gleichung für die Projection auf die Ebne der u, v gegeben, welche folglich unter einem Winkel $= \alpha$ gegen u geneigt ist, dessen Tangente $tang\ \alpha = \frac{v - y}{u - x} = \frac{q}{p} = tang\ (\eta - 90°)$, oder $= -Cotang\ \eta$ ist. Die Projection der Linie, welche durch die zwei Gleichungen im Lehrsatze angegeben ist, steht also senkrecht auf BC (Fig. 199.) und hat folglich die eine der Normallinie zukommende Eigenschaft. Um den Neigungswinkel der im Lehrsatz gegebnen Linie gegen die Abscissenebne zu finden, wollen wir uns (Fig. 200.) eine Ebne durch diese Linie ZQ senkrecht auf die Abscissenebne gesetzt denken, dann ist RQ die Projection, für welche wir so eben $tang\ \alpha = \frac{q}{p} = tang\ PQR$ fanden. Ist zugleich die Ebne UQP durch die Abscissenlinie senkrecht auf die Abscissenebne gesetzt, und stellt QV die Projection der QZ auf diese Ebne vor, so ist nach den Formeln des Lehrsatzes $tang\ VQU = tang\ VU = -p$; $tang\ VUZ = tang\ PQR = \frac{q}{p}$, der Winkel bei V ein rechter Winkel, weil die Ebne ZQV senkrecht auf PQU gesetzt ist, also Sphär. Trig. §. 79. $tang\ ZU = \frac{tang\ VU}{Cos\ U} = \frac{-p}{p}\sqrt{(q^2 + p^2)} = -\sqrt{(p^2 + q^2)}$; dieses ist also die *Cotangente* des Neigungswinkels dieser Linie gegen die Abscissenebne, also

die *Cotang.* dieses Winkels $= tang\,\zeta$, oder $ZQR = 90° - \zeta$, welches die zweite der Normallinie zukommende Eigenschaft ist.

§. 752. Aufgabe. Die Lage der Berührungsebne und der Normallinie für irgend einen durch Coordinaten $CX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ gegebnen Punkt der Kugelfläche, deren Halbmesser $= r$ ist (Fig. 198.) zu finden.

Auflösung. Die Gleichung für jeden Punkt der Kugelfläche ist, wenn der Anfangspunkt der Coordinaten im Mittelpunkte der Kugel ist,

$$z^2 = r^2 - x^2 - y^2.$$

Setze ich zuerst $x + \Delta x$ für x und $z + \Delta z$ für z, so ist

$$2z\Delta z + (\Delta z)^2 = -2x\Delta x - (\Delta x)^2,$$

also $\Delta z = -\frac{x}{z}\Delta x - \frac{x^2+z^2}{2z^3}(\Delta x)^2 - \text{etc.},$

daher $\frac{\overset{x}{dz}}{dx} = p = -\frac{x}{z}$; und genau durch eben die Ableitung $\frac{\overset{y}{dz}}{dy} = q = \frac{-y}{z}$.
Die Gleichung für die Ebne, welche die Kugel in jenem Punkte berührt, ist also, wenn u, v, w die Coordinaten irgend eines Punktes in ihr bezeichnen,

$$-\frac{x}{z}(u-x) - \frac{y}{z}(v-y) = w - z \text{ (§. 748.), oder da } z^2 = r^2 - x^2 - y^2,$$

$$ux + vy = r^2 - w\sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)}.$$

Für diese Ebne ist (§. 749.) $tang\,\eta = -\frac{p}{q} = -\frac{x}{y} = tang(180° - CVT)$ und dieser Werth bleibt ungeändert, wenn $\frac{x}{y}$ ungeändert bleibt, das ist, für alle Punkte, die auf dem Bogen SR liegen; für alle diese sind also die Einschnittslinien der Berührungsebnen in die Abscissenebne unter sich parallel und senkrecht auf den Radius CR, indem $tang\,TCV = \frac{y}{x}$ ist. Die Neigung der Berührungsebne ist durch $tang\,\zeta = -\sqrt{(p^2+q^2)} = -\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{z}$ bestimmt, also $tang(180° - ZTC) = tang\,\zeta = -Cotang\,ZCY$; daraus erhellt, dass der Radius CZ selbst die Normallinie in Z ist.

Die beiden Gleichungen für die Normallinie sind hier (§. 751.)

$$(u-x) = +(w-z)\frac{x}{z} \text{ und } (v-y) = +(w-z)\frac{y}{z}, \text{ oder } u = \frac{wx}{z};\ v = \frac{wy}{z},$$

woraus auch $(u-x) = \frac{x}{y}(v-y)$ folgt. Das letztere ist eine Gleichung für die gerade Linie CT, indem sie $u = \frac{vx}{y}$ giebt. Die erstere giebt $u = \frac{wx}{z}$,

also $u = o$ für $w = o$, das heisst, die Normallinie geht durch den Anfangspunkt der Abscissen oder durch der Kugel Mittelpunkt.

§. 753. Aufgabe. Die Lage der Berührungsebne für das hyperbolische Paraboloid zu bestimmen (Fig. 195.).

Auflösung. Um hier die Coordinaten eines Punktes der Berührungsebne noch immer mit u, v, w bezeichnen zu können, will ich statt der in §. 733. gebrauchten Buchstaben hier die Coordinaten eines Punktes der krummen Fläche durch x bezeichnen, wenn sie den u oder BC parallel, durch y, wenn sie den v oder HI parallel, durch z, wenn sie den w parallel, senkrecht auf HI sind. Dann ist die Gleichung für das hyperbolische Paraboloid $my^2 - nz^2 = ax$; und wenn ich hier die Aenderungen suche, welche x leidet, indem bloss y sich ändert, so giebt $m(y + \Delta y)^2 - nz^2 = a(x + \Delta x)$,

$$2my\,\Delta y + m(\Delta y)^2 = a\,\Delta x,$$

oder wenn ich das erste Glied der Aenderung von x hier durch $\overset{y}{d}x$ ausdrücke,

$$\frac{\overset{y}{d}x}{dy} = p = \frac{2my}{a}.$$

Eben so erhält man durch $z + \Delta z$ für z und durch $x + \delta x$ für x, das erste Glied der Aenderung von x, welches ich mit $\overset{z}{d}x$ bezeichne (weil diese Aenderung bloss von z abhängt), $\frac{\overset{z}{d}x}{dz} = q = -\frac{2nz}{a}$.

Die Gleichung für die Berührungsebne (§. 748.) ist hier

$$\frac{\overset{y}{d}x}{dy}(v - y) + \frac{\overset{z}{d}x}{dz}(w - z) = (u - x),$$

$$\text{also } \frac{2my(v-y) - 2nz(w-z)}{a} = u - x,$$

oder weil $-2my^2 + 2nz^2 = -2ax$ ist,

$$2myv - 2nzw = au + ax.$$

Für den Einschnitt dieser Ebne in die Ebne des geradlinigen Hauptschnittes $DCFGCE$ (Fig. 195.) ist $u = o$, also $w = \frac{myv}{nz} - \frac{ax}{2nz}$, als Gleichung für die gerade Linie, in welcher die Berührungsebne die Ebne des geradlinigen Schnittes trifft.

Für die beiden geraden Linien DE, FG, welche diesen Hauptschnitt darstellen, fanden wir (§. 733.), wenn ich hier als bestimmte Werthe z' und y' für z und y (oder in §. 733. für w und v) schreibe, $z' = \pm y' \sqrt{\frac{m}{n}}$, jene Ein-

schnittslinie der Tangentialebne schneidet also diese Linien DE, FG, da wo zugleich $w = z'$ und $v = y'$ ist, das ist, wo $y' \sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{my \cdot y'}{nz} - \frac{ax}{2nz}$, oder $y' = \frac{ax}{2my - 2z\sqrt{mn}}$ ist, oder $y' = \frac{my^2 - nz^2}{2\sqrt{m} \cdot (y\sqrt{m} - z\sqrt{n})} = \frac{y\sqrt{m} + z\sqrt{n}}{2\sqrt{m}}$.

Dieser Werth hängt nicht mehr von x ab, und es ergiebt sich daher folgender Satz: Wenn man in der Abscissenebne, in welcher der geradlinige Hauptschnitt liegt, die Coordinaten y und z so nimmt, dass $y\sqrt{m} + z\sqrt{n}$ einen unveränderlichen Werth erhält, so schneidet die Tangentialebne für jeden der Punkte, die sich senkrecht über den so bestimmten Punkten der Abscissenebne befinden, die Linie CG in ein und demselben Punkte. Aber wenn $y\sqrt{m} + z\sqrt{n}$ einen unveränderlichen Werth hat, so liegen die dadurch bestimmten Punkte in einer Linie, die mit CE parallel ist, und die Punkte senkrecht über dieser Parallele bilden den in §. 742. betrachteten geradlinigen Schnitt, der also ganz in der Tangentialebne liegt.

Aber obgleich die an einen Punkt dieser geraden Linie gelegte Berührungsebne diese ganze Linie in sich enthält, so ist sie doch nicht zugleich Berührungsebne für die übrigen Punkte der Linie. Wir wollen dieses nur an dem Falle, wo $x = o$ ist, oder für die einzelnen Punkte der Linie CG zeigen. Die Gleichung für die Tangentialebne geht hier in $2myv - 2nzw = au$ über.

Also an dem Punkte C, wo $y = z = o$ ist, wird $o = au$ die Gleichung für die Berührungsebne; das heisst, u bleibt $= o$ für jeden Werth von v und w, oder die Berührungsebne fällt mit der Ebne GCE völlig zusammen. Dagegen sey für irgend einen andern Punkt $y = k$, $x = o$, so muss, da der Punkt in der krummen Fläche liegen soll, $z^2 = \frac{m}{n} k^2$ seyn, und der Punkt liegt auf einer geraden Linie CG oder CE. Die Gleichung für die Berührungsebne, welche allgemein $2myv - 2nzw = au + ax$ war, ist also hier

$$2mkv \mp 2kw\sqrt{mn} = au,$$

und diese Ebne schneidet die Ebne GCE da, wo $u = o$, also $w = \pm v \sqrt{\frac{m}{n}}$ ist, das heisst in CG, aber sie hat eine Neigung $= \zeta$ gegen die Ebne GCE, die durch $\tang \zeta = \frac{2k\sqrt{m} \cdot \sqrt{(m+n)}}{a}$ ausgedrückt ist, also immer grösser wird, je grösser k ist. So lässt sich übersehen, welche verschiedene Stellungen die immer durch CG gelegte Ebne annehmen müsste, um nach und nach an allen in CG liegenden Punkten der Fläche berührend zu werden. Und ähnliche Betrachtungen fänden für jeden andern geradlinigen Schnitt statt.

Bei dieser Fläche nämlich tritt der besondere Umstand ein, dass die Ebne, welche zum Beispiel in C sich den zunächst um C liegenden Punkten vollkom-

men anschliesst und folglich berührend ist, dennoch die Fläche schneidet und einen geradlinigen Durchschnitt bildet.

Siebenter Abschnitt.

Von den Durchschnittslinien zweier krummer Flächen.

§. 754. **Bemerkung.** Wenn sich über der Abscissenebne BC (Fig. 201.) zwei krumme Flächen befinden, und es wird für die eine die Höhe $YZ = z$ durch die Coordinaten $AX = x$, $XY = y$ angegeben, so wird im Allgemeinen die Höhe $YU = u$, welche für die andre eben den Werthen von x und y entspricht, von z verschieden seyn. Giebt es aber Punkte, wo beide Flächen einander schneiden, so ist für diese $u = z$, wenn u und z sich auf dieselben Werthe von x und y beziehen; und wenn man vermittelst dieser Gleichheit beide Grössen u und z eliminirt, so hat man eine Gleichung zwischen x und y, welche diejenigen Punkte der Abscissenebne angiebt, über denen die Durchschnittspunkte liegen, oder eine Gleichung für die Projection der Durchschnitts-Curve.

§. 755. **Aufgabe.** Die gemeinschaftliche Durchschnittslinie zweier Kugelflächen zu bestimmen.

Auflösung. Es sey A, der Mittelpunkt der einen Kugel (Fig. 202.) zugleich der Anfangspunkt der Coordinaten; der Mittelpunkt D der andern Kugel sey durch $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ gegeben. Der Halbmesser der erstern sey $= r$, der andern $= \varrho$, so ist, wenn

x, y, z die Coordinaten der erstern,

x, y, u die Coordinaten der zweiten Kugelfläche sind, und x mit AB, y mit BC, z und u mit CD parallel sind, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ die Gleichung für die erste und $\varrho^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (u - c)^2$ die Gleichung für die zweite Kugelfläche.

Für $z = u$ ist also
$$\varrho^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + c^2 - 2c\sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)} + r^2 - x^2 - y^2,$$
oder
$$\varrho^2 - a^2 - b^2 - c^2 - r^2 = -2ax - 2by - 2c\sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)}.$$

Hieraus liessen sich weitere Folgerungen für die Projection der Durchschnitts-Curve und für diese selbst ableiten; aber ich verweile dabei nicht, da diese ganze Untersuchung nur eine Wiederholung dessen seyn würde, was in §. 659. vorgekommen ist.

§. 756. **Aufgabe.** Die Durchschnittslinie der Kugelfläche mit der Oberfläche eines geraden Kegels von kreisförmiger Grundfläche zu bestimmen (Fig. 204.).

Auflösung. Es sey A die Spitze des Kegels und in einer auf die Axe AB senkrechten Ebne $AX = x$, $XY = y$ und mit der Axe parallel $YZ = z$ für

die Kegelfläche, $YU = u$ für die Kugelfläche genommen. Der Mittelpunkt der Kugel sey durch Coordinaten $x = a$, $y = o$, $z = b$ bestimmt, ihr Halbmesser $= r$, so ist für die Kegelfläche $z^2 = m^2 (x^2 + y^2)$ (§. 686.), und für die Kugelfläche $(u - c)^2 = r^2 - (x - a)^2 - y^2$.

Für die gemeinschaftliche Durchschnittslinie beider ist $z = u$, also wenn ich $z = m\sqrt{(x^2 + y^2)}$ als Werth für u setze,

$$m^2 (x^2 + y^3) - 2mc\sqrt{(x^2 + y^2)} + c^2 = r^2 - x^2 - y^2 + 2ax - a^2,$$

welches die Gleichung für die Projection der Durchschnittslinie auf die Ebne $LMNO$ ist. Diese Projection, welche ich die erste nennen will, ist also eine Linie der vierten Ordnung, die aber für $c = o$, oder wenn der Mittelpunkt der Kugel in einer durch des Kegels Spitze gezogne Senkrechte auf die Axe liegt, in $(m^2 + 1)(x^2 + y^2) = r^2 + 2ax - a^2$ übergeht.

Um eine zweite Projection auf die durch ADC gelegte Ebne (Fig. 203.) zu finden, muss y eliminirt werden. Hier nämlich würde man sagen, wenn x und z gegebne Werthe haben, so wird der mit y parallele Abstand für die Kegelfläche durch $y^2 = \frac{z^2}{m^2} - x^2$, für die Kugelfläche durch

$y^2 = r^2 - (x - a)^2 - (z - c)^2$ ausgedrückt; also da, wo beide gleich sind, ist $\frac{z^2}{m^2} - x^2 = r^2 - (x - a)^2 - (z - c)^2$, das ist

$\frac{z^2}{m^2} + z^2 - 2zc + c^2 - r^2 + a^2 = 2ax$, als allgemeine Gleichung für die zweite Projection, die für $c = o$, in $z^2 = \left(\frac{2ax - a^2 + r^2}{m^2 + 1}\right) m^2$ übergeht, und immer eine Parabel giebt.

Die dritte Projection auf eine Ebne, die senkrecht auf $LMNO$ mit y parallel gelegt ist, würde entstehen, wenn man x eliminirte und $x^2 = \frac{z^2}{m^2} - y^2$, in die Gleichung $(z - c)^2 = r^2 - y^2 - (x - a)^2$ setzte, wodurch diese gäbe: $z^2 - 2zc + c^2 = r^2 - a^2 - \frac{z^2}{m^2} + 2a\sqrt{\left(\frac{z^2}{m^2} - y^2\right)}$, so dass diese Projection allemal durch eine Gleichung des vierten Grades ausgedrückt wird.

§. 757. Wenn in der Gleichung für die erste Projection $c = o$ gesetzt wird, ein Fall, den Fig. 203. darstellt, so gab sie

$$(m^2 + 1) y^2 = r^2 - a^2 + 2ax - (m^2 + 1) x^2,$$

oder wenn ich den Anfangspunkt der x so verlege, dass $x = v + \frac{a}{m^2 + 1}$ sey,

$$(m^2 + 1) y^2 = r^2 - \frac{m^2 a^2}{m^2 + 1} - (m^2 + 1) v^2, \text{ oder}$$

$y^2 = \frac{r^2}{m^2+1} - \frac{m^2 a^2}{(m^2+1)} - v^2$; diese Gleichung gehört für einen Kreis vom Halbmesser $\frac{\sqrt{(r^2(m^2+1) - a^2 m^2)}}{m^2+1}$, dessen Mittelpunkt um $\frac{a}{m^2+1}$ von der Spitze des Kegels entfernt liegt. Heisst der Winkel *DAV*, den die Seitenlinie des Kegels mit der Axe macht $= \beta$, so ist $m = Cotang\,\beta$, also des Kreises Halbmesser $= Sin\,\beta . \sqrt{(r^2 - a^2 . Cos^2\beta)}$, und der Abstand des Mittelpunkts von der Spitze des Kegels $= a . Sin^2\beta$.

Für eben diese Voraussetzung, dass $c = o$ sey, wird die zweite Projection durch $z^2 = (2ax - a^2 + r^2)\left(\frac{m^2}{m^2+1}\right) = (2ax - a^2 + r^2)\,Cos^2\beta$ ausgedrückt. Verlege ich hier den Anfangspunkt der x, so dass $x = v + \frac{1}{2}a - \frac{r^2}{2a}$ wird, so ist $z^2 = 2av . Cos^2\beta$, und der Scheitel der auf der Ebne *DAC* als Projection gezeichneten Parabel liegt auf *AC* in dem Abstande $= \frac{1}{2}a - \frac{r^2}{2a}$. Aber nicht jedem Punkte dieser Parabel entspricht ein Punkt der Durchschnittscurve, sondern wenn man zum Beispiel $z = o$ und $x = \frac{1}{2}a - \frac{r^2}{2a}$ setzen wollte, so würde für die Kegelfläche $y^2 = -\left(\frac{1}{2}a - \frac{r^2}{2a}\right)^2$, und für die Kugelfläche $y^2 = r^2 - \left(\frac{1}{2}a + \frac{r^2}{2a}\right)^2 = -\left(\frac{1}{2}a - \frac{r^2}{2a}\right)^2$, also beide Werthe von y zwar anscheinend gleich, aber beide unmöglich seyn.

Diese beiden Projectionen zeigen, wenn man sich über der Ebne *LMNO* einen geraden runden Cylinder, und über der Ebne *DAC* einen geraden parabolischen Cylinder denkt, deren Grundflächen eben jene Projectionen sind, dass dann die Durchschnittslinie dieser beiden Cylinder ganz dieselbe ist, welche durch Kegel und Kugel gebildet wird, wenn der Mittelpunkt der Kugel in einer durch die Spitze des Kegels gezognen, auf die Axe senkrechten Linie in *C* liegt (Fig. 203.).

Die dritte Projection wird selbst dann, wenn $c = o$ ist, eine Linie der vierten Ordnung. Die Gleichung für sie ist in diesem Falle

$$z^2 = r^2 - a^2 - \frac{z^2}{m^2} + 2a\sqrt{\left(\frac{z^2}{m^2} - y^2\right)}, \text{ oder}$$

$$[z^2 . Sec^2\beta - (r^2 - a^2)]^2 = 4a^2(z^2 . tang^2\beta - y^2).$$

Daraus folgt zu Bestimmung der Punkte, wo $y = o$ wird

$$z^4 - 2z^2(r^2 - a^2 + 2a^2 . Sin^2\beta)\,Cos^2\beta + (r^2 - a^2)^2\,Cos^4\beta = o,$$

oder $z^2 = (r^2 - a^2 + 2a^2 . Sin^2 \beta) Cof^2 \beta \pm Cof^2 \beta \sqrt{\{4a^2 . Sin^2 \beta (r^2 - a^2) + 4a^4 . Sin^4 \beta\}}$

$z^2 = (r^2 - a^2 . Cof^2 \beta + a^2 . Sin^2 \beta) Cof^2 \beta \pm 2 Cof^2 \beta . a Sin \beta . \sqrt{\{r^2 - a^2 . Cof^2 \beta\}}$,

das ist $z = \pm \{a . Sin\, \beta \pm \sqrt{(r^2 - a^2 . Cof^2 \beta)}\} Cof\, \beta$. Diese Gleichung giebt die vier Punkte G, H, I, K an, wo die Projection, die man sich auf DAC senkrecht denken muss, die CG schneidet. Um die Punkte zu haben, wo ihre Tangente der CG parallel ist, setze ich in die Gleichung

$z^4 - 2z^2 (r^2 + a^2 . Sin^2 \beta - a^2 . Cof^2 \beta) Cof^2 \beta + (r^2 - a^2)^2 Cof^4 \beta = - 4a^2 y^2$

$z + \Delta z$ statt z, und $y + \Delta y$ statt y, behalte aber nur das erste Differenzglied bei; dann ist $4z^3 \Delta z - 4z \Delta z . Cof^2 \beta (r^2 + a^2 . Sin^2 \beta - a^2 . Cof^2 \beta) = - 8a^2 y \Delta y$, also $\frac{dy}{dz} = \frac{- z (z^2 - (r^2 + a^2 . Sin^2 \beta - a^2 . Cof^2 \beta) Cof^2 \beta)}{2 a^2 y}$. Dieser Bruch, der die Tangente des Neigungswinkels angiebt, den die Berührungslinie mit z macht, wird $= o$, wenn $z = Cof\, \beta \sqrt{(r^2 + a^2 . Sin^2 \beta - a^2 . Cof^2 \beta)}$ ist, und nur in diesem Falle wird die Berührungslinie mit CG parallel, weil für $z = o$, y unmöglich ist. In Fig. 203. ist diese Projection dargestellt; die Punkte H, G, I, K entsprechen offenbar den Punkten V, W, X, Y.

§. 758. Wir wollen noch den zweiten Fall betrachten, Fig. 204., wo der Mittelpunkt C der Kugel in der Seitenlinie des Kegels ist (Fig. 204.). Offenbar ist da $\frac{c}{a} = tang\, VAX$, also $\frac{a}{c} = tang\, \beta = \frac{1}{m}$, also die Gleichung für die erste Projection $\left(\frac{c^2 + a^2}{a^2}\right) (x^2 + y^2) - \frac{2\, c^2}{a} \sqrt{(x^2 + y^2)} + c^2 = r^2 - a^2 + 2\, a\, x$,

oder, wenn ich $x^2 + y^2 = \varrho^2$ und $x = \varrho . Cof\, \psi$ setze,

$\varrho^2 - \frac{2\, a\, \varrho\, c^2}{a^2 + c^2} = \frac{r^2\, a^2}{a^2 + c^2} - a^2 + \frac{2\, a^3\, \varrho . Cof\, \psi}{a^2 + c^2}$. Diese Gleichung drückt, wenn (Fig. 204.) S ein Punkt dieser Projection auf der Ebne LN ist, den Abstand $CS = \varrho$ durch den Winkel $SAX = \psi$ aus. Sie giebt

$$\varrho = \frac{a\, (c^2 + a^2 . Cof\, \psi}{a^2 + c^2} \pm \sqrt{\left\{\frac{r^2\, a^2}{a^2 + c^2} - \frac{a^4\, (a^2 . Sin^2 \psi + 2\, c^2 (1 - Cof\, \psi))}{(a^2 + c^2)^2}\right\}}$$

und für jeden Werth von ψ gehören also zwei ungleiche Werthe, wie sich das auch leicht voraussehen liess, da der Einschnitt in die Kegelfläche bei PQ eine andre Projection, als der bei RT giebt. Die Linie $p\,v\,q$ (Fig. 204.) stellt die eine Hälfte dieser Projection vor; die Punkte p, q, r, t entsprechen den Punkten P, Q, R, T, den Punkt a muss man sich mit A zusammenfallend denken.

Die zweite Projection wird auch hier eine Parabel, die sich leicht vollständig untersuchen lässt.

Die dritte Projection wird hier ausgedrückt durch

$z^2 \left(\frac{a^2 + c^2}{c^2}\right) - 2\, z\, c + c^2 + a^2 - r^2 = 2\, a \sqrt{\left\{\frac{a^2\, z^2}{c^2} - y^2\right\}}$, und be-

steht wieder aus zwei von einander abgesonderten Ovalen, die aber hier ungleich werden. In der Figur sind sie durch $p'wq'$ und $t'wr'$ dargestellt, und die Punkte q', p', r', t' entsprechen den höchsten und tiefsten Punkten Q, P, R, T des Schnittes.

§. 759. Bemerkung. Diese Durchschnittslinien der Kegelfläche und Kugelfläche sind doppelt gekrümmte, nicht in einer Ebne liegende Linien. Wenn man unter Cylinderflächen alle diejenigen versteht, in welchen sich die sämmtlichen, durch alle Umfangspunkte der Grundfläche unter sich parallel und gegen die Grundfläche senkrecht oder geneigt gezogenen geraden Linien befinden, so dienen solche Cylinderflächen am besten, um durch ihre Durchschnittslinien sich eine Vorstellung der doppelt gekrümmten Linie zu machen. Errichtet man nämlich über zwei der eben betrachteten Projectionen senkrechte Cylinder, so ist die Durchschnittslinie beider ganz einerlei mit unsrer Curve. Diese Betrachtung führt zur Beantwortung der Frage, wie man die Berührungslinie einer doppelt gekrümmten Linie finde.

§. 760. Aufgabe. Die Berührungslinie einer doppelt gekrümmten Linie zu bestimmen.

Auflösung. Wenn (Fig. 204.) pvq die eine, durch senkrechte Ordinaten bestimmte Projection unsrer Curve ist, so liegt diese ganze doppelt gekrümmte Linie auf der Oberfläche eines senkrechten Cylinders, dessen Grundfläche pvq ist. Legt man also an irgend einen Punkt unsrer Curve eine Ebne, welche die Cylinderfläche berührt, so berührt diese auch die Curve. Ist nun eben so $wq'u$ eine Projection unsrer Curve auf eine zweite gegen die vorige senkrechte Ebne, so liegt unsre ganze Curve auch in der auf diese Grundfläche senkrechten Cylinderfläche, und wenn man auch hier an den vorhin betrachteten Punkt unsrer Curve eine den Cylinder berührende Ebne legt, so berührt diese zugleich die Curve. Die Durchschnittslinie beider an die Cylinder gelegten Berührungsebnen ist die Berührungslinie unsrer Curve.

Druckfehler und Verbesserungen.

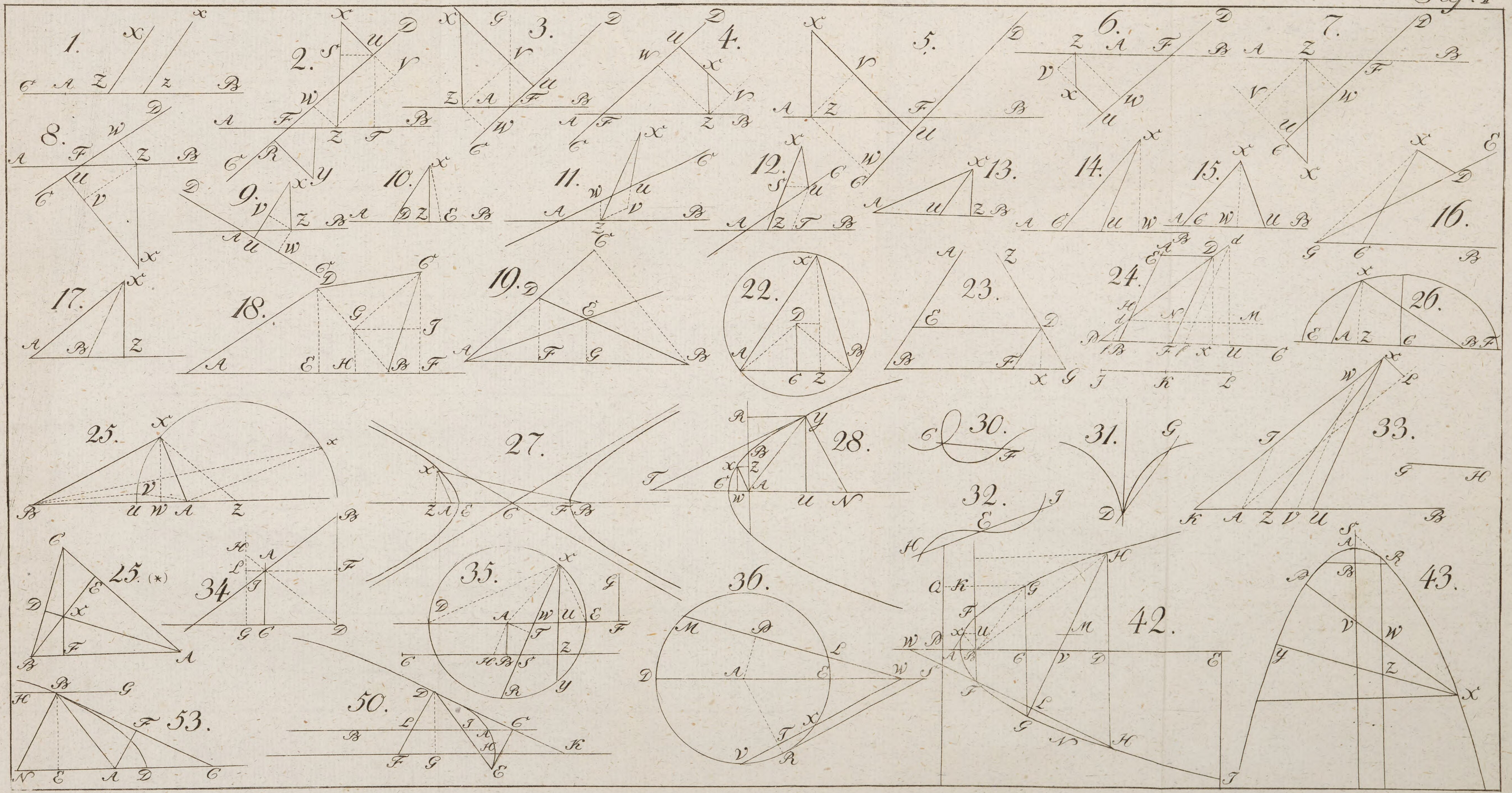
Seite 5. Die hier angeführten Sätze der Geometrie, und so die in der Folge vorkommenden Nachweisungen geometrischer und trigonometrischer Sätze beziehen sich auf das von mir herausgegebene: Lehrbuch der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie.

— 6. Zeile 3. lies: $= y : x$
— 17. — 3. l.: $= c^2 - (x - a)^2$
— 20. — 15. l.: $(b - z)^2$
— — — 7 von unten lies: $\mp \frac{a}{a^2 + b^2} \surd$
— 21. — 9. lies: $R^2 - AE^2$
— — — 12. l.: $\surd(R^2 (a^2 + b^2) -$
— 22. — 11. l.: $Sin\ A : Sin\ B$
— 23. — 3. l.: allenfalls, statt: ebenfalls
— 28. — 3 von unten fehlt das Zeichen: $=$
— 30. — 17. lies: $- a^2 x^2$
— 31. — 8. l.: $CZ = x$
— 35. — 19. l.: DG, statt: DY
— 39. — 29. l.: in der letzten Gleichung §. 92.
— 41. — 3. l.: $- (r^2 - u^2 . Sin^2 \alpha)$
— 42. — 12. l.: $\surd r : \surd R$
— 43. — 1. l.: $= - tang\ 2 KBD$
— 47. — 15. fehlt im letzten Gliede der Divisor ϱ'
— 51. — 19. lies: Fig. 42.
— — — 8 von unten lies: VG
— 52. — 15. lies: $VM - MG$
— 54. — 3. l.: $(\gamma - \alpha)$, statt: $(g - \alpha)$
— 57. — 3. l.: für diesen Durchmesser
— — — 12. l.: $CI = w' +$
— 58. — 7. l. gezogenen Sehnen
— — — 8. l.: $+$ statt: $=$
— — — 9. l.: $-$ statt: $=$
— 59. — 12. l.: $Sin\ \alpha$, statt: $Sin^2\ \alpha$
— 60. — 5. l.: $\frac{\frac{1}{2} p . Sin\ 2 (\alpha - \gamma)}{Sin\ 2 \gamma . Sin^2 \alpha}$
— 66. — 9. l.: z, statt t
— 70. — 3. l.: $- \frac{b^2 v^2 . Cos^2 \beta}{a^2}$
— — — 17. fehlt im letzten Gliede der Factor u^2
— — — 5 von unten muss $Cos^2 \beta$, statt $Cos\ \beta$ stehen
— 73. — 8. lies: aber trifft die
— — — 10. l.: die Hyperbel
— 77. — 3 von unten muss im Nenner $Sin^2 (\alpha'' + \varepsilon)$ stehen
— 78. — 8. 7. 6 von unten lies: BK, statt: AK
— 84. — 27. lies: BMA, statt MEA
— 86. — 5. lies im Nenner u', statt a'
— 88. — 5. l.: $a^2\ 2 x \surd(a^2 - b^2)$

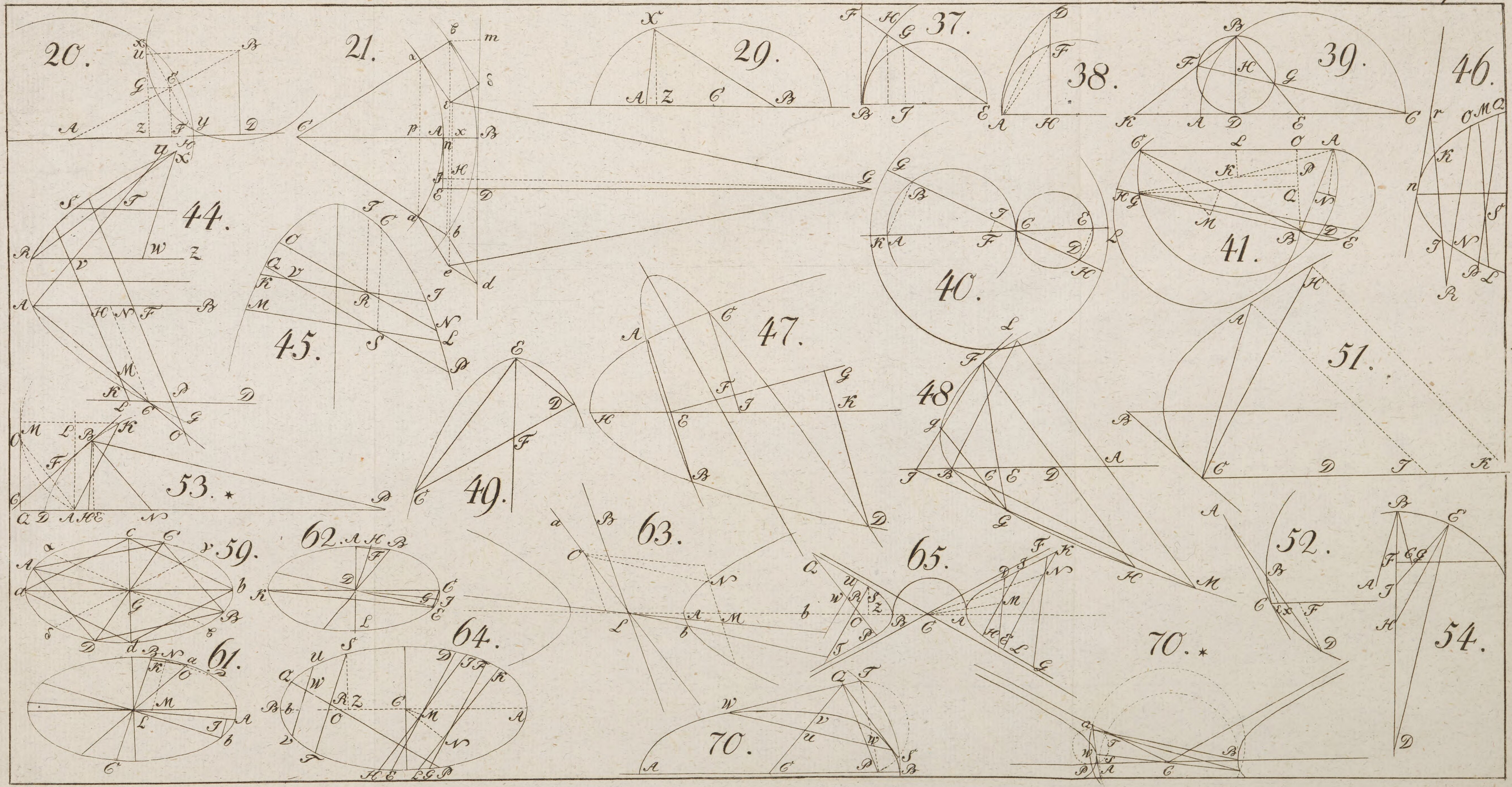
S. 90. Z. 10. lies: $\sqrt{(a^2 - b^2)}$, statt $(a^2 - b^2)$
— 95. — 2. l.: Tq, statt: q
— 97. — 7. l.: immer minderer
— 98. — 6 von unten fehlt der Factor A
— 104. — 20. muss im Nenner a^2, statt a stehen
— 107. — 2. lies: HS
— 117. — 14. fehlt das Potenzzeichen, und statt u muss $-u$ im Zähler stehen
— 119. — 6. lies: $Cos\, DNM = \frac{-x + ae}{cx - a}$
— — — 10. l.: $(ae + u)$, statt: $(ae + a)$
— 123. — 16. l.: §. 306.
— 124. — 9. von unten lies: $(A + B + C)$, statt: $(A + B - C)$
— 128. — 16. lies: z^n, statt z^m; und x^m, statt x
— 135. — 2. von unten lies: $-2\gamma\delta xz . Cos\,\zeta + \delta^2 x^2 = A^2 \gamma^2$
— 138. — 25. lies: u, statt: u^2
— — — 27. l.: $-u^2 (\lambda + u)$
— 146. — 6. l.: $a^3 x$
— 151. — 11. l.: $\left(\frac{a}{\lambda} + \frac{b^2}{\lambda^2}\right) x$
— 153. — 11. l.: $\left(c^2 + \frac{\beta}{\alpha} e^2\right)$
— 159. — 8. fehlt das $+$
— — letzte Z. fehlt der Exponent 2
— 160. Z. 9. von unten lies. Δx, statt. $(\Delta x)^2$
— 166. — 11. 12. steht statt: Δx, Δz
— 171. — 7. lies: f^4
— 178. — 23. müssen folgende Worte ausgestrichen werden: „auch im Nenner --- stehen"
— 179. — 4. lies: QM^2
— 180. — 12. l.: $3z^2$
— 181. — 6. l.: BZ
— 189. — 18. l.: s^2, statt: r^2
— — — 19. l.: $s^2 (st - \frac{1}{2} a^2 + 2at\sqrt{2}) = o$
— 197. — 1. l.: x^2
— — — 11. l.: für $z = o$
— 198. — 2. l.: z^3
— — — 6. fehlt: $2 (\Delta x)^2 (\Delta z)^2$
— — — 7. steht Δz, statt Δx
— — — 21. lies: $z = \frac{3\sqrt{3}}{2} . r$
— 202. — 18. l.: b^2, statt b.
— — — 4. von unten lies: §. 342.
— 204. — 8. lies: $-6az^2 \Delta z$
— — — 9. von unten lies: $(\Delta z)^2 . (\Delta x)^2$
— 213. — 26. lies: Fig. 134.
— 217. — 2. l.: $z =$
— 221. — 6. von unten lies: CD und CF
— 226. — 17. lies: $+ 4apx^3$
— 227. — 5. l.. d

S. 228. Z. 19. lies: $(x - \frac{1}{2} p)^2$
— 232. — 16. l.: $a <$
— 238. — 10. von unten lies: — 0,1984
— 240. — 22. lies: $AF =$
— 243. — 5. von unten muss im Nenner $(\Delta x)^2$, statt $(\Delta z)^2$ stehen
— 245. — 5. lies: $z - \Delta z$
— 253. — 26. l.: ZX, statt: UZ
— 259. — 17. l.: $\pi - \omega$
— 260. — 21. l.: $a\ Cos\ \varphi\ .\ Sin\ \Delta\varphi$
— 265. — 7. l.: Hypocycloide.
— 267. — 1. im Nenner lies: r^3
— 270. — 10. von unten lies: $\frac{22}{7}$
— 287. — 3. von unten lies: mv
— 297. — 4. von unten lies: welchen.

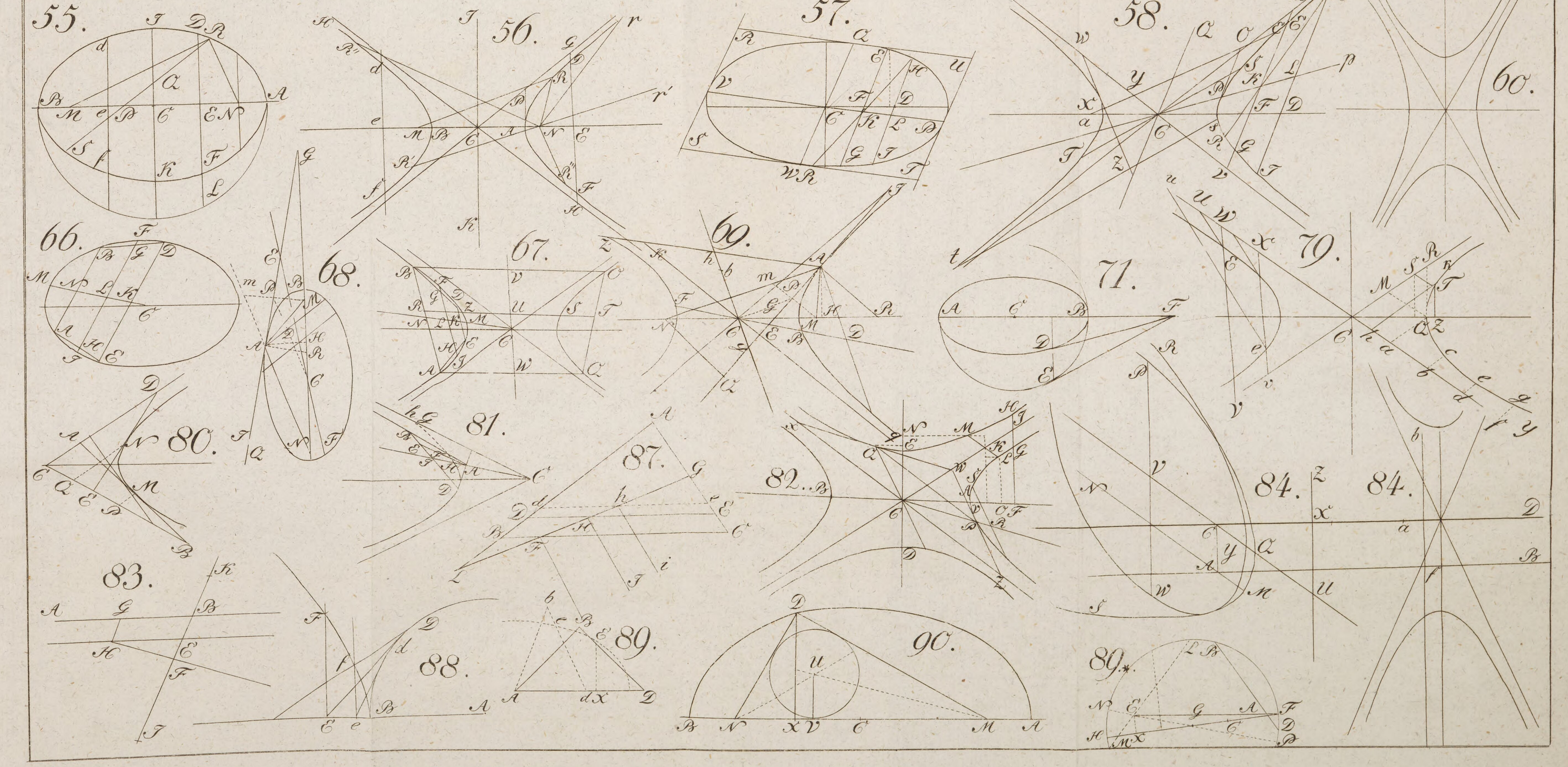
Taf: I


1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
30.
31.
32.
33.
25. (*)
34.
35.
36.
42.
43.
50.
53.

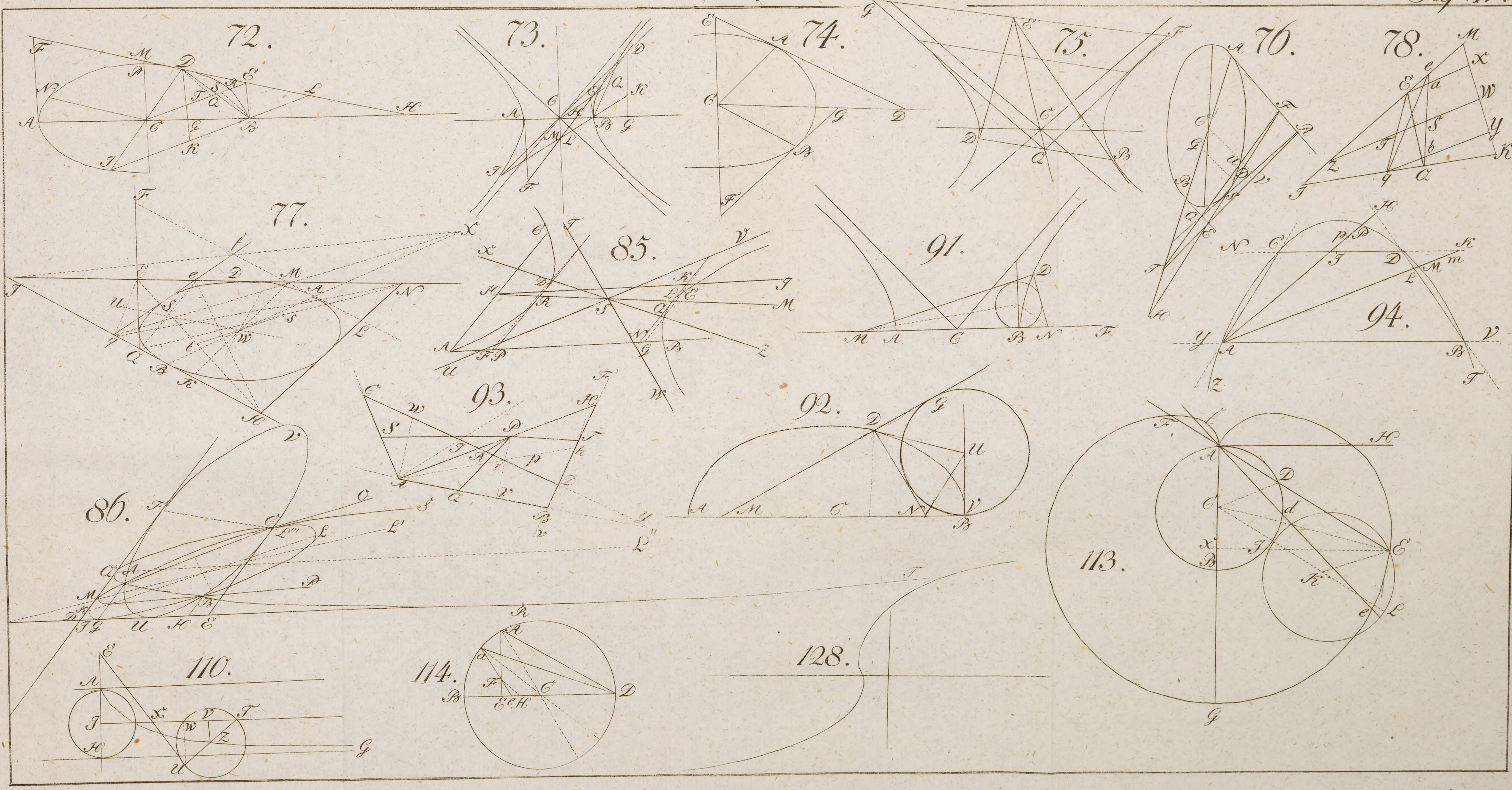
Taf. II


20.
21.
29.
37.
38.
39.
46.
44.
40.
41.
45.
47.
51.
48.
49.
53. *
63.
65.
52.
54.
59.
62.
61.
64.
70.
70. *

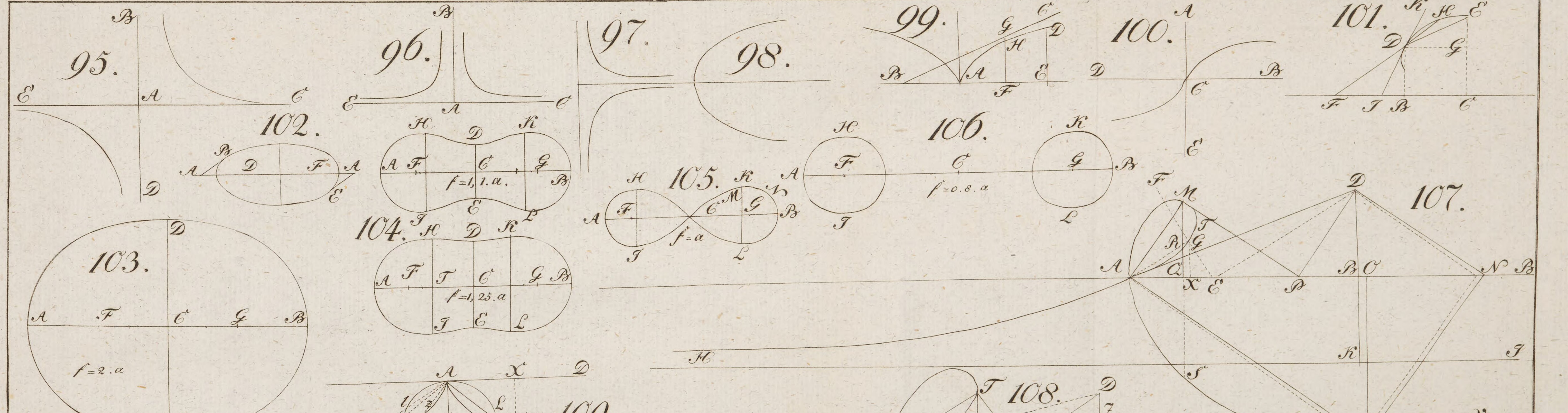
Taf. III



Taf: IV.

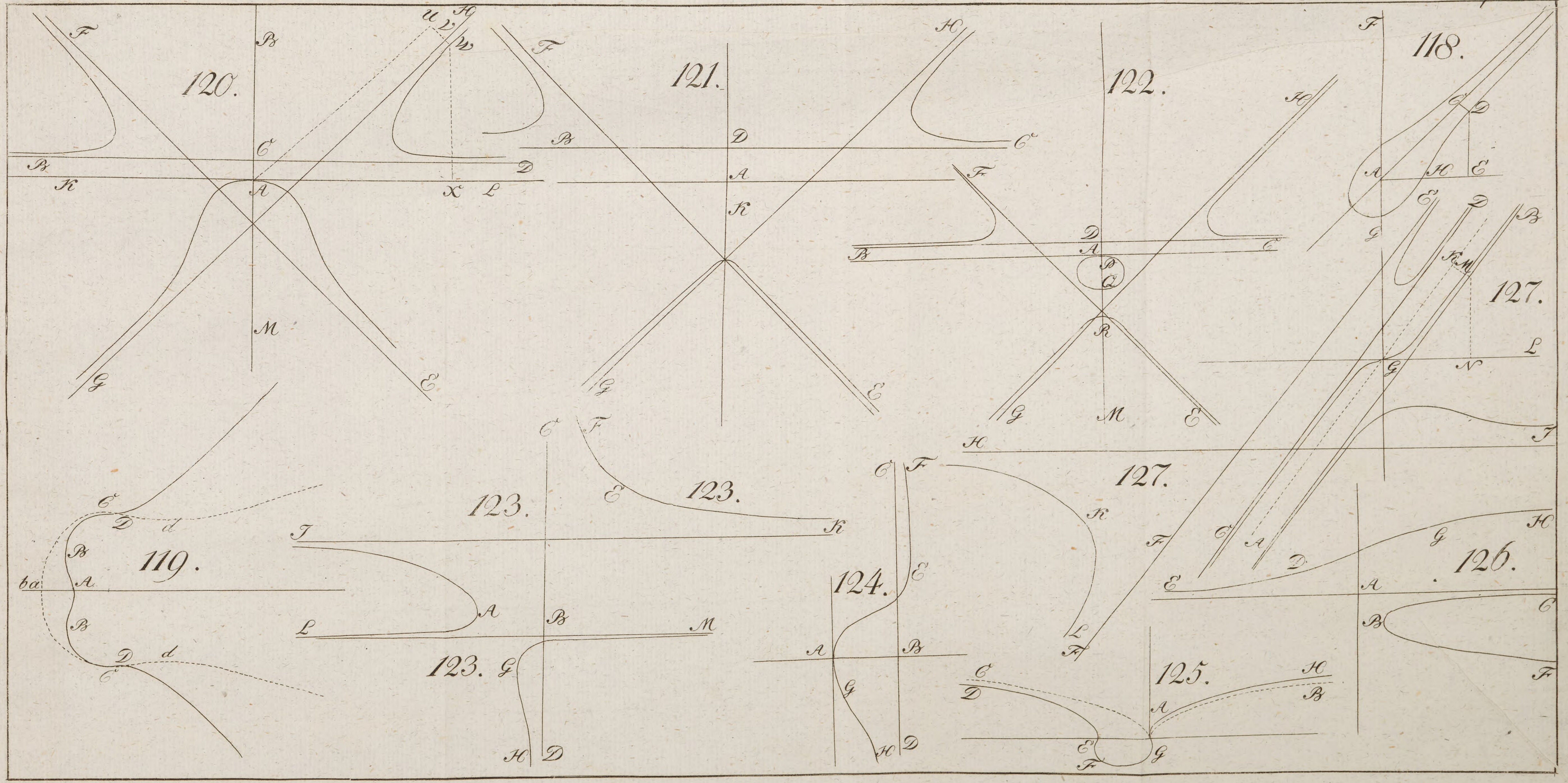


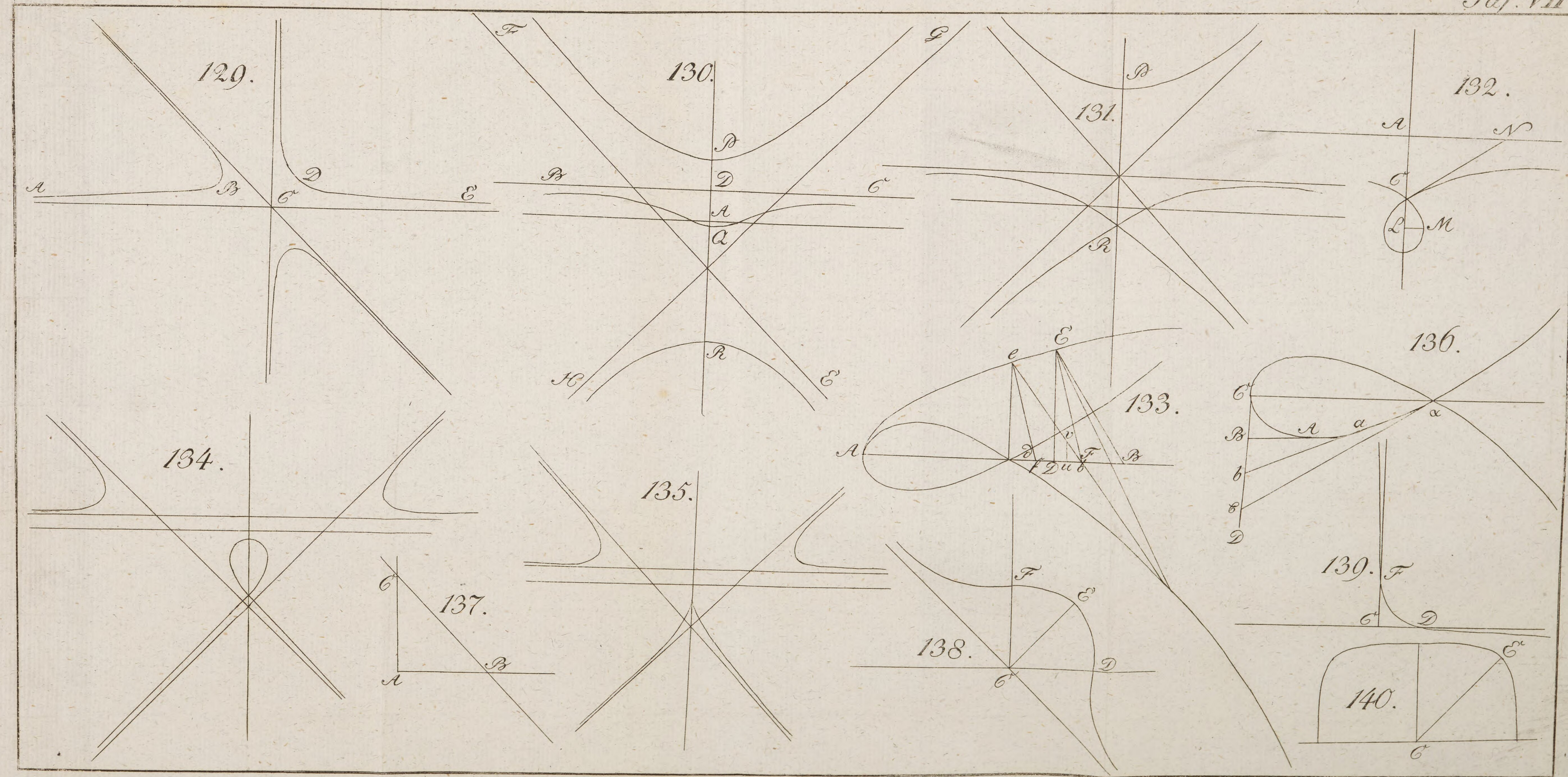
Taf: V.

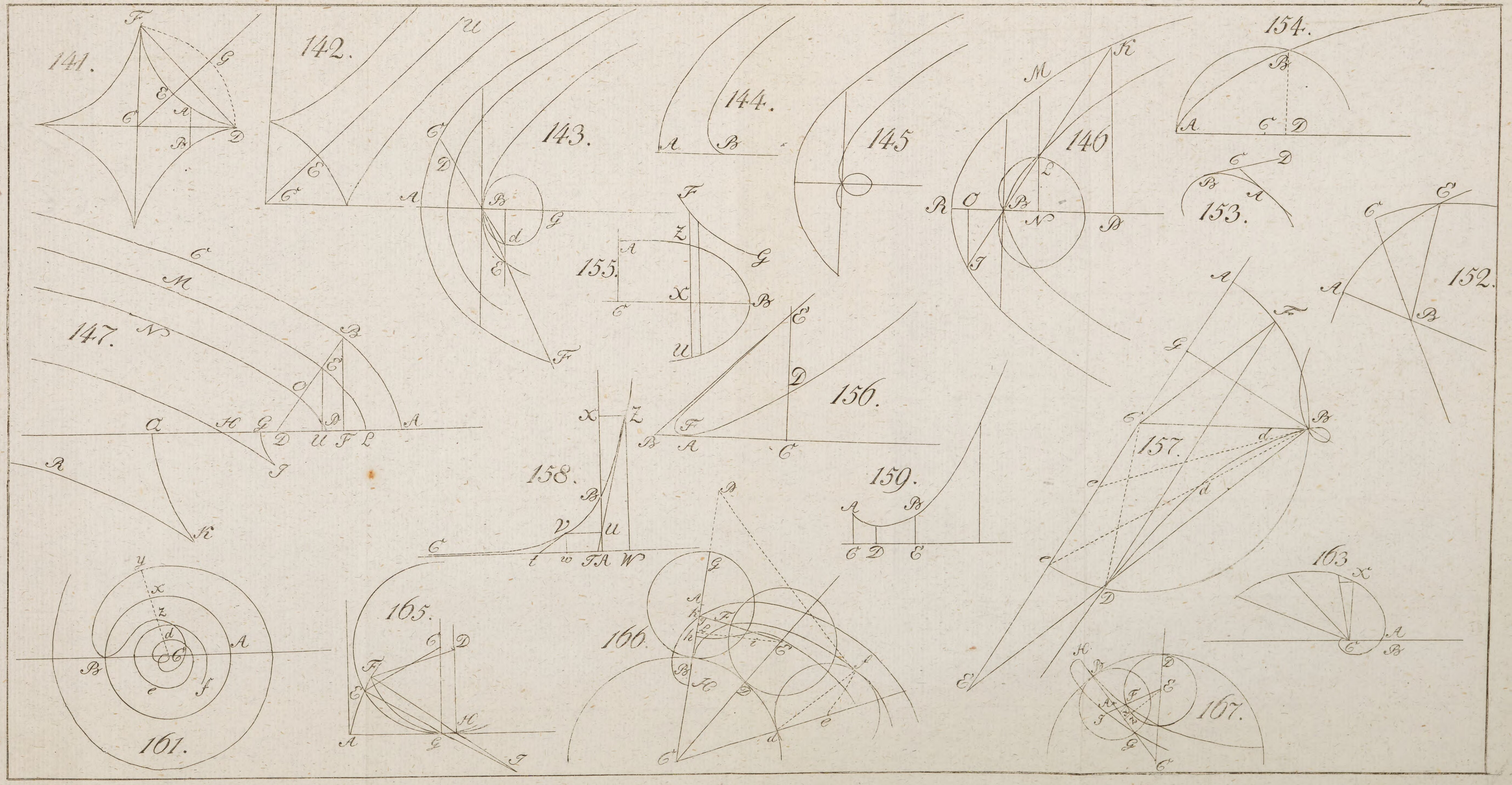


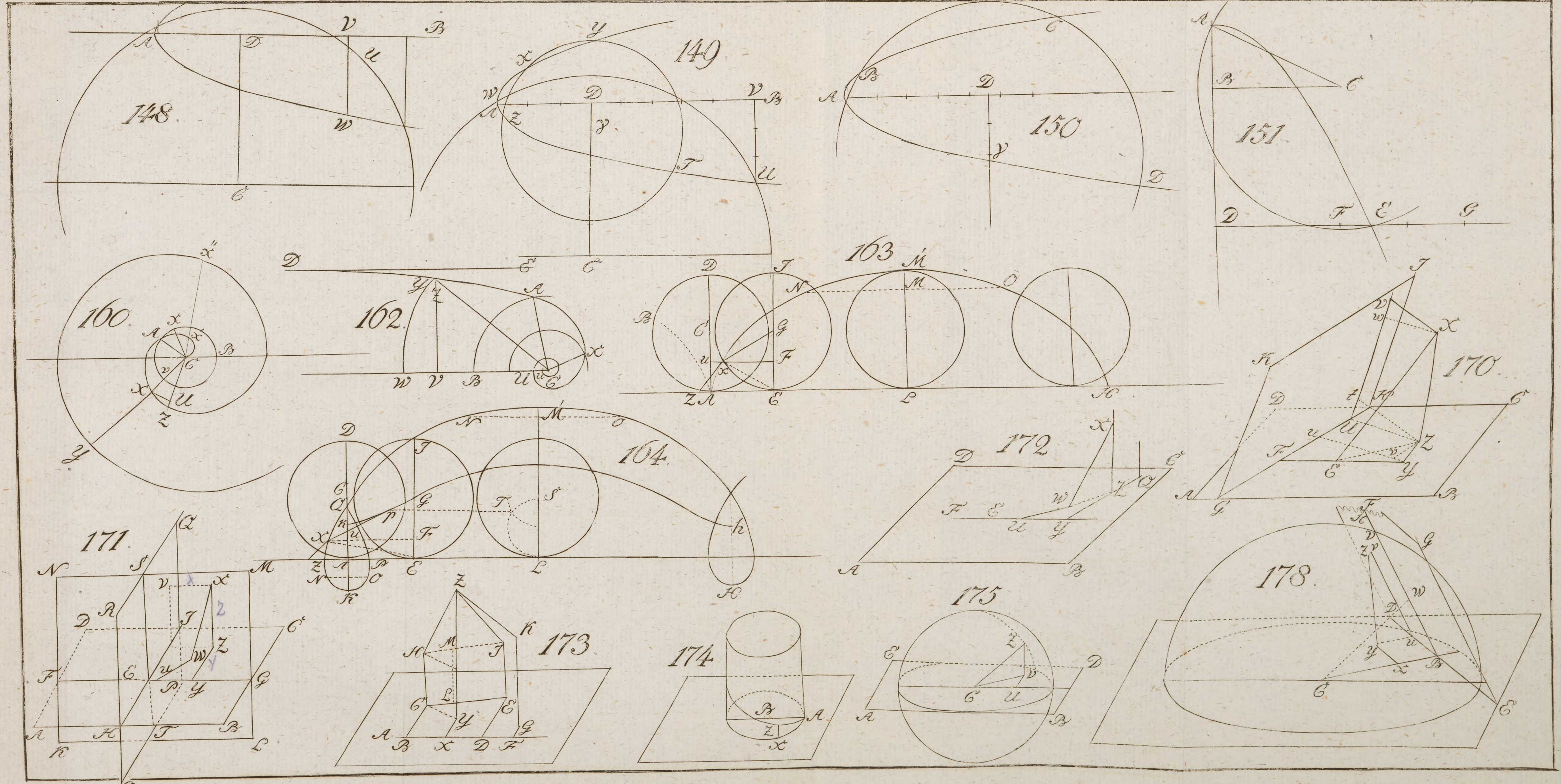
95.
96.
97.
98.
99.
100.
101.
102.
103.
104.
105.
106.
107.
108.
109.
111.
112.
115.
116.
117.
f=1,1.a.
f=1,25.a
f=a
f=0.8.a
f=2.a

Taf: VI.

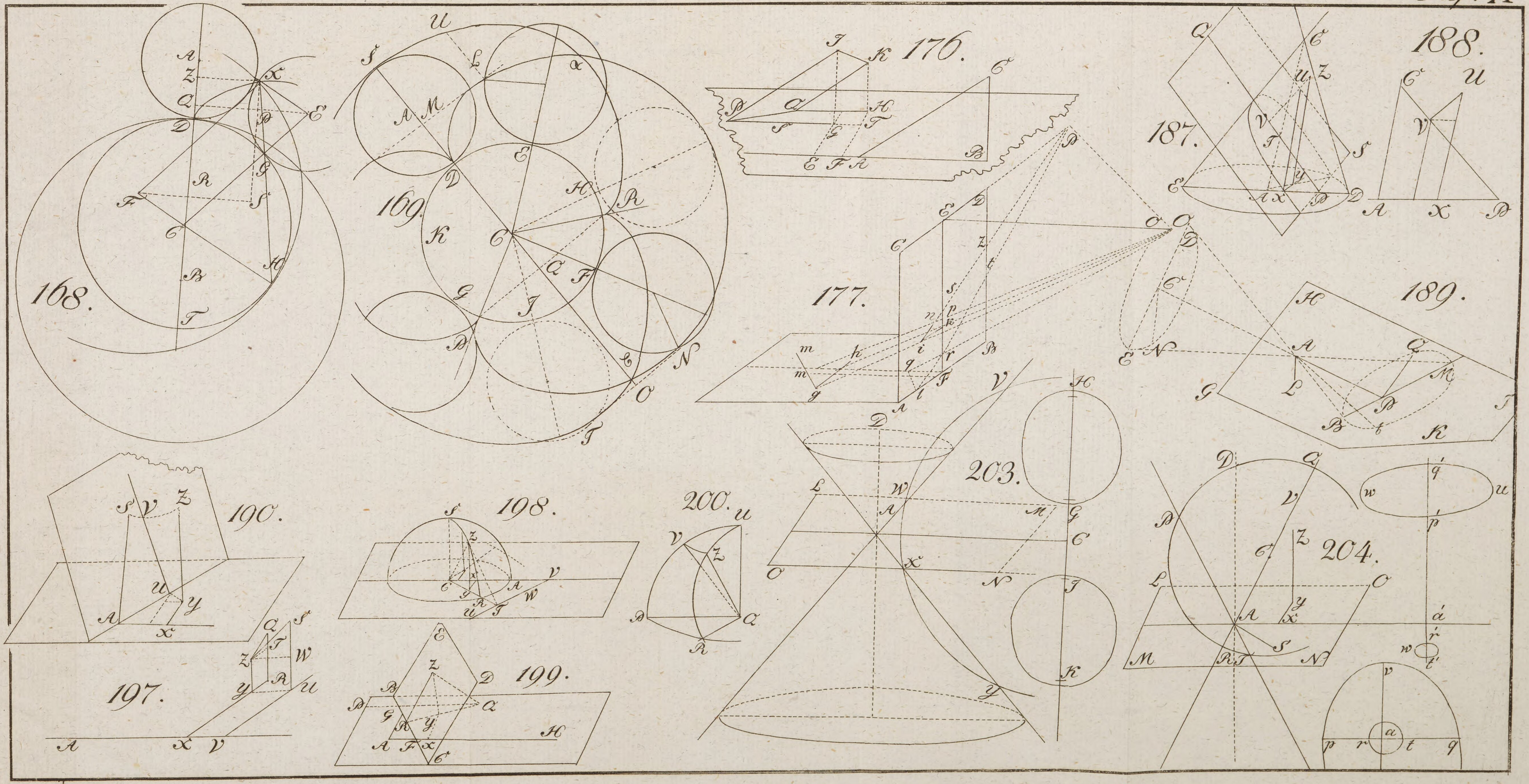


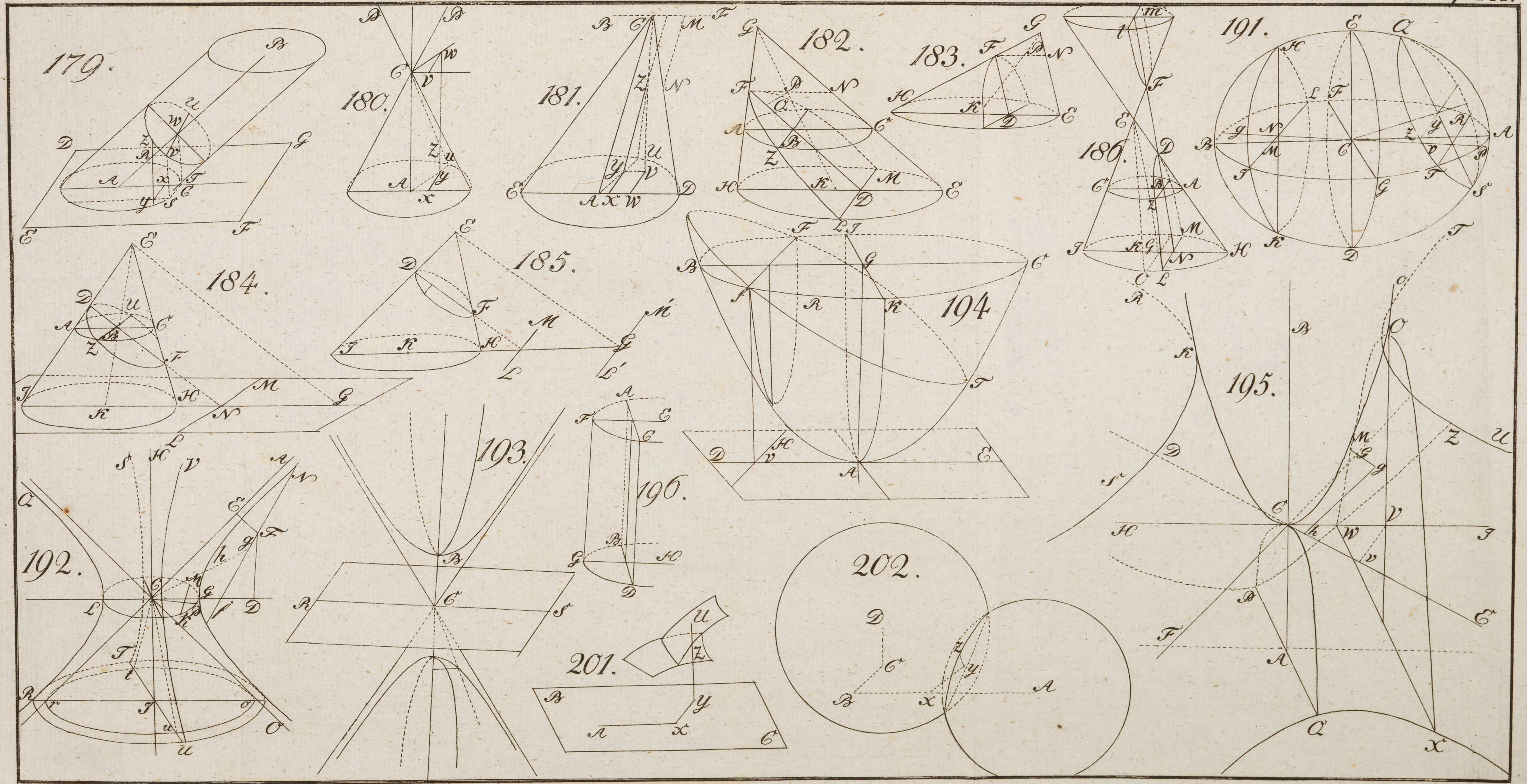

129.
130.
131.
132.
133.
134.
135.
136.
137.
138.
139.
140.


141.
142.
143.
144.
145
146
147.
152.
153.
154.
155.
156.
157.
158.
159.
161.
163
165.
166.
167.


148.
149
150
151.
160.
162.
163
164.
170.
171.
172.
173.
174.
175.
178.

Taf. X




179.
180.
181.
182.
183.
184.
185.
186.
191.
192.
193.
194
195.
196.
201.
202.